دولة فلسطين
وزارة التربية والتعليم العالي

الرياضيات

الجزء الأول

١٢ العلمي

بسم الله الرحمن الرحيم

دولة فلسطين

وزارة التربية والتعليم العالي

الرياضيات

الجزء الأول

للصف الثاني الثانوي

العلمي والصناعي

المؤلفون

د. حسن عبد الرحيم يوسف «منسقاً»

أ. محمد حلمي نجم

أ. علي خليل حمد

د. محمد صالح

د. عزو عفانة

أ. محمد عالية

أ. محمد يوسف الجمل

قررت وزارة التربية والتعليم العالي في دولة فلسطين
تدريس كتاب الرياضيات للصف الثاني الثانوي العلمي في مدارسها للعام الدراسي ٢٠٠٦ / ٢٠٠٧ م

الإشراف العام

رئيس لجنة المناهج: د. نعيم أبو الحمص

مدير عام مركز المناهج: د. صلاح ياسين

مركز المناهج

إشراف تربوي : د.عمر أبوالحمص

الدائرة الفنية

- **إشراف إداري:** أحمد سياعرة
- **تصميم:** كمال محمود فحماوي
- **الإعداد المحوسب للطباعة:** حمدان بحبوح
- **تنضيد:** أسمهان فوزي الديسي، سمر محمود عامر، سيراء غسان سرحان

الفريق الوطني لمنهاج الرضيات

د. فطين مسعد «منسقاً»	د. الياس ضبيط	شهناز الفار
علي خليل حمد	د. علي خليفة	ليانا جابر
د. محمد حمدان	محمد مقبل	وائل كشك

الطبعة الأولى التجريبية
٢٠٠٦م/١٤٢٧ هـ

مركز المناهج –حي المصيون–شارع المعاهد–أول شارع على اليمين من جهة مركز المدينة
ص .ب ٧١٩ – رام الله – فلسطين
تلفون ٢٩٦٩٣٥٠-٢-٩٧٠+ فاكس ٢٩٦٩٣٧٧-٢-٩٧٠+
الصفحة الالكترونية: www.pcdc.edu.ps – العنوان الالكتروني: pcdc@palnet.com

تمهيد

رأت وزارة التربية والتعليم العالي ضرورة وضع منهاج يراعي الخصوصية الفلسطينية؛ لتحقيق طموحات الشعب الفلسطيني حتى يأخذ مكانه بين الشعوب. إن بناء منهاج فلسطيني يعد أساساً مهمّاً لبناء السيادة الوطنية للشعب الفلسطيني، وأساساً لترسيخ القيم والديمقراطية، وهوحق إنساني، وأداة تنمية للموارد البشرية المستدامة التي رسختها مبادئ الخطة الخمسية للوزارة.

وتكمن أهمية المنهاج في أنه الوسيلة الرئيسة للتعليم، التي من خلالها تتحقق أهداف المجتمع؛ لذا تولي الوزارة عناية خاصة بالكتاب المدرسي، أحد عناصر المنهاج؛ لأنه المصدر الوسيط للتعلم، والأداة الأولى بيد المعلم والطالب، إضافة إلى غيره من وسائل التعلم: الإنترنت، والحاسوب، والثقافة المحلية، والتعلم الأسري، وغيرها من الوسائط المساعدة.

لقد قامت وزارة التربية والتعليم العالي بإتمام مرحلة تأليف جميع الكتب المدرسية (١ -١٢)، التي تُوِّجَت بتطبيق كتب الصف الثاني الثانوي (١٢) بجميع فروعه: العلمي، والعلوم الإنسانية، والمهني، والتقني، مع بداية العام الدراسي(٢٠٠٦ / ٢٠٠٧). وتعمل الوزارة حالياً على تنفيذ خطة تطوير شاملة في السنوات الثلاث القادمة، تغطي أربعة مجالات، وهي: أنشطة تطويرية (مراجعة جميع الكتب للصفوف ١ -١٢)، وأنشطة استكمالية (أدلة المعلم والوسائل المعينة)، وأنشطة مستقبلية (دراسات تقويمية وتحليلية لمناهج المراحل الثلاث في جميع المباحث أفقياً وعمودياً)، وأنشطة موازية (توسيع البنية التحتية في مجال الشبكات والتعليم الإلكتروني، وتحسين آلية امتحان الثانوية العامة).

وتعد الكتب المدرسية وأدلة المعلم التي أنجزت للصفوف الاثني عشر، وعددها يقارب ٤٥٠ كتاباً، ركيزة أساسية في عملية التعليم والتعلم، بما تشتمل عليه من معارف ومعلومات عُرضت بأسلوب سهل ومنطقي؛ لتوفير خبرات متنوعة، تتضمن مؤشرات واضحة، تتصل بطرائق التدريس، والوسائل والأنشطة وأساليب التقويم، وتتلاءم مع مبادئ الخطة الخمسية المذكورة أعلاه.

وتتم مراجعة الكتب وتنقيحها وإثراؤها سنويّاً بمشاركة التربويين والمعلمين والمعلمات الذين يقومون بتدريسها، وترى الوزارة الطبعات من الأولى إلى الرابعة طبعات تجريبية قابلة للتعديل والتطوير؛ كي تتلاءم مع التغيرات في التقدم العلمي والتكنولوجي ومهارات الحياة. إن قيمة الكتاب المدرسي الفلسطيني تزداد بمقدار ما يبذل فيه من جهود، ومن مشاركة أكبر عدد ممكن من المتخصصين في مجال إعداد الكتب المدرسية، الذين يحدثون تغييراً جوهريّاً في التعليم، من خلال العمليات الواسعة من المراجعة، بمنهجية رسخها مركز المناهج في مجالي التأليف والإخراج في طرفي الوطن الذي يعمل على توحيده.

إن وزارة التربية والتعليم العالي لايسعها إلا أن تتقدم بجزيل الشكر والتقدير إلى المؤسسات والمنظمات الدولية، والدول العربية والصديقة وبخاصة حكومة بلجيكا؛ لدعمها المالي لمشروع المناهج.

كما أن الوزارة لتفخر بالكفاءات التربوية الوطنية، التي شاركت في إنجاز هذا العمل الوطني التاريخي من خلال اللجان التربوية، التي تقوم بإعداد الكتب المدرسية، وتشكرهم على مشاركتهم بجهودهم المميزة، كلٌّ حسب موقعه، وتشمل لجان المناهج الوزارية، ومركزالمناهج، والإقرار، والمؤلفين، والمحررين، والمشاركين في ورشات العمل، والمصممين، والرسامين، والمراجعين، والطابعين، والمشاركين في إثراء الكتب المدرسية من الميدان أثناء التطبيق.

وزارة التربية والتعليم العالي
مركز المناهج
أيلول ٢٠٠٦ م

بسم الله الرحمن الرحيم

مقدمة

الحمد لله رب العالمين وبعد . . .

يسرنا أن نقدم لزملائنا المعلمين والمعلمات، ولطلبتنا الأعزاء الجزء الأول من كتاب الرياضيات للصف الثاني الثانوي العلمي، وفق الخطوط العريضة المعدلة لمبحث الرياضيات ضمن خطة المنهاج الفلسطيني الأول.

يشتمل الكتاب على ثلاث وحدات هي: النهايات والاتصال، وحساب التفاضل، وتطبيقات التفاضل.

في الوحدة الأولى (النهايات والاتصال) قدمنا مفهوم نهاية الاقتران عند نقطة، ونظريات النهايات، والصور غير المعينة، والنهايات في المالانهاية، والاتصال، ونظريات الاتصال، ونظرية القيم الوسطية ونظرية بلزانو.

وفي الوحدة الثانية (حساب التفاضل) قدمنا متوسط التغير، والمشتقة الأولى، والعلاقة بين الاتصال والاشتقاق، وقواعد الاشتقاق، وتطبيقات هندسية وفيزيائية على الاشتقاق، وقاعدة السلسلة، والاشتقاق الضمني، ومشتقات الاقترانات الدائرية.

وفي الوحدة الثالثة (تطبيقات التفاضل) قدمنا نظرية القيم المتوسطة ونظرية رول، والتزايد والتناقص، والقيم القصوى المحلية والمطلقة، واختبار المشتقة الأولى والمشتقة الثانية، والتقعر ونقط الانعطاف ورسم المنحنيات، وتطبيقات عملية على القيم القصوى، والمعدلات الزمنية المرتبطة.

أما من حيث الأسلوب، فقد حرصنا على التسلسل المنطقي للمفاهيم والنظريات والوحدات، وعلى الدقة العلمية، دون تركيز زائد على براهين النظريات، واعتمدنا بدلاً من ذلك الرسوم التوضيحية والأمثلة المنوعة مع وضع استراتيجيات عامة للحل، حيثما أمكن.

ولقناعتنا أن طلبة الثانوية العامة حريصون كل الحرص على المعرفة والتعمق والاستزادة لتحقيق أفضل النتائج في امتحان الثانوية العامة تمهيداً لدراساتهم الجامعية، فقد أتبعنا كل وحدة بمجموعة من التمارين والأسئلة المنوعة الموضوعية والمقالية التي تغطي المفاهيم والتعميمات والقوانين والمهارات الواردة في الوحدة، بالإضافة إلى التمارين والمسائل في نهاية كل بند من بنود الوحدات الثلاث.

نتمنى لأبنائنا الطلبة كل توفيق ونجاح، ونتقدم من زملائنا في الميدان، مشرفين ومشرفات، ومعلمين ومعلمات، من جميع المحافظات الذين شاركوا في إثراء مسودات هذا الكتاب، بكل الاحترام والتقدير، سائلين المولى عز وجل أن يوفقهم في إكمال مسيرتهم النبيلة بتعليم طلبتنا الأعزاء وتوجيههم بكل صدق وأمانه، وتقديم التغذية الراجعة لمركز المناهج بعد وضع الكتاب موضع التنفيذ لإصدار طبعة جديدة منقحة.

والله ولي التوفيق

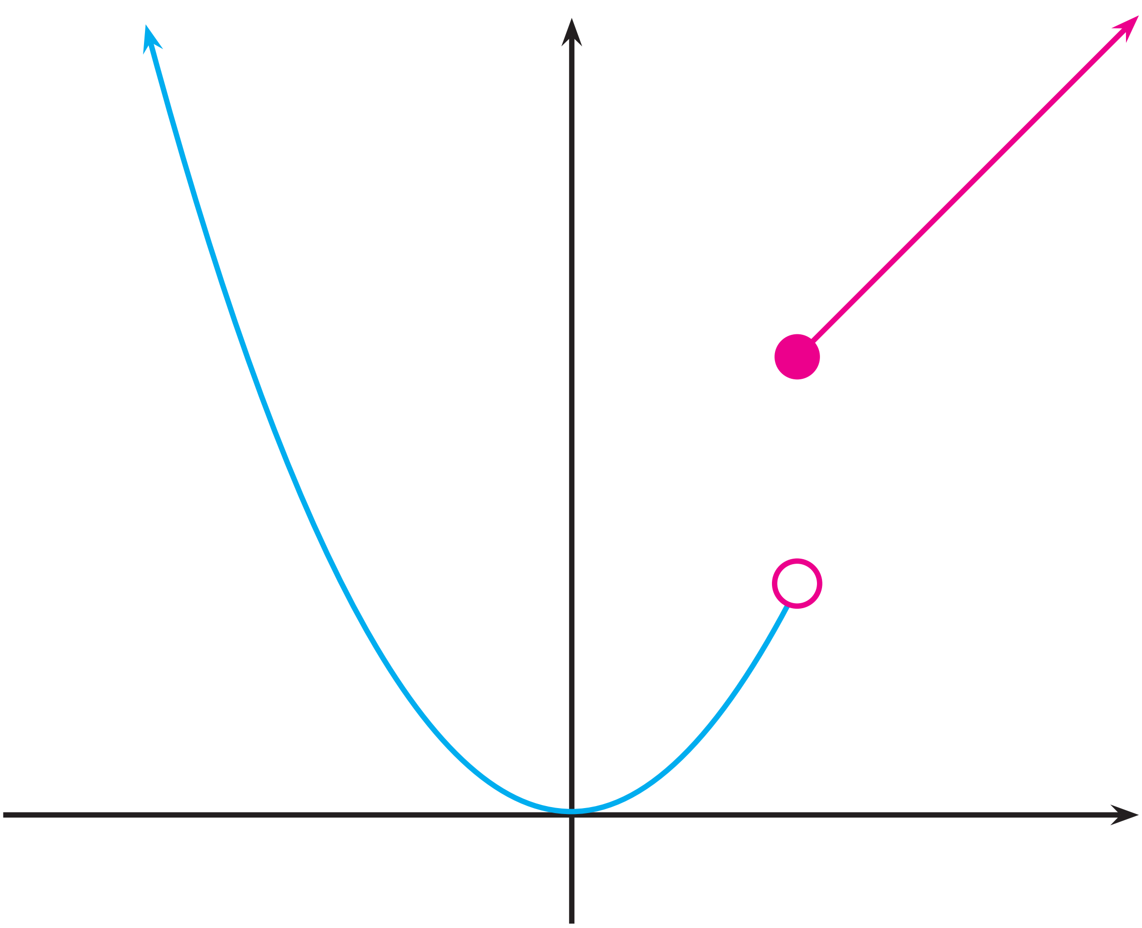
المؤلفون

المحتويات

الـــــوحـــــــدة

١

النهايات والاتـصـال



١-١ نهاية الاقتران عند نقطة (Limit of a Function at a Point)

توضح نهاية الاقتران عند نقطة سلوك الاقتران في فترة مفتوحة حول تلك النقطة، دون أي اعتبار خاص لقيمة الاقتران عند النقطة ذاتها، وتعتبر النهايات الأساس الذي يستند إليه علم التفاضل والتكامل، كماسيتبين لك في هذا الكتاب.

وسندرس في هذه الوحدة مفهوم النهاية، ووجودها وعدمه، وحساب النهايات لاقترانات جبرية ومثلثية متنوعة، وأخيراً سندرس الاقترانات المتصلة ونتعرف بعض خصائصها الأساسية.

مثال (١)

ليكن الاقتران ق (س) =٢س + ١ ، س ∈ ح .

ماذا يحدث لقيم ق(س) عندما تقترب س من ١ ؟

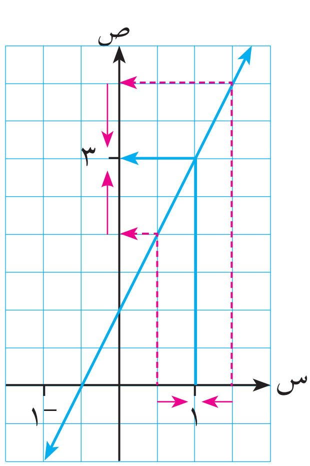
الحل: الجدول التالي يبين قيماً للمتغير س في جوار العدد ١ ، وقيم ق(س) المناظرة:

س	١,٥	١,١	١,٠١	١,٠٠١	... ←	١	→ ...	,٩٩٩	٠,٩٩	,٩	٠,٥
ق(س)	٤	٣,٢	٣,٠٢	٣,٠٠٢	... ←	٣	→ ...	٢,٩٩٨	٢,٩٨	٢,٨	٢

نلاحظ من الجدول أنه عندما تقترب س من العدد ١ من خلال قيم أكبر منه (أي أن س تقترب من ١ من جهة اليمين) متخذة القيم ١,٥ ، ١,١ ، ١,٠١ ، ١,٠٠١ فإن قيم ق(س) المناظرة وهي ٤ ، ٣,٢ ، ٣,٠٢ ، ٣,٠٠٢ على الترتيب تقترب من العدد ٣ .

ونلاحظ أيضاً أنه عندما تقترب س من العدد ١ من خلال قيم أصغر منه (أي أن س تقترب من ١ من جهة اليسار) متخذة القيم ٠,٥، ٠,٩، ٠,٩٩، ٠,٩٩٩ فإن قيم ق(س) المناظرة وهي ٢ ، ٢,٨ ، ٢,٩٨ ، ٢,٩٩٨ على الترتيب تقترب من العدد ٣. لاحظ الشكل (١-١).

إذن في الحالتين، سواء اقتربنا من العدد ١ من جهة اليمين أو من اليسار، فإن قيم الاقتران تقترب من قيمة واحدة فقط هي ٣.



الشكل (١-١)

هذا، ويمكن أن نجعل قيم ق(س) تقترب من العدد ٣ بالقدر الذي نشاء وذلك بأخذ قيم س قريبة من العدد ١ قرباً كافياً، فمثلاً يمكن جعل قيم ق(س) قريبة من العدد ٣ بمقدار أصغر من ٠,٠٠٠١ ؛ أي نجعل قيم ق(س) تقع بين العددين ٢,٩٩٩٩ ، ٣,٠٠٠١ ، وذلك لجميع قيم س القريبة من العدد ١ بمقدار أصغر من ٠,٠٠٠٠٥ ؛ أي لجميع قيم س الواقعة بين ٠,٩٩٩٩٥ ، ١,٠٠٠٠٥ .

لذلك نقول إن نهاية الاقتران ق(س) عندما تقترب س من ١ تساوي ٣ ، وبالرموز نكتب :

$\underset{س \leftarrow ١}{\text{نهـــا}}$ ق(س) = ٣ .

تعريف:

ليكن ق(س) اقتراناً معرفاً على فترة مفتوحة حول أ . يقال إن $\underset{س \leftarrow أ}{\text{نهـــا}}$ ق(س) = ل، حيث ل عدد حقيقي، إذا كانت قيم ق(س) تقترب من العدد ل باقتراب س من العدد أ ، بحيث يمكن جعل قيم ق(س) قريبة من ل القرب الذي نشاء، لجميع قيم س القريبة من أ قرباً كافياً.

لاحظ في المثال السابق أن $\underset{س \leftarrow ١}{\text{نهـــا}}$ ق(س) = ق(١)، ولكن هذا ليس صحيحاً بوجه عام كما هو مبين في الأمثلة التالية :

مثال (٢)

ليكن ق(س) = $\frac{س^{٢} - ٩}{س - ٣}$ ، س ≠ ٣. أوجد $\underset{س \leftarrow ٣}{\text{نهـــا}}$ ق(س).

الحل:

الجدول التالي يبين بعض قيم س القريبة من ٣ وقيم ق(س) المناظرة :

س	٣,٥	٣,١	٣,٠١	٣,٠٠١	... ←	٣	→ ...	٢,٩٩٩	٢,٩٩	٢,٩	٢,٥
ق(س)	٦,٥	٦,١	٦,٠١	٦,٠٠١	... ←	٦	→ ...	٥,٩٩٩	٥,٩٩	٥,٩	٥,٥

نلاحظ من الجدول أنه عندما تقترب س من ٣ فإن ق(س) تقترب من العدد ٦ .

أي أن : $\underset{س \leftarrow ٣}{\text{نهـــا}}$ ق(س) = ٦ .

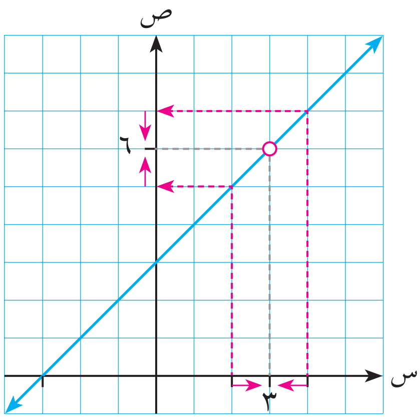
لاحظ أن ق(س) = $\frac{(س - ٣)(س + ٣)}{(س - ٣)}$

وحيث إن قيمة س ≠ ٣ فإنه يمكن تبسيط قاعدة ق(س) لتصبح :

ق(س) = س + ٣ ، س ≠ ٣

الشكل (١-٢) يمثل منحنى الاقتران ق(س) وهونفس منحنى الخط المستقيم ص = س + ٣ بعد حذف النقطة (٣، ٦).

نلاحظ في هذا المثال أن $\underset{س \leftarrow ٣}{\text{نهــا}}$ ق(س) = ٦ بالرغم من أن ق(س) غير معرف عند س = ٣ ؛ أي أنه ليس بالضرورة بوجه عام أن يكون الاقتران معرفاً عند س = ﺃ لبحث نهاية الاقتران عند س = ﺃ.



الشكل (١-٢)

مثال (٣)

ليكن ق(س) = $\begin{cases} \dfrac{س^٢ - ٤}{س - ٢} & ، س \neq ٢ \\ ٣ & ، س = ٢ \end{cases}$

ارسم منحنى الاقتران ق(س)، ثم ابحث في $\underset{س \leftarrow ٢}{\text{نهــا}}$ ق(س).

الحل:

ق(س) = $\begin{cases} س+٢ & ، س \neq ٢ \\ ٣ & ، س = ٢ \end{cases}$

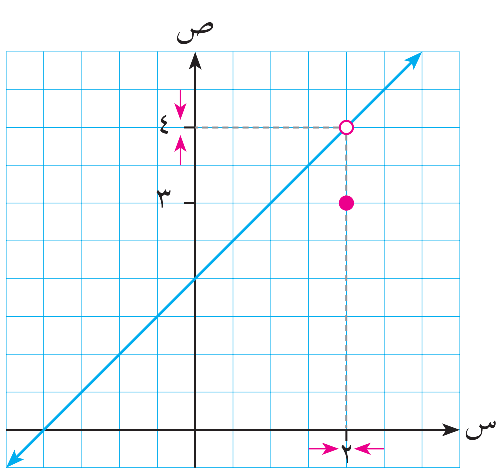
الشكل (١-٣) يمثل منحنى الاقتران ق(س)

ومنه نلاحظ أنه باقتراب س من العدد ٢ ، فإن قيم ق(س) تقترب من العدد ٤ .

∴ $\underset{س \leftarrow ٢}{\text{نهــا}}$ ق(س) = ٤ .

لاحظ أن ق(٢) = ٣

بينما $\underset{س \leftarrow ٢}{\text{نهــا}}$ ق(س) = ٤، أي أنه ليس ضرورياً، بوجه عام، أن تكون نهاية الاقتران عند س = ﺃ تساوي ق(ﺃ).



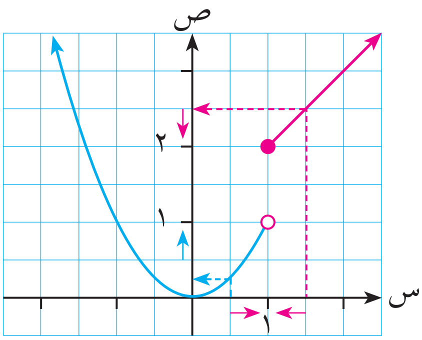
الشكل (١-٣)

مثال (٤)

ليكن ق(س) = $\begin{cases} س^٢ &، س < ١ \\ س+١ &، س \geqslant ١ \end{cases}$

ارسم منحنى الاقتران ق(س)، ثم ابحث في $\underset{س \leftarrow ١}{\text{نهــا}}$ ق(س).

الحل:



الشكل (١-٤)

يمثل الشكل (١-٤) منحنى الاقتران ق(س)

أولاً: عندما تقترب س من ١ من جهة اليمين،

أي عندما تقترب س من ١ متخذة قيماً أكبر من ١

فإن قيم ق(س) = س + ١ تقترب من العدد ٢

ونعبر عن ذلك بالرموز:

$\underset{س \leftarrow ١^+}{\text{نهــا}}$ ق(س) = $\underset{س \leftarrow ١^+}{\text{نهــا}}$ (س + ١) = ٢

وتقرأ: نهاية ق(س) عندما تقترب س من العدد ١ من جهة اليمين تساوي ٢.

ثانياً: عندما تقترب س من ١ من جهة اليسار أي عندما تقترب س من ١ متخذة قيماً أصغر من ١،

فإن قيم ق(س) = س^٢ تقترب من العدد ١ ونعبر عن ذلك بالرموز:

$\underset{س \leftarrow ١^-}{\text{نهــا}}$ ق(س) = $\underset{س \leftarrow ١^-}{\text{نهــا}}$ س^٢ = ١

وتقرأ: نهاية ق(س) عندما تقترب س من ١ من جهة اليسار تساوي ١.

وبما أن قيم ق(س) في هذه الحالة لا تقترب من العدد نفسه عندما تقترب س من ١، فإننا نقول إن $\underset{س \leftarrow ١}{\text{نهــا}}$ ق(س) غير موجودة.

تعريف:

ليكن ق(س) اقتراناً معرفاًعلى يمين ؟ أي معرفاً في فترة مفتوحة مثل]؟، جـ[.

يقال إن نهاية ق(س) عندما س تقترب من ؟ من جهة اليمين تساوي ل (وتسمى النهاية اليمنى)، وتكتب $\underset{س \leftarrow ؟^+}{\text{نهــا}}$ ق(س) = ل، إذا كانت قيم ق(س) تقترب من ل باقتراب س من ؟ من جهة اليمين. وبالمثل تعرف النهاية اليسرى للاقتران ق(س) عندما تقترب س من ؟ من جهة اليسار، ويرمز لها بالرمز $\underset{س \leftarrow ؟^-}{\text{نهــا}}$ ق(س).

نظرية:

تكون للاقتران ق(س) نهاية تساوي ل عندما تقترب س من م ، إذا وفقط إذا كان للاقتران ق(س) نهاية يمنى ونهاية يسرى عند س = م ، وكانت النهايتان متساويتين، وكل منهما تساوي ل . بالرموز :

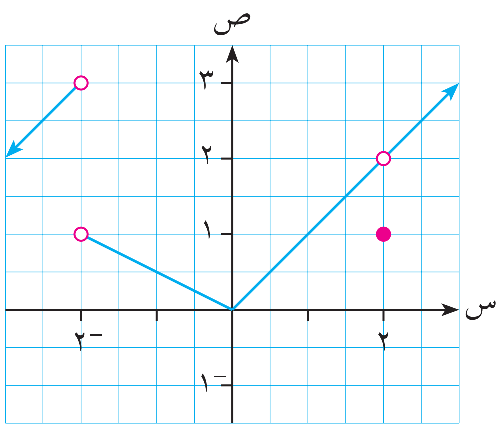
$$\underset{س \leftarrow م}{\text{نهــا}}\ ق(س) = ل \Leftrightarrow \underset{س \leftarrow م^+}{\text{نهــا}}\ ق(س) = \underset{س \leftarrow م^-}{\text{نهــا}}\ ق(س) = ل$$

مثال (٥)

يمثل الشكل (١-٥) منحنى الاقتران ق(س) . ابحث في النهايات التالية :

أ $\underset{س \leftarrow -٢^-}{\text{نهــا}}\ ق(س)$ ب $\underset{س \leftarrow -٢^+}{\text{نهــا}}\ ق(س)$ جـ $\underset{س \leftarrow -٢}{\text{نهــا}}\ ق(س)$

د $\underset{س \leftarrow ٠}{\text{نهــا}}\ ق(س)$ هـ $\underset{س \leftarrow ٢}{\text{نهــا}}\ ق(س)$



الشكل (١-٥)

الحل:

من منحنى الاقتران ق(س) نلاحظ أن :

أ $\underset{س \leftarrow -٢^-}{\text{نهــا}}\ ق(س) = ٣$

ب $\underset{س \leftarrow -٢^+}{\text{نهــا}}\ ق(س) = ١$

جـ $\underset{س \leftarrow -٢}{\text{نهــا}}\ ق(س)$ غير موجودة لأن النهاية من اليمين لا تساوي النهاية من اليسار .

د $\underset{س \leftarrow ٠}{\text{نهــا}}\ ق(س) = ٠$

هـ $\underset{س \leftarrow ٢}{\text{نهــا}}\ ق(س) = ٢$

مثال (٦)

$$ليكن\ ق(س) = \begin{cases} س+٢ & ،\ س < ٢ \\ ٢ & ،\ س = ٢ \\ ٤ & ،\ س > ٢ \end{cases}$$

مثل ق(س) بيانياً، ومن الرسم أوجد $\underset{س \leftarrow ٢}{\text{نهــا}}\ ق(س)$.

الحل:

يمثل الشكل (١-٦) منحنى الاقتران ق(س)

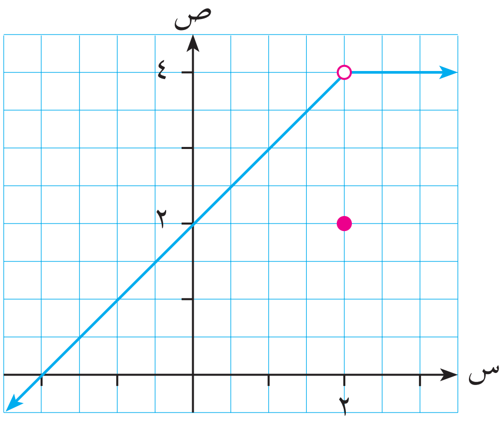
ومنه نلاحظ :

أولاً : $\underset{\text{س} \leftarrow ٢^{+}}{\text{نهـا}}\ \text{ق(س)} = \underset{\text{س} \leftarrow ٢^{+}}{\text{نهـا}}\ ٤ = ٤$

ثانياً : $\underset{\text{س} \leftarrow ٢^{-}}{\text{نهـا}}\ \text{ق(س)} = \underset{\text{س} \leftarrow ٢^{-}}{\text{نهـا}}\ \text{(س+٢)} = ٤$

بما أن النهايتين متساويتان وكلاً منهما تساوي ٤

$\therefore\ \underset{\text{س} \leftarrow ٢}{\text{نهـا}}\ \text{ق(س)} = ٤$



الشكل (١-٦)

مثال (٧)

ليكن $\text{ق(س)} = \frac{|\text{س}|}{\text{س}}$ ، س ≠ ٠

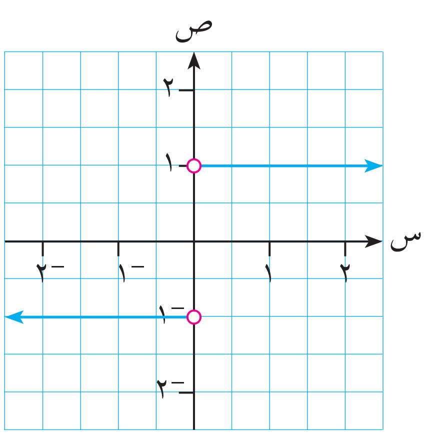
ارسم منحنى ق (س)، ثم ابحث في $\underset{\text{س} \leftarrow ٠}{\text{نهـا}}\ \text{ق(س)}$.

الحل:

يمكن إعادة كتابة قاعدة الاقتران ق(س) كما يلي :

$$\text{ق(س)} = \begin{cases} \frac{\text{س}}{\text{س}} & \text{، س} > ٠ \\ \frac{-\text{س}}{\text{س}} & \text{، س} < ٠ \end{cases}$$

$$= \begin{cases} ١ & \text{، س} > ٠ \\ -١ & \text{، س} < ٠ \end{cases}$$



الشكل (١-٧)

يمثل الشكل (١-٧) منحنى الاقتران ق(س) .

أولاً : $\underset{\text{س} \leftarrow ٠^{+}}{\text{نهـا}}\ \text{ق(س)} = \underset{\text{س} \leftarrow ٠^{+}}{\text{نهـا}}\ ١ = ١$

ثانياً : $\underset{\text{س} \leftarrow ٠^{-}}{\text{نهـا}}\ \text{ق(س)} = \underset{\text{س} \leftarrow ٠^{-}}{\text{نهـا}}\ -١ = -١$

وبما أن النهاية اليمنى لا تساوي النهاية اليسرى عند س = ٠ $\therefore\ \underset{\text{س} \leftarrow ٠}{\text{نهـا}}$ ق(س) غير موجودة .

مثال (٨)

ليكن ق(س)= س - [س] معرفاً على الفترة [٠، ٢]. ارسم منحنى ق(س)، ثم أوجد:

أولاً: $\lim_{س \leftarrow ١}$ ق(س) ثانياً: $\lim_{س \leftarrow ٢^-}$ ق(س)

الحل:

يمكن إعادة كتابة قاعدة الاقتران ق(س) كالتالي:

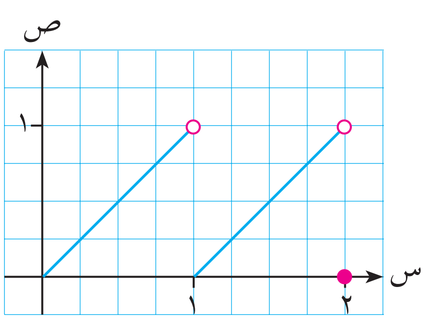
$$ق(س) = \begin{cases} س - ٠ & ، ٠ \leq س < ١ \\ س - ١ & ، ١ \leq س < ٢ \\ س - ٢ & ، س = ٢ \end{cases}$$

$$= \begin{cases} س & ، ٠ \leq س < ١ \\ س - ١ & ، ١ \leq س < ٢ \\ ٠ & ، س = ٢ \end{cases}$$

يمثل الشكل (١-٨) منحنى الاقتران ق(س) على الفترة [٠، ٢]، ومن الشكل نلاحظ:

أولاً: أ $\lim_{س \leftarrow ١^+}$ ق(س) = $\lim_{س \leftarrow ١^+}$ (س - ١) = ٠

ب $\lim_{س \leftarrow ١^-}$ ق(س) = $\lim_{س \leftarrow ١^-}$ س = ١



الشكل (١-٨)

وبما أن $\lim_{س \leftarrow ١^+}$ ق(س) $\neq$ $\lim_{س \leftarrow ١^-}$ ق(س)

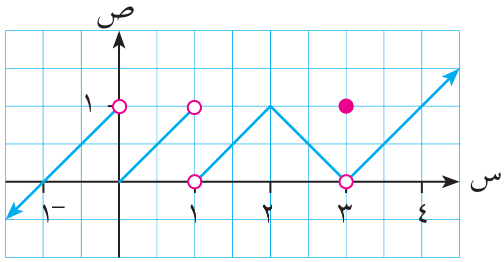
فإن $\lim_{س \leftarrow ١}$ ق(س) غير موجودة.

ثانياً: $\lim_{س \leftarrow ٢^-}$ ق(س) = $\lim_{س \leftarrow ٢^-}$ (س - ١) = ١

تمارين (١-١)

١ الشكل المجاور يمثل منحنى الاقتران ص = ق(س) .

اعتمد على الرسم في إيجاد كل من :



أ $\underset{س \leftarrow ١^{+}}{\text{نهــا}}$ ق(س)   ب $\underset{س \leftarrow ١^{-}}{\text{نهــا}}$ ق(س)

جـ $\underset{س \leftarrow ١}{\text{نهــا}}$ ق(س)   د $\underset{س \leftarrow ٣}{\text{نهــا}}$ ق(س)

هـ $\underset{س \leftarrow ٢}{\text{نهــا}}$ ق(س)   و قيم أ التي تكون عندها $\underset{س \leftarrow أ}{\text{نهــا}}$ ق(س) غير موجودة

٢ ليكن ق(س)= $\begin{cases} س^{٢} & ،\ س \le ٠ \\ ٣ - ٢س & ،\ ٠ < س < ٢ \\ ٢ & ،\ س > ٢ \end{cases}$

ارسم منحنى الاقتران ق(س) ثم ابحث في النهايات التالية :

أ $\underset{س \leftarrow ٠^{-}}{\text{نهــا}}$ ق(س)   ب $\underset{س \leftarrow ٠^{+}}{\text{نهــا}}$ ق(س)   جـ $\underset{س \leftarrow ٠}{\text{نهــا}}$ ق(س)   د $\underset{س \leftarrow ٢^{+}}{\text{نهــا}}$ ق(س)

هـ $\underset{س \leftarrow ٢^{-}}{\text{نهــا}}$ ق(س)   و $\underset{س \leftarrow ٢}{\text{نهــا}}$ ق(س)   ز $\underset{س \leftarrow ١}{\text{نهــا}}$ ق(س)

٣ ليكن الاقتران ق(س) = [٢س + ١] معرفاً على الفترة [٠ ، ٢] .

ارسم منحنى ق(س) ثم أوجد من الرسم :

أ $\underset{س \leftarrow \frac{١}{٢}^{-}}{\text{نهــا}}$ ق(س)   ب $\underset{س \leftarrow \frac{١}{٢}^{+}}{\text{نهــا}}$ ق(س)   جـ $\underset{س \leftarrow \frac{١}{٢}}{\text{نهــا}}$ ق(س)

د $\underset{س \leftarrow ٢^{-}}{\text{نهــا}}$ ق(س)   هـ $\underset{س \leftarrow ١,٢}{\text{نهــا}}$ ق(س)

٤ في كل حالة من الحالات الآتية ، ارسم شكلاً تقريبياً لمنحنى اقتران بحيث إن :

أ $\underset{س \leftarrow ١}{\text{نهــا}}$ ق(س) = ٥ ، ق(١) غير معرف   ب $\underset{س \leftarrow -١}{\text{نهــا}}$ هـ(س) غير موجودة ، هـ(−١) = ٢

جـ $\underset{س \leftarrow ٢}{\text{نهــا}}$ م(س) غير موجودة، م (٢) غير معرفة   د $\underset{س \leftarrow ٣}{\text{نهــا}}$ ل(س) = ٤ ، ل(٣) = ٥

١-٢ نظريات النهايات (Limit Theorems)

تبين لنا أن عملية حساب نهاية الاقتران عند نقطة بالاعتماد على تكوين جدول يمكن أن تكون عملية طويلة وشاقة؛ وتفيدنا نظريات النهايات التي سندرسها في هذا البند في معالجة هذا الوضع، وحساب النهاية بيسر وسهولة، وبخاصة في بعض الاقترانات مثل كثيرات الحدود والاقترانات النسبية وغيرها.

مثال (١)

ليكن ق(س) = ٣، س ∈ ح، أوجد $\lim\limits_{س \leftarrow ١}$ ق(س).

الحل:

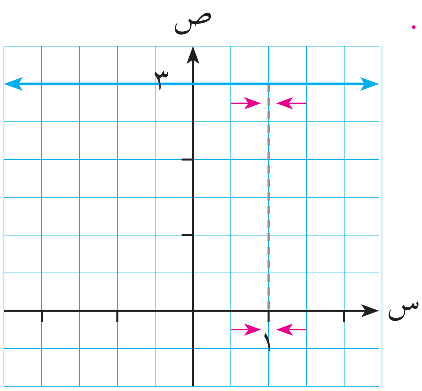
بما أن ق(س) = ٣ لجميع قيم س الحقيقية

فإنه عندما تتخذ س قيماً قريبة من ١ من جهة اليمين

أو اليسار، انظر الشكل (١-٩).

فإن ق(س) تساوي ٣؛ أي أن:

$\lim\limits_{س \leftarrow ١}$ ق(س) = ٣.



الشكل (١-٩)

بوجه عام:

نظرية (١):

إذا كان ق(س) = جـ، حيث جـ ثابت، فإنه لأي عدد حقيقي أ، $\lim\limits_{س \leftarrow أ}$ ق(س) = جـ.

مثال (٢)

إذا كان ق(س) = س، س ∈ ح،

أوجد $\lim\limits_{س \leftarrow ٢}$ ق(س).

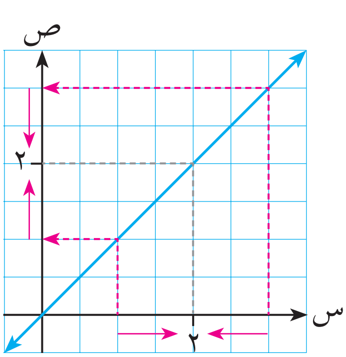
الحل:

بما أن ق (س) = س لجميع قيم س الحقيقية

فإنه عندما تقترب س من ٢ من جهة اليمين أو اليسار

فإن ق(س) تقترب من ٢ أيضاً، انظر الشكل (١-١٠).

أي أن $\lim\limits_{س \leftarrow ٢}$ ق(س) = ٢



الشكل (١-١٠)

بوجه عام:

نظرية (٢):

إذا كان ق(س) = س ، س ∈ ح فإنه لأي عدد حقيقي أ ، $\lim\limits_{س \leftarrow أ}$ ق(س) = أ

النظرية التالية تمكننا من حساب النهاية لاقتران مكون من اقترانين تربطهما عمليات جمع، أو طرح، أو ضرب، أو قسمة؛ ونقدمها دون برهان.

نظرية (٣)

إذا كانت $\lim\limits_{س \leftarrow أ}$ ق(س) = ل، $\lim\limits_{س \leftarrow أ}$ هـ(س) = م وكان جـ عدداً حقيقياً فإن:

١ $\lim\limits_{س \leftarrow أ}$ جـ ق(س) = جـ $\lim\limits_{س \leftarrow أ}$ ق(س) = جـ × ل (الضرب في عدد حقيقي)

٢ $\lim\limits_{س \leftarrow أ}$ (ق(س) + هـ(س)) = $\lim\limits_{س \leftarrow أ}$ ق(س) + $\lim\limits_{س \leftarrow أ}$ هـ(س) = ل + م (قاعدة الجمع)

٣ $\lim\limits_{س \leftarrow أ}$ (ق(س) − هـ(س)) = $\lim\limits_{س \leftarrow أ}$ ق(س) − $\lim\limits_{س \leftarrow أ}$ هـ(س) = ل − م (قاعدة الطرح)

٤ $\lim\limits_{س \leftarrow أ}$ (ق(س) × هـ(س)) = $\lim\limits_{س \leftarrow أ}$ ق(س) × $\lim\limits_{س \leftarrow أ}$ هـ(س) = ل × م (قاعدة الضرب)

٥ $\lim\limits_{س \leftarrow أ} \frac{ق(س)}{هـ(س)} = \frac{\lim\limits_{س \leftarrow أ} ق(س)}{\lim\limits_{س \leftarrow أ} هـ(س)} = \frac{ل}{م}$ ، بشرط م ≠ ٠ (قاعدة القسمة)

مثال (٣)

إذا كانت $\lim\limits_{س \leftarrow ٢}$ ق(س) = ٤ ، $\lim\limits_{س \leftarrow ٢}$ هـ(س) = ٦ ، فأوجد:

أ $\lim\limits_{س \leftarrow ٢}$ (ق(س) + ٢هـ(س))

ب $\lim\limits_{س \leftarrow ٢}$ (س − ق(س))

جـ $\lim\limits_{س \leftarrow ٢} \left(\frac{ق(س) \times هـ(س)}{س + هـ(س)}\right)$

د $\lim\limits_{س \leftarrow ٢}$ (ق^{٢}(س) + ٥)

الحل:

أ $\underset{س \leftarrow ٢}{\text{نهـا}} \left(\text{ق(س)} + ٢\,\text{هـ(س)}\right) = \underset{س \leftarrow ٢}{\text{نهـا}}\ \text{ق(س)} + \underset{س \leftarrow ٢}{\text{نهـا}}\ ٢\,\text{هـ(س)}$

$= \underset{س \leftarrow ٢}{\text{نهـا}}\ \text{ق(س)} + ٢\ \underset{س \leftarrow ٢}{\text{نهـا}}\ \text{هـ(س)}$

$= ٤ + ٢ \times ٦$

$= ١٦$

ب $\underset{س \leftarrow ٢}{\text{نهـا}} \left(\text{س} - \text{ق(س)}\right) = \underset{س \leftarrow ٢}{\text{نهـا}}\ \text{س} - \underset{س \leftarrow ٢}{\text{نهـا}}\ \text{ق(س)}$

$= ٢ - ٤$

$= -٢$

جـ $\underset{س \leftarrow ٢}{\text{نهـا}} \left(\dfrac{\text{ق(س)} \times \text{هـ(س)}}{\text{س} + \text{هـ(س)}}\right) = \dfrac{\underset{س \leftarrow ٢}{\text{نهـا}} \left(\text{ق(س)} \times \text{هـ(س)}\right)}{\underset{س \leftarrow ٢}{\text{نهـا}} \left(\text{س} + \text{هـ(س)}\right)}$

$= \dfrac{\underset{س \leftarrow ٢}{\text{نهـا}}\ \text{ق(س)} \times \underset{س \leftarrow ٢}{\text{نهـا}}\ \text{هـ(س)}}{\underset{س \leftarrow ٢}{\text{نهـا}}\ \text{س} + \underset{س \leftarrow ٢}{\text{نهـا}}\ \text{هـ(س)}}$

$= \dfrac{٤ \times ٦}{٢ + ٦}$

$= ٣$

د $\underset{س \leftarrow ٢}{\text{نهـا}} \left(\text{ق}^{٢}\text{(س)} + ٥\right) = \underset{س \leftarrow ٢}{\text{نهـا}}\ \text{ق}^{٢}\text{(س)} + \underset{س \leftarrow ٢}{\text{نهـا}}\ ٥$

$= \underset{س \leftarrow ٢}{\text{نهـا}}\ \text{ق(س)} \times \underset{س \leftarrow ٢}{\text{نهـا}}\ \text{ق(س)} + \underset{س \leftarrow ٢}{\text{نهـا}}\ ٥$

$= (٤ \times ٤) + ٥$

$= ٢١$

يمكن تعميم قاعدتي الجمع والضرب في النظرية (٣) السابقة لتشمل أكثر من اقترانين :

١ $\underset{س\leftarrow أ}{\text{نهــا}}\left(ق_{١}(س)+ق_{٢}(س)+\ldots+ق_{ن}(س)\right)=\underset{س\leftarrow أ}{\text{نهــا}}ق_{١}(س)+\underset{س\leftarrow أ}{\text{نهــا}}ق_{٢}(س)+\ldots+\underset{س\leftarrow أ}{\text{نهــا}}ق_{ن}(س)$

٢ $\underset{س\leftarrow أ}{\text{نهــا}}\left(ق_{١}(س)\times ق_{٢}(س)\times\ldots\times ق_{ن}(س)\right)=\underset{س\leftarrow أ}{\text{نهــا}}ق_{١}(س)\times\underset{س\leftarrow أ}{\text{نهــا}}ق_{٢}(س)\times\ldots\times\underset{س\leftarrow أ}{\text{نهــا}}ق_{ن}(س)$

نتائج:

١ $\underset{س\leftarrow أ}{\text{نهــا}}\left(ق(س)\right)^{ن}=\left(\underset{س\leftarrow أ}{\text{نهــا}}ق(س)\right)^{ن}$ ، حيث ن عدد صحيح موجب .

٢ $\underset{س\leftarrow أ}{\text{نهــا}}س^{ن}=أ^{ن}$ حيث ن عدد صحيح موجب .

٣ إذا كان $ق(س)=أ_{ن}س^{ن}+أ_{ن-١}س^{ن-١}+\cdots+أ_{١}س+أ_{٠}$ اقتراناً كثير حدود فإن :

$\underset{س\leftarrow جـ}{\text{نهــا}}ق(س)=أ_{ن}جـ^{ن}+أ_{ن-١}جـ^{ن-١}+\cdots+أ_{١}جـ+أ_{٠}=ق(جـ)$.

أي أن نهاية كثير الحدود ق(س) عند س = جـ في مجاله تساوي ق(جـ) .

٤ إذا كان $م(س)=\frac{ق(س)}{هـ(س)}$ اقتراناً نسبياً حيث ق(س) ، هـ(س) كثيرا حدود، هـ(س) $\neq ٠$ فإن :

$\underset{س\leftarrow جـ}{\text{نهــا}}م(س)=\underset{س\leftarrow جـ}{\text{نهــا}}\frac{ق(س)}{هـ(س)}=\frac{ق(جـ)}{هـ(جـ)}=م(جـ)$ بشرط هـ(جـ) $\neq ٠$

أي أن نهاية الاقتران النسبي م(س) عند س = جـ في مجاله تساوي م(جـ) .

مثال (٤)

أوجد $\underset{س\leftarrow ٢}{\text{نهــا}}(٤س^{٣}+٥س+٦)$.

الحل:

الاقتران $ق(س)=٤س^{٣}+٥س+٦$ هو اقتران كثير حدود، إذن بالتعويض المباشر يكون :

$\underset{س\leftarrow ٢}{\text{نهــا}}(٤س^{٣}+٥س+٦)=٤(٢)^{٣}+٥(٢)+٦=٤٨$

مثال (٥)

أوجد $\lim_{س \leftarrow ٥} \frac{س^٢ + ٤س + ٢}{٢س + ٣}$.

الحل:

الاقتران هـ(س) = $\frac{س^٢ + ٤س + ٢}{٢س + ٣}$ هو اقتران نسبي مقامه لا يساوي صفراً عند س = ٥،

إذن بالتعويض المباشر يكون:

$$\lim_{س \leftarrow ٥} \frac{س^٢ + ٤س + ٢}{٢س + ٣} = \frac{(٥)^٢ + ٤(٥) + ٢}{٢(٥) + ٣}$$

$$= \frac{٤٧}{١٣}$$

نظرية (٤)

إذا كانت $\lim_{س \leftarrow أ}$ ق(س) = ل، وكان ن عدداً صحيحاً موجباً فإن:

$\lim_{س \leftarrow أ} \left(ق(س)\right)^{\frac{١}{ن}} = \left(\lim_{س \leftarrow أ} ق(س)\right)^{\frac{١}{ن}} = ل^{\frac{١}{ن}}$ ، بشرط أن تكون ل > ٠ عندما تكون (ن) زوجية.

أي أن $\lim_{س \leftarrow أ} \sqrt[ن]{ق(س)} = \sqrt[ن]{\lim_{س \leftarrow أ} ق(س)} = \sqrt[ن]{ل}$

مثال (٦)

أوجد كلاً من النهايتين التاليتين:

أ $\lim_{س \leftarrow ٤} \sqrt{س^٢ + ٩}$ ب $\lim_{س \leftarrow -١٠} \sqrt[٣]{س + ٢}$

الحل:

أ $\lim_{س \leftarrow ٤} \sqrt{س^٢ + ٩} = \sqrt{\lim_{س \leftarrow ٤} (س^٢ + ٩)} = \sqrt{١٦ + ٩} = ٥$

ب $\lim_{س \leftarrow -١٠} \sqrt[٣]{س + ٢} = \sqrt[٣]{\lim_{س \leftarrow -١٠} (س + ٢)} = \sqrt[٣]{-١٠ + ٢} = -٢$

مثال (٧)

يمثل الشكل (١-١١) منحنى الاقتران

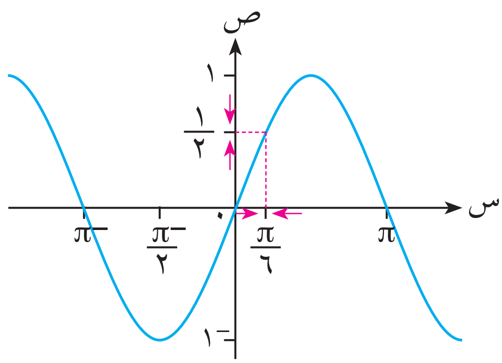
ق(س) = حا س ، أوجد $\underset{س \leftarrow \frac{\pi}{٦}}{\text{نهـا}}$ ق(س)

الحل:

من الرسم البياني المقابل نلاحظ أن :

$$\underset{س \leftarrow \frac{\pi}{٦}}{\text{نهـا}} \text{ق(س)} = \underset{س \leftarrow \frac{\pi}{٦}}{\text{نهـا}} \text{حا س}$$

$$= \frac{١}{٢}$$



الشكل (١-١١)

بوجه عام:

١ $\underset{س \leftarrow ا}{\text{نهـا}}$ جاس = جا ا ، لكل ا ∈ ح .

٢ $\underset{س \leftarrow ا}{\text{نهـا}}$ جتاس = جتا ا ، لكل ا ∈ ح .

تمارين (١-٢)

١ إذا كانت $\underset{س \leftarrow ٢}{\text{نهـا}}$ ق(س) = ٥ ، $\underset{س \leftarrow ٢}{\text{نهـا}}$ هـ(س) = ٣ ، $\underset{س \leftarrow ٢}{\text{نهـا}}$ ك (س) = -١ ، فأوجد قيمة كلٍ من النهايات التالية :

أ $\underset{س \leftarrow ٢}{\text{نهـا}} \left(\text{٢ق(س)} - \text{٣ هـ(س)}\right)$

ب $\underset{س \leftarrow ٢}{\text{نهـا}} \frac{\text{س ق (س)}}{\text{هـ (س)} + \text{ك(س)}}$

ج $\underset{س \leftarrow ٢}{\text{نهـا}} \sqrt{\text{ق}^{٢}\text{(س)} - \text{هـ}^{٢}\text{(س)}}$

٢ إذا كانت $\underset{س \leftarrow م}{\text{نهـا}}$ ق(س) = م، $\underset{س \leftarrow م}{\text{نهـا}}$ هـ(س) = ن حيث م ≠ ن، أوجد $\underset{س \leftarrow م}{\text{نهـا}} \frac{\text{م ق(س)} - \text{ن هـ (س)}}{\text{م} - \text{ن}}$.

٣ إذا علمت أن $\underset{س \leftarrow ا}{\text{نهـا}} (\text{س}^{٢} + \text{٥ س} + ٧) = ١$ ، فأوجد قيمة/ قيم ا .

٤ أوجد قيمة كل مما يلي :

أ $\underset{س \leftarrow ٢}{\text{نهـا}} \sqrt{\text{س}^{٢} + ٥}$

ب $\underset{س \leftarrow ٢}{\text{نهـا}} (\text{٣س}^{٢} - ٤)^{\frac{١}{٣}}$

ج $\underset{س \leftarrow ٣}{\text{نهـا}} \frac{(\text{س} - ٥)^{٣}}{(\text{٢س} - ٥)^{٤} + ٢}$

٥ إذا كان ق(س) = $\begin{cases} ٢س+١ &، س \leq ١ \\ س^{٢} - ٥ &، ١ < س < ٣ \\ \sqrt{س + ١٣} &، س > ٣ \end{cases}$ ، أوجد :

أ $\lim\limits_{س \leftarrow ١}$ ق(س)   ب $\lim\limits_{س \leftarrow ٣}$ ق(س)

٦ إذا كان ق(س) = $\begin{cases} س^{٢}+٥ &، س \leq ١ \\ مس &، س > ١ \end{cases}$ ، وكانت $\lim\limits_{س \leftarrow ١}$ ق(س) موجودة فما قيمة م؟

٧ إذا كان ق(س) = $\begin{cases} مس^{٢} - ٥ &، س < ٢ \\ ٢س + ن &، س \geq ٢ \end{cases}$

أوجد قيمة كلٍ من م، ن إذا علمت أن $\lim\limits_{س \leftarrow ٢}$ ق(س) = ٧ .

٨ أوجد قيمة كلٍ من النهايات التالية (إن وجدت) :

أ $\lim\limits_{س \leftarrow ٠}$ س [س]   ب $\lim\limits_{س \leftarrow \frac{١}{٢}}$ [٢س+٣]

جـ $\lim\limits_{س \leftarrow ٢} \frac{|س^{٢}-٤|}{س - ٢}$ د $\lim\limits_{س \leftarrow ٢} \frac{[س]}{س}$

٩ ليكن ق(س) = $\begin{cases} -١ &، س < ٠ \\ ١ &، س > ٠ \end{cases}$ ، هـ(س) = $\begin{cases} ١ &، س < ٠ \\ -١ &، س > ٠ \end{cases}$

أ بين أن $\lim\limits_{س \leftarrow ٠}$ ق(س) غير موجودة   ب بين أن $\lim\limits_{س \leftarrow ٠}$ هـ(س) غير موجودة

جـ أوجد قاعدة (ق × هـ) (س)   د أوجد $\lim\limits_{س \leftarrow ٠}$ (ق × هـ) (س)

هـ أوجد قاعدة $(\frac{ق}{هـ})$ (س)   و أوجد $\lim\limits_{س \leftarrow ٠}$ $(\frac{ق}{هـ})$ (س)

هل تتعارض النتيجة في كلٍ من الفرعين د ، و مع قاعدتي الضرب والقسمة في نظرية (٣)؟

١٠ إذا كانت $\lim\limits_{س \leftarrow ٥}$ ق(س) = ٧ فأوجد $\lim\limits_{س \leftarrow ٣}$ $\left(٤ ق(٢س - ١) + س^{٢}\right)$

١-٣ النهايات والصورة غير المُعَيَّنة $\frac{\text{صفر}}{\text{صفر}}$ (Limits & Indeterminate Forms)

وجدنا سابقاً أن قاعدة القسمة في النهايات تشترط ألا تكون نهاية المقام تساوي صفراً. غير أن هناك مقادير كسرية تكون نهاية كل من البسط والمقام فيها تساوي صفراً عند قيمة معينة لِـ س، أي تكون $\frac{\text{نهاية البسط}}{\text{نهاية المقام}} = \frac{٠}{٠}$، وهذه الصورة تسمى صورة غير معينة لأنها لا تعطي نتيجة عددية محددة، ولكن يمكن حساب نهايات مثل هذه الاقترانات الكسرية، أحياناً، بإجراء عمليات جبرية لوضع الاقتران الكسري على صورة مكافئة، تتجاوز الصورة غير المعينة، كما يتضح من الأمثلة الآتية:

مثال (١)

أوجد $\lim\limits_{\text{س} \leftarrow ١} \frac{\text{س}^٣ - \text{س}}{٢\text{س}^٢ - \text{س} - ١}$

الحل:

نلاحظ أن $\lim\limits_{\text{س} \leftarrow ١} (\text{س}^٣ - \text{س}) = ٠$ وكذلك $\lim\limits_{\text{س} \leftarrow ١} (٢\text{س}^٢ - \text{س} - ١) = ٠$

لذلك نلجأ إلى تحليل كل من البسط والمقام وكتابة الاقتران الكسري على صورة مكافئة كما يلي:

$$\lim\limits_{\text{س} \leftarrow ١} \frac{\text{س}^٣ - \text{س}}{٢\text{س}^٢ - \text{س} - ١} = \lim\limits_{\text{س} \leftarrow ١} \frac{\text{س}(\text{س}-١)(\text{س}+١)}{(\text{س}-١)(٢\text{س}+١)}$$

$$= \lim\limits_{\text{س} \leftarrow ١} \frac{\text{س}(\text{س}+١)}{(٢\text{س}+١)} \quad ، \quad \text{س} \neq ١$$

$$= \frac{٢}{٣}$$

مثال (٢)

أوجد $\lim\limits_{\text{س} \leftarrow ٥} \frac{\sqrt{\text{س}+٤} - ٣}{\text{س} - ٥}$.

الحل:

نلاحظ أن $\lim\limits_{\text{س} \leftarrow ٥} \left(\sqrt{\text{س}+٤} - ٣\right) = ٠$ وكذلك $\lim\limits_{\text{س} \leftarrow ٥} (\text{س}-٥) = ٠$

لذا نلجأ إلى كتابة الاقتران بصورة مكافئة، وذلك بضرب كل من البسط والمقام في مرافق البسط كما يلي:

$$\underset{س \leftarrow ٥}{نهـا} \frac{\sqrt{س+٤} - ٣}{س - ٥} = \underset{س \leftarrow ٥}{نهـا} \frac{\sqrt{س+٤} - ٣}{س - ٥} \times \frac{\sqrt{س+٤} + ٣}{\sqrt{س+٤} + ٣}$$

$$= \underset{س \leftarrow ٥}{نهـا} \frac{(س+٤) - ٩}{(س-٥)(\sqrt{س+٤} + ٣)}$$

$$= \underset{س \leftarrow ٥}{نهـا} \frac{(س - ٥)}{(س-٥)(\sqrt{س+٤} + ٣)}$$

$$= \underset{س \leftarrow ٥}{نهـا} \frac{١}{(\sqrt{س+٤} + ٣)} ، س \neq ٥$$

$$= \frac{١}{٦}$$

مثال (٣)

أوجد $\underset{س \leftarrow ٠}{نهـا} \frac{\frac{١}{س+٢} - \frac{١}{٢}}{س}$.

الحل:

لاحظ أن: $\underset{س \leftarrow ٠}{نهـا} \left(\frac{١}{س+٢} - \frac{١}{٢}\right) = ٠$ وكذلك $\underset{س \leftarrow ٠}{نهـا} س = ٠$

لذا نلجأ إلى كتابة الاقتران بصورة مكافئة، وذلك بتوحيد المقامات والاختصار كما يلي:

$$\underset{س \leftarrow ٠}{نهـا} \frac{\frac{١}{س+٢} - \frac{١}{٢}}{س} = \underset{س \leftarrow ٠}{نهـا} \frac{\frac{٢-(س+٢)}{٢(س+٢)}}{س}$$

$$= \underset{س \leftarrow ٠}{نهـا} \left(\frac{-س}{٢(س+٢)} \times \frac{١}{س}\right)$$

$$= \underset{س \leftarrow ٠}{نهـا} \frac{-١}{٢(س+٢)} \quad ، \quad س \neq ٠$$

$$= \frac{-١}{٤}$$

مثال (٤)

أوجد $\lim\limits_{س \to م} \frac{س^٣ - م^٣}{س - م}$.

الحل:

بالتعويض المباشر نلاحظ أن النهاية = $\frac{٠}{٠}$ ، وهذه صورة غير معينة؛ ولذا نلجأ إلى كتابة الكسر بصورة أخرى مكافئة، وذلك بالتحليل إلى العوامل :

$$\lim\limits_{س \to م} \frac{س^٣ - م^٣}{س - م} = \lim\limits_{س \to م} \frac{(س - م)(س^٢ + م س + م^٢)}{(س - م)}$$

$$= \lim\limits_{س \to م} (س^٢ + م س + م^٢) \quad ، \quad س \neq م$$

$$= ٣م^٢$$

تعميم:

$\lim\limits_{س \to م} \frac{س^ن - م^ن}{س - م} = ن م^{ن-١}$ حيث ن عدد صحيح موجب .

مثال (٥)

أوجد $\lim\limits_{س \to ٣} \frac{(س + ٢)^٤ - ٦٢٥}{س - ٣}$.

الحل:

بفرض أن ص = س + ٢ ، تكون س = ص − ٢

وعندما س ← ٣ فإن ص ← ٥

$$\therefore \lim\limits_{س \to ٣} \frac{(س + ٢)^٤ - ٦٢٥}{س - ٣} = \lim\limits_{ص \to ٥} \frac{ص^٤ - ٥^٤}{ص - ٥} .$$

$$= ٤ \times ٥^٣$$

$$= ٤ \times ١٢٥$$

$$= ٥٠٠$$

تمارين (١-٣)

١ أوجد قيمة كلٍ من النهايات التالية :

أ $\lim\limits_{س \to ١} \dfrac{س + ١}{س^{٢} - س - ٢}$

ب $\lim\limits_{س \to ٢} \dfrac{س^{٢} + ٢س - ٨}{س^{٢} - ٢س}$

جـ $\lim\limits_{س \to ٥} \dfrac{\dfrac{١}{س + ٢} - \dfrac{١}{٧}}{س - ٥}$

د $\lim\limits_{س \to ٤} \dfrac{س - ٤}{\sqrt{س} - ٢}$

هـ $\lim\limits_{س \to ٠} \dfrac{س}{\sqrt{٩ + س} - ٣}$

و $\lim\limits_{س \to -٢} \dfrac{س^{٣} + ٢س^{٢} - س - ٢}{س^{٢} - ٤}$

ز $\lim\limits_{س \to ٠} \dfrac{\sqrt{١ + س} - \sqrt{١ - س}}{س}$

ح $\lim\limits_{م \to -٢} \dfrac{م^{٣} + ٨}{م + ٢}$

ط $\lim\limits_{س \to ١٥} \dfrac{\sqrt{س - ٦} - ٣}{س - ١٥}$

ك $\lim\limits_{س \to ٣} \dfrac{س^{٤} - ٨١}{س - ٣}$

ل $\lim\limits_{س \to \sqrt{٢}} \dfrac{س^{٦} - ٨}{س^{٤} - ٤}$

م $\lim\limits_{س \to ٤} \dfrac{(س - ١)^{٥} - ٢٤٣}{س - ٤}$

٢ أوجد $\lim\limits_{هـ \to ٠} \dfrac{ق(٢ + هـ) - ق(٢)}{هـ}$ في كل من الحالتين التاليتين :

أ $ق(س) = س^{٢}$

ب $ق(س) = \sqrt{س}$

٣ ليكن $ق(س) = \begin{cases} \dfrac{س^{٢} - ٤}{س - ٢} &،\quad س \le ٢ \\ أ\,س + ١ &،\quad س > ٢ \end{cases}$

وكانت $\lim\limits_{س \to ٢} ق(س)$ موجودة، فأوجد قيمة أ

١-٤ النهايات والاقترانات المثلثية (Limits & Trigonometric Functions)

تعتمد دراستنا في هذا البند على نهاية الاقتران ق(س) = $\frac{\text{جاس}}{\text{س}}$ عندما س ← ٠ حيث س بالتقدير الدائري؛ وذلك لأهميتها لاحقاً في نهايات الاقترانات الدائرية ومشتقاتها.

بالتعويض المباشر في الاقتران $\frac{\text{جاس}}{\text{س}}$ نحصل على الصورة غير المعينة $\frac{٠}{٠}$، ولا يمكننا استنتاج النهاية باستخدام الطرق الجبرية في البند السابق.

الجدول التالي يوضح سلوك الاقتران $\frac{\text{جاس}}{\text{س}}$ حول س = ٠

س	١	٠,١	٠,٠١	٠,٠٠١	←...	٠	...→	-٠,٠٠١	-٠,٠١	-٠,١	-١
$\frac{\text{جاس}}{\text{س}}$	٠,٨٤١٤٧	٠,٩٩٨٣٣	٠,٩٩٩٩٨	٠,٩٩٩٩٩٩٨٣	←...	١	...→	٠,٩٩٩٩٩٩٨٣	٠,٩٩٩٩٨	٠,٩٩٨٣٣	٠,٨٤١٤٧

نلاحظ من الجدول أن $\frac{\text{جاس}}{\text{س}}$ تقترب من ١ عندما س ← ٠ ويوضح هذا النظرية التالية التي سنكتفي بذكرها دون برهان.

نظرية:

$\lim_{\text{س} \to ٠} \frac{\text{جاس}}{\text{س}} = ١$ ، س بالتقدير الدائري

مثال (١)

أوجد $\lim_{\text{س} \to ٠} \frac{\text{جا٢س}}{\text{س}}$

الحل:

$\lim_{\text{س} \to ٠} \frac{\text{جا٢س}}{\text{س}} = \lim_{\text{س} \to ٠} ٢ \times \frac{\text{جا٢س}}{\text{٢س}} = ٢ \lim_{\text{س} \to ٠} \frac{\text{جا٢س}}{\text{٢س}}$

$= ٢ \lim_{\text{هـ} \to ٠} \frac{\text{جاهـ}}{\text{هـ}}$ ، حيث هـ = ٢س. (لاحظ أن هـ ← ٠ عندما س ← ٠)

$= ٢ \times ١ = ٢$

حل آخر: $\lim_{\text{س} \to ٠} \frac{\text{جا٢س}}{\text{س}} = \lim_{\text{س} \to ٠} \frac{\text{٢جاس جتاس}}{\text{س}}$

$= ٢ \times \lim_{\text{س} \to ٠} \frac{\text{جاس}}{\text{س}} \times \lim_{\text{س} \to ٠} \text{جتاس}$

$= ٢ \times ١ \times ١ = ٢$

نتيجة:

$$\lim_{س \leftarrow ٠} \frac{ظا\, س}{س} = ١$$ ، (س بالتقدير الدائري)

البرهان:

$$\lim_{س \leftarrow ٠} \frac{ظا\, س}{س} = \lim_{س \leftarrow ٠} \frac{١}{س} \times \frac{جا\, س}{جتاس}$$

$$= \lim_{س \leftarrow ٠} \frac{جا\, س}{س} \times \lim_{س \leftarrow ٠} \frac{١}{جتاس}$$

$$= ١ \times ١ = ١$$

تعميم:

١ $\lim_{س \leftarrow ٠} \frac{جا\, ٢س}{س} = ٢$

٢ $\lim_{س \leftarrow ٠} \frac{ظا\, ٢س}{س} = ٢$

مثال (٢)

أوجد $\lim_{س \leftarrow ٠} \frac{جا٣س}{جا٥س}$.

الحل:

$$\lim_{س \leftarrow ٠} \frac{جا٣س}{جا٥س} = \lim_{س \leftarrow ٠} \frac{\frac{جا٣س}{س}}{\frac{جا٥س}{س}}$$ (بقسمة كلٍ من البسط والمقام على س)

$$= \frac{\lim_{س \leftarrow ٠} \frac{جا٣س}{س}}{\lim_{س \leftarrow ٠} \frac{جا٥س}{س}}$$

$$= \frac{٣}{٥}$$

مثال (٣)

أوجد $\lim\limits_{\text{س} \leftarrow ٠} \dfrac{\text{جتاس} - ١}{\text{س}}$.

الحل:

$$\lim_{\text{س} \leftarrow ٠} \frac{\text{جتاس} - ١}{\text{س}} = \lim_{\text{س} \leftarrow ٠} \frac{(١ - ٢\,\text{جا}^{٢} \frac{\text{س}}{٢}) - ١}{\text{س}}$$

$$= \lim_{\text{س} \leftarrow ٠} \frac{-٢\,\text{جا}^{٢} \frac{\text{س}}{٢}}{\text{س}}$$

$$= -٢ \lim_{\text{س} \leftarrow ٠} \frac{\text{جا} \frac{\text{س}}{٢}}{\text{س}} \times (\text{جا} \frac{\text{س}}{٢})$$

$$= -٢ \lim_{\text{س} \leftarrow ٠} \frac{\text{جا} \frac{١}{٢}\text{س}}{\text{س}} \times \lim_{\text{س} \leftarrow ٠} (\text{جا} \frac{\text{س}}{٢})$$

$$= -٢ \times \frac{١}{٢} \times \text{صفر} = \text{صفر} .$$

ملاحظة : يمكن حل المثال بطريقة أخرى ، وذلك بضرب كلٍ من البسط والمقام بالمقدار (جتا س + ١)

مثال (٤)

أوجد $\lim\limits_{\text{س} \leftarrow ٠} \dfrac{\text{جا٥س} + \text{جا٣س}}{\text{جا٨س} + \text{جا٢س}}$.

الحل:

$$\lim_{\text{س} \leftarrow ٠} \frac{\text{جا٥س} + \text{جا٣س}}{\text{جا٨س} + \text{جا٢س}} = \lim_{\text{س} \leftarrow ٠} \frac{\frac{\text{جا٥س}}{\text{س}} + \frac{\text{جا٣س}}{\text{س}}}{\frac{\text{جا٨س}}{\text{س}} + \frac{\text{جا٢س}}{\text{س}}}$$

(بقسمة كل من البسط والمقام على س)

$$= \frac{\lim\limits_{\text{س} \leftarrow ٠} \frac{\text{جا٥س}}{\text{س}} + \lim\limits_{\text{س} \leftarrow ٠} \frac{\text{جا٣س}}{\text{س}}}{\lim\limits_{\text{س} \leftarrow ٠} \frac{\text{جا٨س}}{\text{س}} + \lim\limits_{\text{س} \leftarrow ٠} \frac{\text{جا٢س}}{\text{س}}}$$

$$= \frac{٥ + ٣}{٨ + ٢} = \frac{٨}{١٠} = \frac{٤}{٥}$$

مثال (٥)

ليكن ق(س) = $\begin{cases} \dfrac{٢س \text{ جا}(\sqrt{س} - ١)}{س - ١} & ، \quad س > ١ \\ [س] + ١ & ، \quad س \leqslant ١ \end{cases}$ ، أوجد $\lim\limits_{س \leftarrow ١}$ ق(س) .

الحل:

يمكن إعادة كتابة قاعدة ق(س) في جوار س= ١ كالتالي :

$$ق(س) = \begin{cases} \dfrac{٢س \text{ جا}(\sqrt{س} - ١)}{س - ١} & ، \quad س > ١ \\ ١ & ، \quad ٠ \leqslant س < ١ \\ ٢ & ، \quad س = ١ \end{cases}$$

أ $\lim\limits_{س \leftarrow ١^+}$ ق(س) = $\lim\limits_{س \leftarrow ١^+} \dfrac{٢س \text{ جا}(\sqrt{س} - ١)}{س - ١}$

$= \lim\limits_{س \leftarrow ١^+} \dfrac{٢س \text{ جا}(\sqrt{س} - ١)}{(\sqrt{س} - ١)(\sqrt{س} + ١)}$

$= \lim\limits_{س \leftarrow ١^+} \dfrac{٢س}{\sqrt{س} + ١} \times \lim\limits_{هـ \leftarrow ٠^+} \dfrac{\text{جا هـ}}{هـ}$ ، حيث هـ = $\sqrt{س} - ١$

$= ١ \times ١ = ١$

ب $\lim\limits_{س \leftarrow ١^-}$ ق(س) = $\lim\limits_{س \leftarrow ١^-} ١ = ١$

$\therefore \lim\limits_{س \leftarrow ١}$ ق(س) = ١

مثال (٦)

أوجد $\lim\limits_{س \leftarrow ١} \dfrac{\text{جا } \pi س}{١ - س}$.

الحل:

$\lim\limits_{س \leftarrow ١} \dfrac{\text{جا } \pi س}{١ - س} = \lim\limits_{س \leftarrow ١} \dfrac{\text{جا}(\pi - \pi س)}{١ - س}$ (لأن جيب أي زاوية = جيب المكملة)

$= \lim\limits_{س \leftarrow ١} \dfrac{\text{جا } \pi (١ - س)}{١ - س}$

$= \lim\limits_{هـ \leftarrow ٠} \dfrac{\text{جا } \pi هـ}{هـ}$ حيث هـ = ١ − س .

$= \pi$

تمارين (١-٤)

١ أوجد كلاً من النهايات التالية :

أ $\underset{\text{س} \leftarrow ٠}{\text{نهـا}} \dfrac{\text{جا}٣\text{س}}{٢\text{س}}$

ب $\underset{\text{س} \leftarrow ٠^{+}}{\text{نهـا}} \dfrac{\text{جا س}}{\sqrt{\text{س}} + ١}$

جـ $\underset{\text{س} \leftarrow ٠}{\text{نهـا}} \dfrac{\text{س}}{\text{ظا س}}$

د $\underset{\text{س} \leftarrow ٠}{\text{نهـا}} \dfrac{\text{ظا ٣ س}}{٥\text{س}}$

هـ $\underset{\text{س} \leftarrow ٠}{\text{نهـا}} \dfrac{\text{ظا ٥س}}{\text{ظا ٢ س}}$

و $\underset{\text{س} \leftarrow ٠}{\text{نهـا}} \dfrac{\text{س}^{٢}}{١ - \text{جتا}^{٢}\text{س}}$

ز $\underset{\text{س} \leftarrow ٠}{\text{نهـا}} \dfrac{\text{س}^{٢}}{١ - \text{جتاس}}$

ح $\underset{\text{س} \leftarrow ٠}{\text{نهـا}} \dfrac{١ - \text{جتا ٤ س}}{\text{جتا ٨س} - ١}$

ط $\underset{\text{س} \leftarrow ٠}{\text{نهـا}} \dfrac{٢\text{س} + \text{س جا س}}{\text{س}}$

ي $\underset{\text{س} \leftarrow ٠}{\text{نهـا}} \dfrac{\text{س جاس}}{١ - \text{جتاس}}$

ك $\underset{\text{س} \leftarrow ٠}{\text{نهـا}} \text{ظا ٢ س قتا ٥ س}$

ل $\underset{\text{س} \leftarrow -٢}{\text{نهـا}} \dfrac{٥\ \text{س} + ١٠}{\text{جا (س} + ٢)}$

م $\underset{\text{س} \leftarrow ٠}{\text{نهـا}} \dfrac{١٠\ \text{س} + ٢\text{س}^{٢}}{٧\text{جاس}}$

ن $\underset{\text{س} \leftarrow ١}{\text{نهـا}} \dfrac{\text{جا (س} - ١)}{٢\text{س}^{٢} + \text{س} - ٣}$

س $\underset{\text{س} \leftarrow ٠}{\text{نهـا}} \dfrac{١ - \text{جتا ٢ س} + \text{س جا س}}{\text{جا}^{٢}\text{س}}$

ع $\underset{\text{س} \leftarrow ٠}{\text{نهـا}} \dfrac{\text{جا (جاس)}}{\text{س}}$

٢ إذا كان $\text{ق(س)} = \begin{cases} \dfrac{\text{جا ٦س}}{\text{ظا ٣س}} & \text{، س} > ٠ \\ [\text{س} + ٣] & \text{، س} \leq ٠ \end{cases}$ أوجد $\underset{\text{س} \leftarrow ٠}{\text{نهـا}} \text{ق(س)}$

٣ أوجد $\underset{\text{س} \leftarrow -٢}{\text{نهـا}} \dfrac{\text{جا } \pi \text{ س}}{\text{س} + ٢}$

١-٥ نهاية الاقتران عندما س ← ∓∞ (Limits at Infinity)

تعرفنا سابقاً نهاية الاقتران ق(س) عندما تقترب س من عدد حقيقي معين أ ، وسندرس في هذا البند نهاية الاقتران ق(س) عندما تزداد س بقيم موجبة وبلا حدود، أي عندما تقترب س من مالانهاية (∞)، وكذلك عندما تتناقص س بقيم سالبة وبلا حدود، أي عندما تقترب س من سالب مالانهاية (−∞).

وستقتصر دراستنا في هذا البند على الاقترانات النسبية فقط.

مثال (١)

ليكن $\text{ق}(\text{س}) = \frac{1}{\text{س}}$ ، $\text{س} \neq 0$

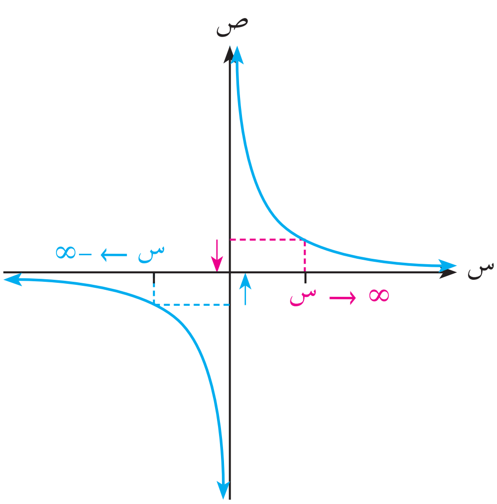
أ ماذا يحدث لقيم ق(س) عندما تقترب س من ∞ ؟

ب ماذا يحدث لقيم ق(س) عندما تقترب س من −∞ ؟

الحل:

أ نلاحظ من الشكل (١-١٢) أنه كلما زادت قيم س أكثر فأكثر بقيم موجبة اقتربت قيم ق(س) من الصفر، لذلك نقول إن نهاية ق(س) عندما تقترب س من مالانهاية تساوي صفراً؛ وبالرموز:

$$\underset{\text{س}\to\infty}{\text{نهـا}}\ \text{ق}(\text{س}) = \underset{\text{س}\to\infty}{\text{نهـا}}\ \frac{1}{\text{س}} = \text{صفر}$$



الشكل (١-١٢)

ب كذلك نلاحظ من الشكل أنه كلما صغرت قيم س أكثر فأكثر بقيم سالبة اقتربت قيم ق(س) من الصفر؛ ولذلك نقول إن: $\underset{\text{س}\to-\infty}{\text{نهـا}}\ \frac{1}{\text{س}} = \text{صفر}$

مثال (٢)

ليكن $\text{ق}(\text{س}) = \text{س}^3$ ، أوجد:

أ $\underset{\text{س}\to\infty}{\text{نهـا}}\ \text{ق}(\text{س})$ ب $\underset{\text{س}\to-\infty}{\text{نهـا}}\ \text{ق}(\text{س})$

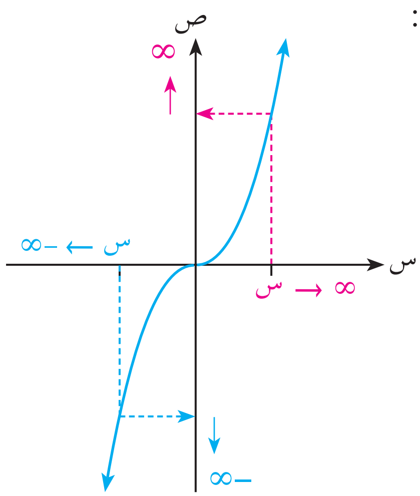
الحل:

أ نلاحظ من الشكل (١-١٣) أنه عندما تقترب س من مالانهاية، فإن قيم ق(س) المناظرة تزداد أكثر فأكثر، ويمكن جعل قيم ق(س) أكبر من أي عدد حقيقي موجب يمكن تصوره، وذلك باختيار قيم س كبيرة بدرجة كافية. ونقول في هذه الحالة إن نهاية الاقتران ق(س) عندما تقترب س من مالانهاية تساوي مالانهاية؛ وبالرموز:

$$\underset{\text{س} \leftarrow \infty}{\text{نهـا}}\ \text{ق(س)} = \underset{\text{س} \leftarrow \infty}{\text{نهـا}}\ \text{س}^{٣} = \infty$$

ب وبالمثل يمكننا التوصل إلى أن نهاية الاقتران ق(س) عندما س تقترب من سالب مالانهاية هي سالب مالانهاية؛ وبالرموز:

$$\underset{\text{س} \leftarrow -\infty}{\text{نهـا}}\ \text{ق(س)} = \underset{\text{س} \leftarrow -\infty}{\text{نهـا}}\ \text{س}^{٣} = -\infty$$

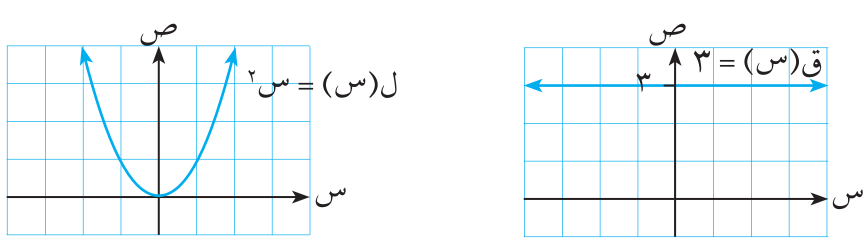


الشكل (١-١٣)

مثال (٣)

استخدم الشكل (١-١٤) التالي في إيجاد:

أ $\underset{\text{س} \leftarrow \mp\infty}{\text{نهـا}}\ \text{ق(س)}$ ب $\underset{\text{س} \leftarrow \mp\infty}{\text{نهـا}}\ \text{ل(س)}$



الشكل (١-١٤)

الحل:

من منحنيي الاقترانين يتضح أن:

أ $\underset{\text{س} \leftarrow \infty}{\text{نهـا}}\ \text{ق(س)} = ٣$ ، $\underset{\text{س} \leftarrow -\infty}{\text{نهـا}}\ \text{ق(س)} = ٣$

ب $\underset{\text{س} \leftarrow \infty}{\text{نهـا}}\ \text{ل(س)} = \infty$ ، $\underset{\text{س} \leftarrow -\infty}{\text{نهـا}}\ \text{ل(س)} = \infty$

بوجه عام :

قاعدة

١ $\underset{س \to \infty}{\text{نهـا}}$ جـ = جـ ، $\underset{س \to -\infty}{\text{نهـا}}$ جـ = جـ ، حيث جـ ثابت

٢ إذا كان ن عدداً صحيحاً موجباً فإن :

(أ) $\underset{س \to \infty}{\text{نهـا}}$ $س^{ن} = \infty$

(ب) $\underset{س \to -\infty}{\text{نهـا}}$ $س^{ن} = \begin{cases} \infty & \text{، إذا كانت ن زوجية} \\ -\infty & \text{، إذا كانت ن فردية} \end{cases}$

ملاحظة:

نظرية النهايات السابقة في صفحة ١٢ والمتعلقة بنهاية مجموع أو فرق أو ضرب أو قسمة اقترانين عندما س ← أ ، تبقى صحيحة عندما نضع س ← $\mp\infty$ بدلاً من س ← أ ، مع مراعاة القواعد التالية :

(أ) $\infty \mp$ جـ $= \infty$ ، جـ ثابت

(ب) $-\infty \mp$ جـ $= -\infty$ ، جـ ثابت

(جـ) جـ $\times \infty = \begin{cases} \infty & \text{، عندما جـ} > ٠ \\ -\infty & \text{، عندما جـ} < ٠ \end{cases}$

(د) جـ $\times -\infty = \begin{cases} -\infty & \text{، عندما جـ} > ٠ \\ \infty & \text{، عندما جـ} < ٠ \end{cases}$

(هـ) $\infty \times \infty = \infty$

(و) $\infty + \infty = \infty$

أما الصور التالية فهي صور غير معينة (شأنها في ذلك شأن الصورة $\frac{\text{صفر}}{\text{صفر}}$)

(أ) $\infty - \infty$ (ب) $٠ \times \infty$ (جـ) $\frac{\infty}{\infty}$

مثال (٤)

أوجد $\underset{س \to \infty}{\text{نهـا}} \left(\frac{١}{س} + ٥\right)$

الحل:

$\underset{س \to \infty}{\text{نهـا}} \left(\frac{١}{س} + ٥\right) = \underset{س \to \infty}{\text{نهـا}} \frac{١}{س} + \underset{س \to \infty}{\text{نهـا}} ٥ = ٠ + ٥ = ٥$

مثال (٥)

أوجد $\underset{س \to -\infty}{\text{نهـا}} \frac{١}{س^{٣}}$

الحل:

$\underset{س \to -\infty}{\text{نهـا}} \frac{١}{س^{٣}} = \underset{س \to -\infty}{\text{نهـا}} \frac{١}{س} \times \underset{س \to -\infty}{\text{نهـا}} \frac{١}{س} \times \underset{س \to -\infty}{\text{نهـا}} \frac{١}{س}$

$=$ صفر $\times$ صفر $\times$ صفر $=$ صفر

بوجه عام:

قاعدة:

$\lim\limits_{س \leftarrow \infty} \frac{أ}{س^{ن}} = ٠$ ، $\lim\limits_{س \leftarrow -\infty} \frac{أ}{س^{ن}} = ٠$ ، حيث ن عدد صحيح موجب ، أ ثابت

سندرس فيما يلي نهايات اقترانات نسبية عندما س ← ∓∞ ، ويمكننا حساب ذلك بإخراج أكبر قوى س كعامل مشترك في البسط وكذلك أكبر قوى س كعامل مشترك في المقام، ثم الاختصار كما يتضح من الأمثلة الآتية:

مثال (٦)

أوجد $\lim\limits_{س \leftarrow \infty} \frac{٢س^{٢} + ٥س - ٧}{٣س^{٢} - ٥}$

الحل:

$$\lim_{س \leftarrow \infty} \frac{٢س^{٢} + ٥س - ٧}{٣س^{٢} - ٥} = \lim_{س \leftarrow \infty} \frac{س^{٢}\left(٢ + \frac{٥}{س} - \frac{٧}{س^{٢}}\right)}{س^{٢}\left(٣ - \frac{٥}{س^{٢}}\right)}$$

$$= \lim_{س \leftarrow \infty} \frac{٢ + \frac{٥}{س} - \frac{٧}{س^{٢}}}{٣ - \frac{٥}{س^{٢}}}$$

$$= \frac{\lim\limits_{س \leftarrow \infty} ٢ + \lim\limits_{س \leftarrow \infty} \frac{٥}{س} - \lim\limits_{س \leftarrow \infty} \frac{٧}{س^{٢}}}{\lim\limits_{س \leftarrow \infty} ٣ - \lim\limits_{س \leftarrow \infty} \frac{٥}{س^{٢}}}$$

$$= \frac{٢ + ٠ - ٠}{٣ - ٠} = \frac{٢}{٣}$$

مثال (٧)

أوجد $\lim\limits_{س \leftarrow -\infty} \frac{٥س^{٢} + ٧س}{٢س^{٣} - ٥}$

الحل:

$$\lim_{س \leftarrow -\infty} \frac{٥س^{٢} + ٧س}{٢س^{٣} - ٥} = \lim_{س \leftarrow -\infty} \frac{س^{٢}\left(٥ + \frac{٧}{س}\right)}{س^{٣}\left(٢ - \frac{٥}{س^{٣}}\right)}$$

$$= \underset{\text{س} \to -\infty}{\text{نهـا}} \frac{1}{\text{س}} \times \underset{\text{س} \to -\infty}{\text{نهـا}} \frac{5 + \frac{7}{\text{س}}}{2 - \frac{5}{\text{س}^3}}$$

$$= \text{صفر} \times \frac{5}{2}$$

$$= \text{صفر}$$

مثال (٨)

أوجد $\underset{\text{س} \to \infty}{\text{نهـا}} \frac{5\text{س}^3 - \text{س}^2 + 7\text{س}}{6 - 2\text{س}}$

الحل:

$$\underset{\text{س} \to \infty}{\text{نهـا}} \frac{5\text{س}^3 - \text{س}^2 + 7\text{س}}{6 - 2\text{س}} = \underset{\text{س} \to \infty}{\text{نهـا}} \frac{\text{س}^3 \left(5 - \frac{1}{\text{س}} + \frac{7}{\text{س}^2}\right)}{\text{س} \left(\frac{6}{\text{س}} - 2\right)}$$

$$= \underset{\text{س} \to \infty}{\text{نهـا}} \text{س}^2 \times \underset{\text{س} \to \infty}{\text{نهـا}} \frac{5 - \frac{1}{\text{س}} + \frac{7}{\text{س}^2}}{\left(\frac{6}{\text{س}} - 2\right)}$$

$$= \infty \times \frac{5}{-2}$$

$$= -\infty$$

مثال (٩)

أوجد $\underset{\text{س} \to \infty}{\text{نهـا}} (\text{س}^3 - 5\text{س} + 7)$

الحل:

$$\underset{\text{س} \to \infty}{\text{نهـا}} (\text{س}^3 - 5\text{س} + 7) = \underset{\text{س} \to \infty}{\text{نهـا}} \text{س}^3 \left(1 - \frac{5}{\text{س}^2} + \frac{7}{\text{س}^3}\right)$$

$$= \underset{\text{س} \to \infty}{\text{نهـا}} \text{س}^3 \times \underset{\text{س} \to \infty}{\text{نهـا}} \left(1 - \frac{5}{\text{س}^2} + \frac{7}{\text{س}^3}\right)$$

$$= \infty \times 1$$

$$= \infty$$

تمارين (١-٥)

١ أوجد كلاً من النهايات التالية :

١ $\lim\limits_{س \to \infty} (س^٣ - ٥س^٢ + ١)$

٢ $\lim\limits_{س \to -\infty} (س^٣ - ٥س - ١)$

٣ $\lim\limits_{ع \to -\infty} \frac{٥}{٣ + ع}$

٤ $\lim\limits_{س \to \infty} \frac{٢س + ٤}{٥س + ٢}$

٥ $\lim\limits_{س \to -\infty} \frac{س - ٢}{س^٢ - ٥س + ٦}$

٦ $\lim\limits_{س \to -\infty} \frac{٥س^٣}{٢س^٢ - ٥س}$

٧ $\lim\limits_{س \to -\infty} \frac{٢ - ٥س^٢}{س - ٣س^٢}$

٨ $\lim\limits_{س \to \infty} \frac{٤س^٣ + ١}{٥س^٣ - ١}$

٢ إذا كان $ق(س) = \frac{أ س}{ب س + ١}$

وكانت $\lim\limits_{س \to \infty} ق(س) = \frac{٢}{٣}$ ، $\lim\limits_{س \to ١} ق(س) = \frac{٤}{٧}$

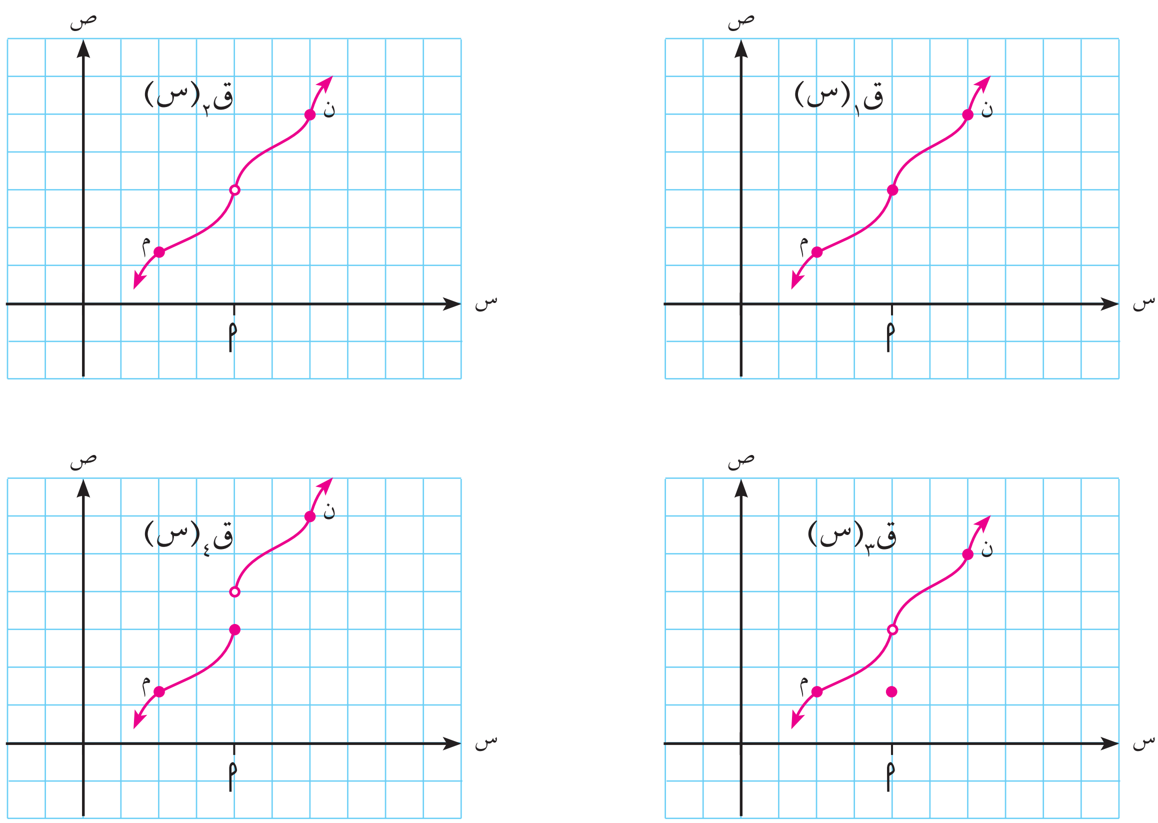
أوجد الثابتين أ ، ب .

٦-١ الاتصال (Continuity)

درسنا سابقاً نهاية الاقتران عند نقطة دون أي اعتبار خاص لقيمة الاقتران عند تلك النقطة، وفي هذا البند سندرس قيمة الاقتران ونهايته معاً.

اتصال الاقتران عند نقطة:

يوضح الشكل (١-١٥) منحنيات الاقترانات ق$_{١}$(س)، ق$_{٢}$(س)، ق$_{٣}$(س)، ق$_{٤}$(س) حول النقطة على المنحنى حيث س = أ :



الشكل (١-١٥)

نلاحظ أنه، في حالة الاقتران ق$_{١}$(س)، يمكن رسم جزء المنحنى الواقع بين النقطتين م، ن المجاورتين للنقطة عند س = أ دون الحاجة لرفع سن القلم عن الورقة؛ بينما لا نستطيع ذلك في حالة الاقترانات ق$_{٢}$(س)، ق$_{٣}$(س)، ق$_{٤}$(س).

نقول إن الاقتران ق$_{١}$(س) اقترانٌ متصل عند س= أ ، في حين أن الاقترانات ق$_{٢}$(س)، ق$_{٣}$(س)، ق$_{٤}$(س) اقترانات منفصلة أو غير متصلة عند س = أ .

تعريف:

يكون الاقتران ق(س) متصلاً عند س = أ في مجاله إذا وفقط إذا كانت $\lim_{س \leftarrow أ}$ ق(س) = ق(أ)

وهذا يعني أن:

الاقتران ق(س) يكون متصلاً عند س = أ إذا وفقط إذا تحققت الشروط الثلاثة التالية معاً:

١ ق(س) معرف عند س = أ

٢ $\lim_{س \leftarrow أ}$ ق(س) موجودة

٣ $\lim_{س \leftarrow أ}$ ق(س) = ق(أ)

وبالرجوع إلى منحنيات الاقترانات $ق_1$(س)، $ق_2$(س)، $ق_3$(س)، $ق_4$(س)، في الشكل (١-١٥) السابق، نلاحظ أن:

١ $ق_1$(س) متصل عند س = أ لأن $\lim_{س \leftarrow أ}$ $ق_1$(س) = $ق_1$(أ).

٢ $ق_2$(س) غير متصل عند س = أ وذلك لأن $ق_2$(س) غير معرف عند س = أ.

٣ $ق_3$(س) غير متصل عند س = أ وذلك لأن $\lim_{س \leftarrow أ}$ $ق_3$(س) $\neq$ $ق_3$(أ).

٤ $ق_4$(س) غير متصل عند س = أ وذلك لأن $\lim_{س \leftarrow أ}$ $ق_4$(س) غير موجودة.

مثال (١)

ابحث في اتصال الاقتران ق(س) = $\begin{cases} س^2 &، س \leqslant ١ \\ س+١ &، س > ١ \end{cases}$

أ عند س = ٠ ب عند س = ١

الحل:

أ ق(٠) = ٠

$\lim_{س \leftarrow ٠}$ ق(س) = $\lim_{س \leftarrow ٠}$ $س^2$ = صفر

بما أن $\lim_{س \leftarrow ٠}$ ق(س) = ق(٠)

∴ ق(س) متصل عند س = ٠

ب ق(١) = ١

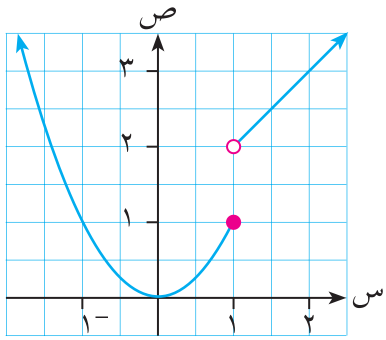
$\underset{\text{س}\to ١^{+}}{\text{نهـا}}$ ق(س) = $\underset{\text{س}\to ١^{+}}{\text{نهـا}}$ (س+١) = ٢

$\underset{\text{س}\to ١^{-}}{\text{نهـا}}$ ق(س) = $\underset{\text{س}\to ١^{-}}{\text{نهـا}}$ $\text{س}^{٢}$ = ١

⇐ $\underset{\text{س}\to ١}{\text{نهـا}}$ ق(س) غير موجودة.

أي أن الاقتران ق(س) غير متصل عند س = ١

انظر منحنى الاقتران ق(س) في الشكل (١-١٦).



الشكل (١-١٦)

مثال (٢)

ابحث في اتصال الاقتران ق(س) = $\begin{cases} \dfrac{\text{س}^{٢}-٤}{\text{س}-٢} &، \text{س} \neq ٢ \\ ٥ &، \text{س} = ٢ \end{cases}$ ، عند س = ٢

الحل:

$\underset{\text{س}\to ٢}{\text{نهـا}}$ ق(س) = $\underset{\text{س}\to ٢}{\text{نهـا}} \dfrac{\text{س}^{٢}-٤}{\text{س}-٢}$

= $\underset{\text{س}\to ٢}{\text{نهـا}} \dfrac{(\text{س}+٢)(\text{س}-٢)}{\text{س}-٢}$

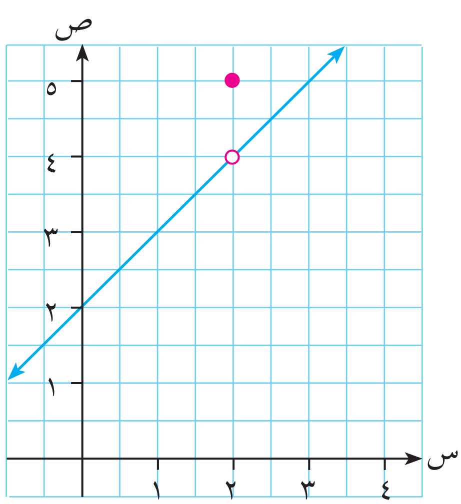
= $\underset{\text{س}\to ٢}{\text{نهـا}}$ (س+٢) = ٤

ق(٢) = ٥

وبما أن $\underset{\text{س}\to ٢}{\text{نهـا}}$ ق(س) ≠ ق(٢)

∴ ق(س) غير متصل (منفصل) عند س = ٢

لاحظ الشكل (١-١٧)



الشكل (١-١٧)

ملاحظة:

نلاحظ في المثال السابق أن ق(س) غير متصل عند س = ٢ لأن $\underset{\text{س}\to ٢}{\text{نهـا}}$ ق(س) ≠ ق(٢). ولكن إذا أعدنا تعريف الاقتران عند س = ٢ ليصبح ق(٢) = ٤ فإن ق(س) يصبح متصلاً عند س = ٢.

مثال (٣)

أوجد قيمة جـ التي تجعل الاقتران ق(س) = $\begin{cases} ٢س + جـ &، س \leqslant ١ \\ س^٢ + ٣ &، س > ١ \end{cases}$

متصلاً عند س = ١ .

الحل:

حتى يكون الاقتران ق(س) متصلاً عند س = ١ ، يجب أن تكون $\underset{س \leftarrow ١}{\text{نهـــا}}$ ق(س) موجودة وتساوي ق(١) .

$\Leftarrow$ $\underset{س \leftarrow ١^+}{\text{نهـــا}}$ ق(س) = $\underset{س \leftarrow ١^-}{\text{نهـــا}}$ ق(س) = ق(١)

$\therefore$ ٤ = ٢ + جـ ، ومنها جـ = ٢

نظريات الاتصال

بالاعتماد على نظريات النهايات السابقة يمكن التوصل إلى النظريات التالية التي تساعدنا في دراسة اتصال اقترانات معرفة بدلالة اقترانات أخرى متصلة .

نظرية (١):

إذا كان ق(س)، هـ(س) اقترانين متصلين عند س = أ فإن :

١ (ق + هـ) (س) متصل عند س = أ

٢ (ق − هـ) (س) متصل عند س = أ

٣ (ق . هـ) (س) متصل عند س = أ

٤ ك . هـ(س) متصل عند س = أ حيث ك $\in$ ح

٥ $\left(\frac{ق}{هـ}\right)$(س) متصل عند س = أ حيث هـ(أ) $\neq$ ٠

٦ $\sqrt[ن]{ق(س)}$ متصل عند س = أ حيث ن عدد صحيح موجب، وبشرط أن ق(أ) > ٠ إذا كانت ن زوجية .

مثال (٤)

ليكن ق(س) اقتراناً متصلاً عند س = ٢ . ابحث في اتصال كل من الاقترانات التالية عند س = ٢

أ ع(س) = س^٢ + ق(س)   ب ل(س) = $\frac{ق(س)}{س + ٥}$ جـ هـ(س) = $\sqrt{س^٢ - ١}$

الحل:

أ الاقتران $س^٢$ متصل عند س = ٢ (لماذا؟)

∴ الاقتران ع(س) = $س^٢$ + ق(س) متصل عند س = ٢ ؛ لأنه مجموع اقترانين متصلين عند النقطة نفسها .

ب الاقتران س + ٥ متصل عند س = ٢ (لماذا؟)

∴ الاقتران ل(س) = $\frac{ق(س)}{س + ٥}$ متصل عند س = ٢ ؛ لأنه ناتج قسمة اقترانين متصلين عند النقطة نفسها، وقيمة المقام عند ٢ ≠ ٠

جـ الاقتران $س^٢$ − ١ متصل عند س = ٢ (لماذا؟)

∴ الاقتران هـ(س) = $\sqrt{س^٢ - ١}$ متصل عند س = ٢ (نظرية (١) فرع ٦)

اتصال الاقتران على فترة:

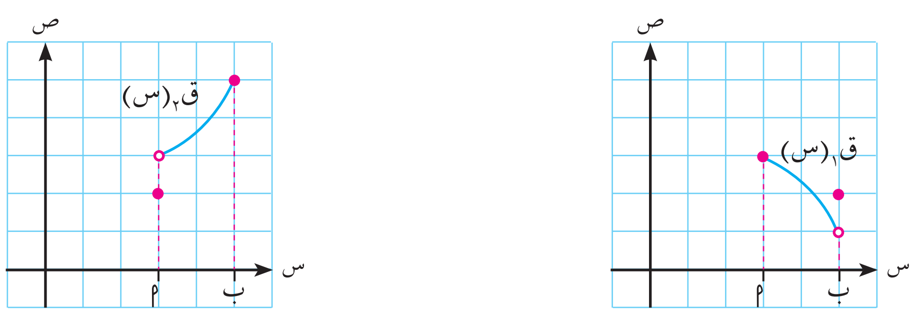
تعريف:

إذا كان ق(س) اقتراناً معرفاً على الفترة المغلقة [أ، ب] فإن الاقتران ق(س) يكون :

١ متصلاً من جهة اليمين عند س = أ إذا كانت $\lim_{س \to أ^+}$ ق(س) = ق(أ) .

٢ متصلاً من جهة اليسار عند س = ب إذا كانت $\lim_{س \to ب^-}$ ق(س) = ق(ب) .

لاحظ التوضيح التالي في الشكل (١–١٨) :



ق١(س) متصل عند س = أ من جهة اليمين
ومنفصل عند س = ب من جهة اليسار

ق٢(س) متصل عند س = ب من جهة اليسار
ومنفصل عند س = أ من جهة اليمين

الشكل (١–١٨)

تعريف:

١ يكون الاقتران ق(س) متصلاً على الفترة المفتوحة]أ، ب[إذا كان متصلاً عند كل نقطة في الفترة.

٢ يكون الاقتران ق(س) متصلاً على الفترة المغلقة [أ، ب] إذا كان متصلاً عند كل نقطة في الفترة المفتوحة]أ، ب[، وكان متصلاً عند س = أ من جهة اليمين وعند س = ب من جهة اليسار.

بالاعتماد على التعريف السابق ونهايات الاقترانات يمكنك التحقق من صحة كل مما يلي:

١ الاقتران كثير الحدود يكون متصلاً على ح.

٢ الاقتران النسبي يكون متصلاً على ح عدا أصفار المقام.

٣ اقتران الجيب واقتران جيب التمام متصلان على ح.

٤ اقتران القيمة المطلقة ق(س) = |س| متصل على ح.

مثال (٥)

ابحث في اتصال الاقترانات التالية:

أ ق(س) = س^{٢} + ٥

ب هـ(س) = $\frac{\text{س}^{٢}+١}{\text{س}^{٢}-٤}$

جـ ل(س) = ظا س على الفترة]٠، π[

الحل:

أ ق(س) = س^{٢} + ٥ اقتران كثير حدود فهو متصل عند جميع قيم س ∈ ح.

ب هـ(س) = $\frac{\text{س}^{٢}+١}{\text{س}^{٢}-٤}$ اقتران نسبي فهو متصل عند جميع قيم س ∈ ح عدا س = ٢، س = −٢

جـ ل(س) = ظا س = $\frac{\text{جاس}}{\text{جتاس}}$ خارج قسمة اقترانين متصلين

فهو متصل عند جميع قيم س ∈]٠، π[ما عدا س = $\frac{\pi}{٢}$ (صفر المقام)

مثال (٦)

ليكن ق(س) = $\begin{cases} \text{س} + ٢ & ، \quad ٠ \le \text{س} \le ١ \\ ٣ & ، \quad ١ < \text{س} \le ٢ \end{cases}$

ابحث في اتصال الاقتران ق(س) على الفترة [٠ ، ٢] .

الحل:

أولاً : الاقتران ق(س) متصل على الفترة المفتوحة]٠ ، ١[لأنه كثير حدود .

ثانياً : الاقتران ق(س) متصل على الفترة المفتوحة]١ ، ٢[لأنه كثير حدود .

ثالثاً : الاقتران ق(س) متصل عند س = ١ لأن :

$\underset{\text{س} \leftarrow ١^+}{\text{نهـــا}}$ ق(س) = $\underset{\text{س} \leftarrow ١^-}{\text{نهـــا}}$ ق(س) = ق(١) = ٣

رابعاً : الاقتران ق(س) متصل عند س = ٠ من جهة اليمين ؛ لأن :

$\underset{\text{س} \leftarrow ٠^+}{\text{نهـــا}}$ ق(س) = $\underset{\text{س} \leftarrow ٠^+}{\text{نهـــا}}$ (س+٢) = ق(٠) = ٢

خامساً : الاقتران ق(س) متصل عند س = ٢ من جهة اليسار ؛ لأن :

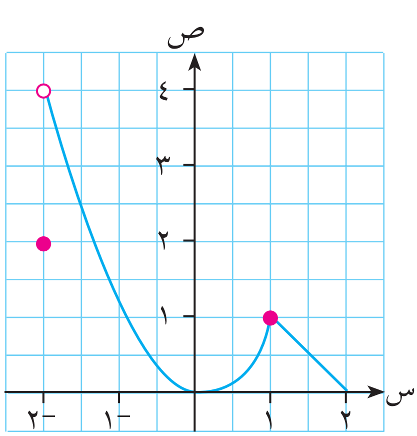
$\underset{\text{س} \leftarrow ٢^-}{\text{نهـــا}}$ ق(س) = ق(٢) = ٣

∴ ق(س) متصل على [٠ ، ٢]

مثال (٧)

ليكن ق(س) = $\begin{cases} ٢ & ، \quad \text{س} = -٢ \\ \text{س}^٢ & ، \quad -٢ < \text{س} \le ١ \\ ٢ - \text{س} & ، \quad ١ < \text{س} \le ٢ \end{cases}$

ارسم منحنى ق(س) ثم ابحث في اتصال ق(س) على الفترة [-٢ ، ٢] .



الشكل (١-١٩)

الحل:

يمثل الشكل (١-١٩) منحنى الاقتران ق(س) .

أولاً : ق(س) متصل على الفترة المفتوحة]-٢ ، ١[لأنه كثير حدود .

ثانياً : ق(س) متصل على الفترة المفتوحة]١ , ٢[لأنه كثير حدود أيضاً .

ثالثاً: ق(س) متصل عند س = ١ لأن:

$\underset{س \leftarrow ١^+}{\text{نهـا}}$ ق(س) = $\underset{س \leftarrow ١^+}{\text{نهـا}}$ (٢−س) = ١ ، $\underset{س \leftarrow ١^-}{\text{نهـا}}$ ق(س) = $\underset{س \leftarrow ١^-}{\text{نهـا}}$ س^٢ = ١

∴ $\underset{س \leftarrow ١}{\text{نهـا}}$ ق(س) = ق(١) = ١

رابعاً: ق(س) غير متصل عند س = −٢ من جهة اليمين لأن:

$\underset{س \leftarrow -٢^+}{\text{نهـا}}$ ق(س) = $\underset{س \leftarrow -٢^+}{\text{نهـا}}$ س^٢ = ٤ بينما ق(−٢) = ٢

أي أن $\underset{س \leftarrow -٢^+}{\text{نهـا}}$ ق(س) ≠ ق(−٢)

خامساً: ق(س) متصل عند س = ٢ من اليسار لأن:

$\underset{س \leftarrow ٢^-}{\text{نهـا}}$ ق(س) = $\underset{س \leftarrow ٢^-}{\text{نهـا}}$ (٢−س) = ٠ ، ق(٢) = ٠

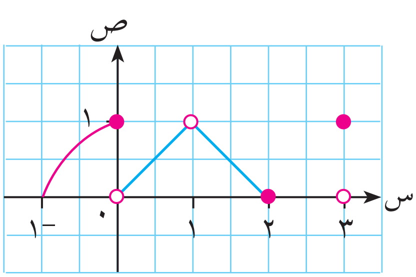
أي أن $\underset{س \leftarrow ٢^-}{\text{نهـا}}$ ق(س) = ق(٢)

∴ ق(س) غير متصل على [−٢ ، ٢]

لاحظ أن ق(س) متصل على]−٢ ، ٢] لأنه متصل عند جميع قيم س ∋]−٢ ، ٢[، ومتصل عند س = ٢ من اليسار .

تمارين (١-٦)

١ يمثل الشكل المقابل منحنى الاقتران ق(س) على [−١ ، ٣] .



بين أي العبارات التالية صائبة وأيها خاطئة مع ذكر السبب:

أ ق(س) متصل عند س = −١ من جهة اليسار .

ب ق(س) متصل عند س = ١

جـ ق(س) غير متصل عند س = ٠

د ق(س) متصل عند س = ٢

هـ ق(س) متصل على الفترة [−١ ، ٠] .

و ق(س) متصل على الفترة] ٠ ، ١[.

ز ق(س) متصل على الفترة] ١ ، ٣] .

ح يمكن تعريف ق(س) عند س = ١ ليصبح متصلاً عندها .

ط يمكن اعادة تعريف ق(س) عند س = ٠ ليصبح متصلاً عندها .

٢ ابحث في اتصال كل من الاقترانات التالية عند قيم س المبينة إزاء كل منها :

أ ق(س) = $\begin{cases} \frac{س^2 - 1}{س - 1} & ، س \neq 1 \\ 4 & ، س = 1 \end{cases}$ عند س = ١

ب ل(س) = $\begin{cases} \frac{|س - 1|}{س - 1} & ، س \neq 1 \\ 5 & ، س = 1 \end{cases}$ عند س = ١

جـ م(س) = $\begin{cases} \frac{جا س}{|س|} & ، س \neq 0 \\ 1 & ، س = 0 \end{cases}$ عند س = ٠

٣ ليكن ق(س) = $\begin{cases} 2 - س & ، 0 \leqslant س \leqslant 1 \\ 1 & ، 1 < س < 2 \\ 5 & ، س = 2 \end{cases}$ ابحث في اتصال ق(س) على الفترة [٠ ، ٢].

٤ إذا كان ق(س) = $\begin{cases} س^2 + أ & ، س \leqslant -1 \\ س + 4 & ، -1 < س \leqslant 1 \\ \frac{س}{س + ب} & ، س > 1 \end{cases}$ أوجد الثابتين أ، ب ليكون ق(س) متصلاً على ح.

٥ إذا كان ق(س) = $\begin{cases} 3 - س^2 & ، -2 \leq س < 1 \\ س + 1 & ، 1 < س \leq 2 \end{cases}$

ابحث في اتصال الاقتران ق(س) على الفترة [-٢ ، ٢] .

٦ أوجد قيم س التي يكون كل من الاقترانات التالية متصلاً عندها :

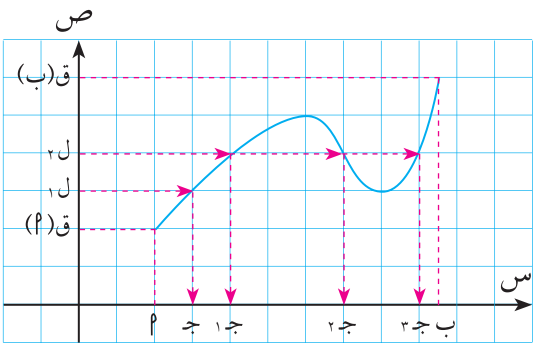
أ ق(س) = $\frac{1}{س - 2} + 5س$ ب ق(س) = $\frac{س + 5}{س^2 - س + 3}$ جـ ق(س) = |س - ١| + جا س

د ق(س) = $\sqrt{2س + 1}$ هـ ق(س) = $\frac{1 - جا^2 س}{جتا س}$ و ق(س) = س ظا س

٧ أوجد قيمة أ التي تجعل الاقتران ق(س) = $\begin{cases} \frac{جا س}{2 س} & ، س \neq 0 \\ أ & ، س = 0 \end{cases}$ متصلاً عند س = ٠

١-٧ نظرية القيم الوسطية (Intermediate Value Theorem)

للاقترانات المتصلة على فترة مغلقة خصائص رياضية مهمة سوف نتعرف بعضها في هذا البند.



الشكل (١-٢٠)

يمثل الشكل (١-٢٠) منحنى الاقتران ق(س) المتصل على الفترة المغلقة [أ ، ب]. القيمة ل١ تقع بين ق(أ)، ق(ب)، ونلاحظ وجود س = جـ تقع بين أ ، ب حيث ق(جـ) = ل١ .

كذلك نلاحظ أن ل٢ تقع بين ق(أ) ، ق(ب) أيضاً، وأنه يوجد ثلاث قيم لِـ س هي جـ١ ، جـ٢ ، جـ٣ وتقع جميعها بين أ ، ب حيث ق(جـ١) = ق(جـ٢) = ق(جـ٣) = ل٢

وبوجه عام، فإنه لأي قيمة ل تقع بين ق(أ) ، ق(ب) توجد قيمة واحدة على الأقل لِـ س تقع بين أ ، ب بحيث إن ق(س) = ل ؛ أي أن المستقيم ص = ل لابد أن يقطع منحنى الاقتران ق(س) عند نقطة واحدة على الأقل (جـ ، ق(جـ))، حيث جـ ∈] أ ، ب [، وهذا يقودنا إلى النظرية التالية:

نظرية القيم الوسطية:

إذا كان الاقتران ق(س) متصلاً على الفترة المغلقة [أ ، ب]، ق(أ) ≠ ق(ب) فإنه لأي عدد مثل ل يقع بين ق (أ)، ق (ب) يوجد عدد واحد على الأقل مثل جـ ∈] أ ، ب [، بحيث إن ق(جـ) = ل .

مثال (١)

ليكن الاقتران ق(س) = س^{3}-٣س معرفاً على الفترة [١ ، ٣] .

أ اثبت وجود عدد جـ ∈]١ ، ٣[، بحيث ق(جـ) = ٢

ب أوجد قيمة جـ.

الحل:

أ ق(س) = س^{3} - ٣س اقتران متصل على [١ ، ٣] لأنه كثير حدود

ق(١) = -٢ ، ق(٣) = ١٨

وحيث إن ل = ٢ تقع بين -٢ ، ١٨ فإنه حسب نظرية القيم الوسطية يوجد جـ ∈]١ ، ٣[بحيث إن ق(جـ) = ٢ .

ب ق(جـ) = ٢

∴ جـ^{٣} − ٣جـ − ٢ = ٠

(جـ − ٢) (جـ^{٢} + ٢جـ + ١) = ٠

(جـ − ٢) (جـ + ١)^{٢} = ٠

∴ جـ = ٢ ، −١

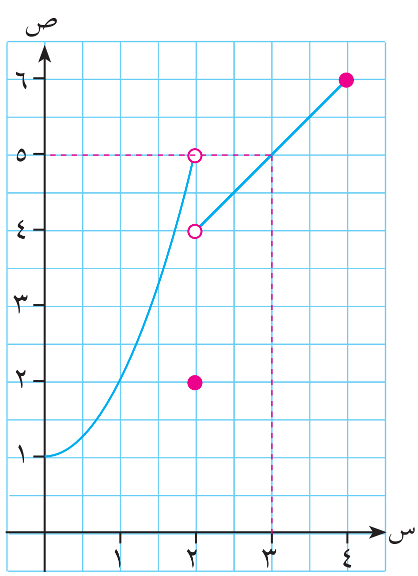
∴ جـ = ٢ وترفض جـ = −١ لأن −١ لا تنتمي للفترة]١ ، ٣[.

مثال (٢)

ليكن $ق(س) = \begin{cases} \text{س}^{٢} + ١ & ، \quad ٠ \leq \text{س} < ٢ \\ ٢ & ، \quad \text{س} = ٢ \\ \text{س} + ٢ & ، \quad ٢ < \text{س} \leq ٤ \end{cases}$

أ بين أن ق(س) لا يحقق شروط نظرية القيم الوسطية على [٠ ، ٤]

ب هل توجد جـ ∋]٠ ، ٤[بحيث ق(جـ) = ٥؟



الشكل (١−٢١)

الحل:

أ ق(س) متصل على [٠ ، ٢[لأنه كثير حدود.

ق(س) متصل على]٢ ، ٤] لأنه كثير حدود.

نهـا$_{س \leftarrow ٢^{-}}$ ق(س) = نهـا$_{س \leftarrow ٢^{-}}$ (س^{٢} + ١) = ٥

نهـا$_{س \leftarrow ٢^{+}}$ ق(س) = نهـا$_{س \leftarrow ٢^{+}}$ (س + ٢) = ٤

∴ نهـا$_{س \leftarrow ٢}$ ق(س) غير موجودة.

∴ ق(س) غير متصل عند س = ٢

وبالتالي غير متصل على [٠ ، ٤]

⇐ ق(س) لا يحقق شروط نظرية القيم الوسطية على [٠ ، ٤]

ب ق(جـ) = ٥

∴ إما جـ^{٢} + ١ = ٥ ، ٠ ≤ جـ < ٢ .... (١)

أو جـ + ٢ = ٥ ، ٢ < جـ ≤ ٤ .... (٢)

لا توجد قيمة لِـجـ تحقق المعادلة الأولى وقيمة جـ التي تحقق المعادلة الثانية هي جـ = ٣

∴ قيمة جـ المطلوبة هي ٣ . لاحظ الشكل (١−٢١).

مثال (٣)

إذا كان ق(س) = س^{٣} − س − ١ فأثبت أنه يوجد جـ ∈] ١ ، ٢[بحيث إن ق(جـ) = ٠

الحل:

ق(س) اقتران متصل على [١ ، ٢] لأنه كثير حدود .

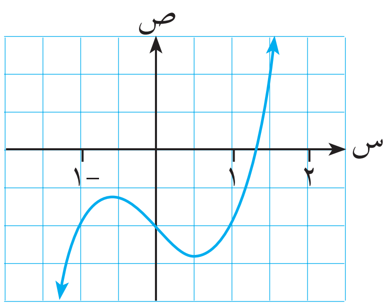
ق(١) = −١ ، ق(٢) = ٥

وحيث إن القيمة ل = صفر تقع بين −١ ، ٥

فإنه حسب نظرية القيم الوسطية

يوجد جـ ∈] ١ ، ٢[بحيث إن ق(جـ) = صفر .

انظر الشكل (١−٢٢) .



الشكل (١−٢٢)

المثال السابق يوضح حالة خاصة من نظرية القيم الوسطية تعرف باسم نظرية بلزانو :

نظرية بلزانو:

إذا كان ق(س) اقتراناً متصلاً على [ٲ ، ب]، وكان ق (ٲ)، ق (ب) مختلفين في الإشارة،

فإنه يوجد جـ ∈] ٲ ، ب [، بحيث إن ق(جـ) = ٠ .

مثال (٤)

ليكن ق(س) = س^{٤} + س − ٤ ، س ∈ ح

اثبت باستخدام نظرية بلزانو وجود صفر واحد على الأقل للاقتران في مجاله .

الحل:

نجرب فترة ما ولتكن [١ ، ٢] يحقق فيها الاقتران ق(س) شروط نظرية بلزانو .

ق(١) = ١ + ١ − ٤ = −٢ < ٠

ق(٢) = ١٦ + ٢ − ٤ = ١٤ > ٠

∴ ق(١) ، ق(٢) مختلفان في الإشارة

ق(س) متصل على الفترة [١ ، ٢] لأنه كثير حدود .

∴ ق(س) يحقق شروط نظرية بلزانو على الفترة [١ ، ٢] .

∴ يوجد صفر واحد على الأقل للاقتران ق(س) في الفترة]١ ، ٢[.

∴ للاقتران ق(س) صفر واحد على الأقل في مجاله .

مثال (٥)

ليكن $ق(س) = \begin{cases} س^٢+٣س-٤ &، \quad س \le ٢ \\ س^٣-٣س^٢ &، \quad س > ٢ \end{cases}$

أ ابحث في تحقق شروط نظرية بلزانو على الفترة [-٣ ، ٤] .

ب جد جـ ∈]-٣ ، ٤[بحيث ق(جـ) = ٠ ، هل تتعارض هذه النتيجة مع نظرية بلزانو؟

الحل:

أ $\lim_{س \to ٢^+} ق(س) = \lim_{س \to ٢^+} (س^٣ - ٣س^٢) = -٤$

$\lim_{س \to ٢^-} ق(س) = \lim_{س \to ٢^-} (س^٢ + ٣س - ٤) = ٦$

∴ $\lim_{س \to ٢} ق(س)$ غير موجودة .

∴ ق(س) غير متصل عند س = ٢ فهو غير متصل على الفترة [-٣ ، ٤] .

∴ ق(س) لا يحقق شروط نظرية بلزانو على الفترة [-٣ ، ٤] .

ب ق(جـ) = ٠

∴ إما $جـ^٢ + ٣جـ - ٤ = ٠$ ، $-٣ \le جـ \le ٢$ ..... (١)

أو $جـ^٣ - ٣جـ^٢ = ٠$ ، $٢ < جـ \le ٤$ ..... (٢)

$جـ^٢ + ٣جـ - ٤ = ٠ \Leftarrow (جـ+٤)(جـ-١) = ٠ \Leftarrow$ جـ = ١ ونرفض جـ = -٤

$جـ^٣ - ٣جـ^٢ = ٠ \Leftarrow$ جـ = ٠ ، ٣ ونرفض جـ = ٠

∴ توجد قيمتان لِـ جـ تنتميان للفترة]-٣ ، ٤[هما ١ ، ٣ تجعلان ق(جـ) = ٠

لا تتعارض هذه النتيجة مع نظرية بلزانو ؛ لأنه إذا لم تتحقق شروط نظرية بلزانو فإنه لا يمكن الجزم من ذلك بوجود أو عدم وجود جـ .

تستخدم نظرية بلزانو في إيجاد قيم تقريبية لأصفار الاقترانات بالاعتماد على الطريقةالمسماة طريقة التنصيف الموضحة في المثال التالي :

مثال (٦)

بين أنه يوجد صفر واحد على الأقل للاقتران ق(س) = س^{٢} – س – ٤ بين ٢ ، ٣

ثم أوجد قيمة تقريبية ثالثة له باستخدام طريقة التنصيف.

الحل:

ق(س) = س^{٢} – س – ٤ اقتران متصل على [٢ ، ٣] لأنه كثير حدود

ق(٢) = –٢ ، ق(٣) = ٢ مختلفتان في الإشارة

∴ حسب نظرية بلزانو يوجد جـ ∈] ٢ ، ٣ [حيث ق(جـ) = ٠

لإيجاد قيمة تقريبية أولى جـ$_{١}$ نختار الوسط الحسابي جـ$_{١}$ = $\frac{٢ + ٣}{٢}$ = ٢,٥

لإيجاد قيمة تقريبية ثانية جـ$_{٢}$ لصفر الاقتران:

نحسب ق(٢,٥) = (٢,٥)^{٢} – ٢,٥ – ٤ = –٠,٢٥ < صفر

نلاحظ أن إشارة ق(٢,٥) تختلف عن إشارة ق(٣)؛ لذا يمكن تطبيق نظرية بلزانو على الفترة [٢,٥ ، ٣].

∴ صفر الاقتران ∈]٢,٥ ، ٣[ونختار جـ$_{٢}$ = $\frac{٢,٥ + ٣}{٢}$ = ٢,٧٥

ولإيجاد قيمة تقريبية ثالثة جـ$_{٣}$:

نحسب ق(٢,٧٥) = (٢,٧٥)^{٢} – ٢,٧٥ – ٤ = ٠,٨١٢٥ > ٠

وتختلف عن ق(٢,٥) في الإشارة.

∴ تتحقق نظرية بلزانو على الفترة [٢,٥ ، ٢,٧٥]

∴ صفر الاقتران جـ$_{٣}$ ∈]٢,٥ ، ٢,٧٥[

ويكون التقريب الثالث جـ$_{٣}$ = $\frac{٢,٥ + ٢,٧٥}{٢}$ = ٢,٦٢٥

تمارين (١-٧)

١ إذا كان ق(س) = س^{٣} – ٨س + ١٠ معرفاً على الفترة [١ ، ٣]، بين أنه يوجد جـ ∈] ١ ، ٣ [بحيث إن ق(جـ) = ٥ .

٢ إذا كان ق(س) = س^{٣} – س، فهل يوجد جـ ∈] ٢ ، ٣ [بحيث ق(جـ) = ٨؟

٣ استخدم نظرية بلزانو لإيجاد قيمة تقريبية ثالثة لصفر الاقتران ق(س) = س^{٣} – ٥ المعرف على الفترة المغلقة [١ ، ٢]

٤ استخدم نظرية بلزانو لإيجاد قيمة تقريبية ثالثة للعدد = $\sqrt{٢}$ في الفترة المفتوحة]١ ، ٢[.

(ارشاد: استخدم الاقتران ق(س) = س^{٢} – ٢ ، معرفاً على الفترة [١ ، ٢]).

٥ بين أن للمعادلة جتا س = س حلاً واحداً على الأقل.

٦ بين أن للمعادلة س^{٣} – ١٥س + ١ = ٠ ثلاثة جذور مختلفة في الفترة]–٤ ، ٤[.

٧ هل يوجد صفرٌ للاقتران ق(س) = س^{٣} – ٤س – ١ في الفترة]–٢ ، ٢[؟

تمارين عامة

١ ضع دائرة حول رمز الإجابة الصحيحة فيما يلي :

١ $\lim_{س \leftarrow 0} \frac{\sqrt{س+4} - 2}{س} =$

أ صفر ب ∞ جـ $\frac{1}{4}$ د ٤

٢ $\lim_{س \leftarrow \pi} \frac{جتا س}{س} =$

أ $-\pi$ ب $\frac{-1}{\pi}$ جـ $\frac{1}{\pi}$ د ∞

٣ $\lim_{س \leftarrow -\infty} \frac{|4س|}{2س-7} =$

أ ٢ ب -2 جـ ∞ د $-\infty$

٤ الاقتران ق(س) = [س + ٧ , ٠] متصل عند س =

أ صفر ب ٠,٣ جـ ١,٣ د ٠,٧−

٥ قيمة ﻫ التي تجعل الاقتران ق(س) = $\begin{cases} س^2-2 & ، س \leq 2 \\ ﻫ س & ، س > 2 \end{cases}$ متصلاً دائماً هي :

أ صفر ب ١ جـ ٢ د -1

٦ $\lim_{س \leftarrow 3} \frac{س^2-9}{س^2-س} =$

أ صفر ب ٣ جـ -3 د غير موجودة

٧ $\lim_{س \leftarrow 0} \frac{جا^2 س}{جا^2 2س} =$

أ $\frac{1}{2}$ ب ٢ جـ $\frac{1}{4}$ د ٤

٨ $\lim_{س \leftarrow \infty} \frac{س^2-2س}{س^2-6س+8} =$

أ -2 ب -1 جـ ١ د صفر

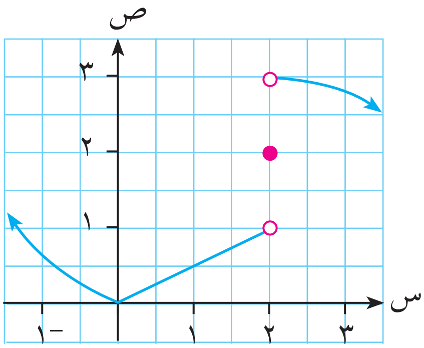
٩ $\underset{س \leftarrow -٢^+}{\text{نهـا}} \dfrac{|س+٢|}{س+٢} =$

أ ١ ب −١ جـ صفر د ∞

١٠ $\underset{س \leftarrow ٢}{\text{نهـا}} \dfrac{س^٢ - ٥س + ٦}{س^٢ + ٥س - ١٤} =$

أ ١ ب −١ جـ $\dfrac{١}{٩}$ د $-\dfrac{١}{٩}$

◆ الشكل المقابل يمثل منحنى الاقتران ص = ق(س)



اعتمد على ذلك في الإجابة عن الأسئلة من ١١ الى ١٣ :

١١ $\underset{س \leftarrow ٢^+}{\text{نهـا}}$ ق(س) =

أ صفر ب ١ جـ ٢ د ٣

١٢ $\underset{س \leftarrow ٢^-}{\text{نهـا}}$ ق(س) =

أ صفر ب ١ جـ ٢ د ٣

١٣ $\underset{س \leftarrow ٢}{\text{نهـا}}$ ق(س) =

أ ١ ب ٢ جـ ٣ د غير موجودة

١٤ $\underset{س \leftarrow -\infty}{\text{نهـا}} \dfrac{٥س + ١}{س^٣ - ١} =$

أ ٥ ب −٥ جـ صفر د ∞

١٥ $\underset{س \leftarrow -\infty}{\text{نهـا}} \dfrac{٦ - ٢س^٢}{٤س + ١} =$

أ صفر ب $-\dfrac{١}{٢}$ جـ ∞ د −∞

١٦ إذا كان ق(س) = $س^٥ - س^٢ + ٢س - ٣$ فمن المؤكد أن للاقتران ق(س) صفراً في الفترة :

أ]٠ ، ١[ب]١ ، ٢[جـ]−١ ، ٠[د]−٢ ، −١[

١٧ $\lim_{س \to -\infty} \left(\frac{١}{س} - \frac{١}{|س|}\right) =$

أ صفر　ب ∞　جـ $-\infty$　د غير موجودة

١٨ $\lim_{س \to -\infty} (٢س^٣ - ١٠٠س^٢) =$

أ صفر　ب ∞　جـ $-\infty$　د غير موجودة

١٩ $\lim_{س \to ٠} \frac{جاس}{ظا٢س} =$

أ صفر　ب $\frac{١}{٢}$　جـ $-\frac{١}{٢}$　د غير موجودة

٢٠ إذا كان ق(س) متصلاً، وكانت $\lim_{س \to ٣} (٨+٢ق(س)) = ٢٢$ فإن ق(٣) =

أ ١٤　ب ٧　جـ ١　د صفر

٢ أوجد قيمة كلٍ من النهايات التالية :

أ $\lim_{س \to ١} \frac{س - ١}{\sqrt{س+٤}}$　ب $\lim_{س \to ٩} \frac{\frac{١}{س} - \frac{١}{٩}}{س - ٩}$　جـ $\lim_{س \to ٧} \frac{\sqrt[٣]{س+١} - ٢}{س - ٧}$

د $\lim_{س \to ٠} \frac{ظا(جا س)}{٢س}$　هـ $\lim_{س \to ٠} س\ قتا\ ٢س$　و $\lim_{س \to ٠} \frac{٢س\ جا\ ٤س}{جا\ ٣س\ ظا\ ٥س}$

ز $\lim_{س \to \infty} \frac{٢س^٢}{٢س^٢ - ٥}$　ح $\lim_{س \to -\infty} \frac{٦ - ٢س^٢}{٥س - ١}$　ط $\lim_{س \to \infty} \frac{٥س^٢ + ١}{س^٣ - ١}$

٣ إذا كانت $\lim_{س \to ٢} ق(س) = ٤$ ، $\lim_{س \to ٢} هـ(س) = ٦$ ، فأوجد :

أ $\lim_{س \to ٢} \frac{ق(س) + س^٢}{هـ(س)}$　ب $\lim_{س \to ١} \left(ق(س+١) + س^٢ - ٨\right)$

٤ ليكن ق(س) = $\begin{cases} ٢س + ١ & ،\quad س \leq ٣ \\ أس + ب & ،\quad ٣ < س < ٥ \\ س^٢ + ٢ & ،\quad س \geq ٥ \end{cases}$

أوجد قيم أ ، ب التي تجعل الاقتران ق(س) متصلاً لكل قيم س الحقيقية .

٥ ليكن ق(س) = $س^٣ - س^٢ + س$. أثبت أنه يوجد جـ ∈ ح بحيث إن ق(جـ) = ١٠

٦ ليكن ق(س) = ٥س − ١ ، هـ(س) = $\sqrt{س}$

أثبت أنه يوجد جـ ∈]٠ ، ١[بحيث إن ق(جـ) = هـ(جـ)

٧ إذا كان ق(س) = $\begin{cases} \frac{ظا ٢س}{٣س} & ، س \neq ٠ \\ جـ & ، س = ٠ \end{cases}$

أوجد قيمة جـ التي تجعل الاقتران ق(س) متصلاً عند س = ٠

٨ إذا كان ق(س) = $س^٣ + س$، س ∈ [١ ، ٢]، فأثبت أنه يوجد جـ ∈]١ ، ٢[بحيث إن ق(جـ) = ٧؛ ثم أوجد قيمة تقريبية ثانية للعدد جـ.

٩ ابحث في اتصال الاقتران م(س) = $س^٢$ [س] عند س = ٠

١٠ إذا كان ق(س) متصلاً على الفترة [٠ ، ٥] وكان ق(٠) = −١ ، ق(٣) = ٢ ، ق(٤) = −١ ، ق(٥) = ٤ ، فما هو أقل عدد من أصفار الاقتران ق(س) التي يمكنك الجزم بوجودها في الفترة]٠ ، ٥[؟

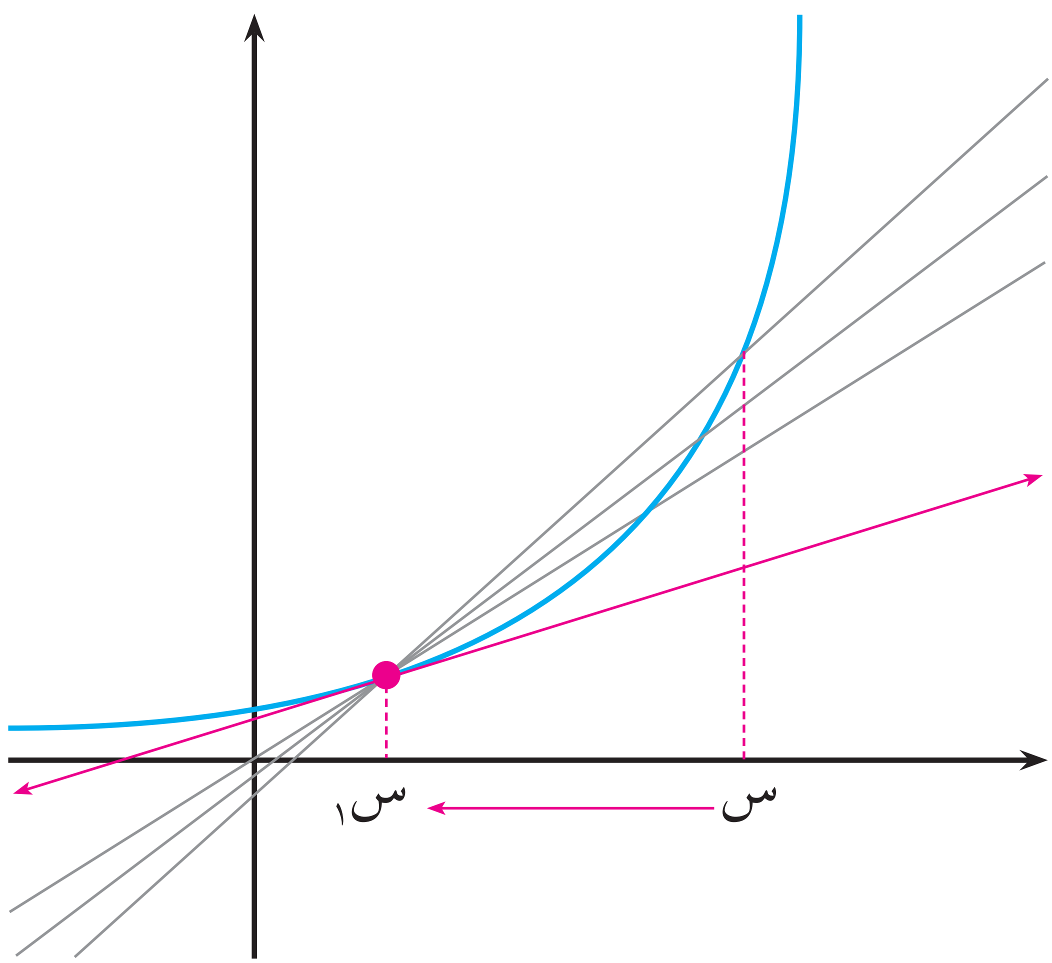
١١ إذا كان ق(س) اقتراناً متصلاً على الفترة [٠ ، ١] وكان ٠ < ق(س) < ١ ، ∀ س ∈ [٠ ، ١]، فأثبت أنه يوجد جـ ∈]٠ ، ١[بحيث إن ق(جـ) = جـ.

(ارشاد : عرّف الاقتران هـ(س) = ق(س) − س على الفترة [٠ ، ١]).

الوحدة

٢

حساب التفاضل



تمهيد:

بدأ علم التفاضل في القرن السابع عشر على يد كلٍ من العالمين نيوتن الانجليزي، ولايبنز الألماني، وذلك عند محاولتهما حل مسألتين أساسيتين: الأولى هندسيةٌ وتتعلق بالمماس لأي منحنى عند نقطة عليه، والثانية فيزيائية وتتعلق بالسرعة اللحظية لجسم متحرك. وقد أدت الفكرة المشتركة التي يقوم عليها حل المسألتين إلى مفهوم رياضي أشمل وأعم، ألا وهو المشتقة الأولى التي وجدت لها تطبيقات لاتكاد تحصر في جميع العلوم الهندسية، والفيزيائية، والاقتصادية، وفي كل مجال يكون التغير صفة مميزة له. ولتقديم مفهوم المشتقة يلزم التعرف أولاً على مفهوم متوسط التغير.

٢-١ متوسط التغير (Average Rate of Change)

الاقتران علاقة بين متغيرين س، ص يسمى أحدهما (س) المتغير المستقل، ويسمى الآخر (ص) المتغير التابع؛ بحيث تتعين لكل قيمة من قيم المتغير س قيمة واحدة فقط للمتغير ص.

إذا كان ص = ق(س) اقتراناً، وتغيرت فيه س من $س_1$ الى $س_2$،

فإن قيمة ص تتغير من $ص_1$= ق($س_1$) الى $ص_2$= ق($س_2$).

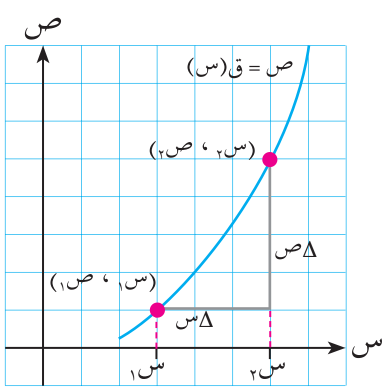
يرمز للتغير في س من $س_1$ إلى $س_2$ بالرمز Δس (ويُقرأ: دلتا س)

أي أن: Δس = $س_2$ − $س_1$

وبالمثل فإنه يرمز للتغير في ص بالرمز Δص (ويُقرأ: دلتا ص) أي أن:

Δص = Δ ق(س) = $ص_2$ − $ص_1$ = ق($س_2$)−ق($س_1$)

لاحظ الشكل (٢-١).



الشكل (٢-١)

مثال (١)

إذا كان ص = ق(س) = $س^2$ +٣س−٥ ، فأوجد التغير في ص = ق(س) عندما تتغير س:

أ من $س_1$ = ١ إلى $س_2$=٤

ب من $س_1$ = ٣ إلى $س_2$=−٥

جـ من $س_1$ = ٢ إلى $س_2$ بحيث Δس = −٣

الحل:

أ Δص = ق(٤) − ق(١)

$= ٢٣ - (-١) = ٢٤$

ب Δص = ق(-٥) - ق(٣)

$= ٥ - ١٣ = -٨$

جـ س$_٢$ = س$_١$ + Δس

$= ٢ + -٣ = -١$

$\Leftarrow$ Δص = ق(س$_٢$) - ق(س$_١$)

= ق(-١) - ق(٢)

$= -٧ - ٥ = -١٢$

تعريف: متوسط التغير

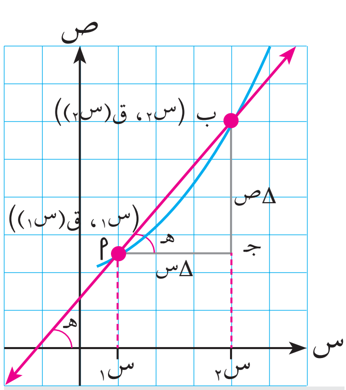
إذا كان ص = ق(س) اقتراناً، وتغيرت س من س$_١$ إلى س$_٢$ = س$_١$ + Δس، فإن متوسط تغير الاقتران بالنسبة لـ س يعرف بأنه النسبة بين التغير في ص إلى التغير في س، بشرط أن التغير في س لا يساوي صفراً.

أي أن متوسط التغير = $\frac{\Delta ص}{\Delta س} = \frac{ق(س_١ + \Delta س) - ق(س_١)}{\Delta س}$ ، Δس $\neq$ ٠

فإذا كان ص = ق(س) هو الاقتران المبين في الشكل (٢-٢) فإن متوسط التغير في ق(س) بالنسبة لِ س بين س$_١$، س$_٢$ هو النسبة $\frac{\Delta ص}{\Delta س}$ ، ويمثلها ميل المستقيم أ ب القاطع لمنحنى الاقتران في النقطتين:

أ (س$_١$، ق(س$_١$))، ب (س$_٢$، ق(س$_٢$))

انظر الشكل (٢-٢).



الشكل (٢-٢)

مثال (٢)

إذا كان ق(س)=س^٢+س-٥ ، فأوجد متوسط التغير في ق(س) بالنسبة لـ س عندما تتغير س من ١ إلى ٤ .

الحل:

متوسط التغير = $\frac{ق(٤) - ق(١)}{٤ - ١}$

$= \frac{١٥ - (-٣)}{٣} = ٦$

مثال (٣)

ليكن ق(س) = $\begin{cases} ٣س+٤ &، \quad س \leq ٢ \\ س^{٢}+٣س &، \quad س > ٢ \end{cases}$

أ أوجد متوسط تغير ق(س) في الحالات التالية :

١ عندما تتغير س من ٢ إلى ٥ .

٢ عندما تتغير س من ٢ إلى −١

٣ عندما تتغير س من ٢ إلى ٢ + هـ

ب استخدم القاعدة التي توصلت إليها في قسم (٣) للتأكد من صحة جوابك في القسمين ١ ، ٢ .

الحل:

أ ١ متوسط التغير $= \frac{ق(٥) - ق(٢)}{٥ - ٢}$

$= \frac{(٢٥+١٥) - (٦+٤)}{٣} = ١٠$

٢ متوسط التغير $= \frac{ق(-١) - ق(٢)}{-١-٢}$

$= \frac{(-٣+٤)-(٦+٤)}{-٣} = ٣$

٣ متوسط التغير $= \frac{ق(٢+هـ) - ق(٢)}{٢+هـ-٢} = \frac{ق(٢+هـ) - ١٠}{هـ}$

نعتبر حالتين :

أ عندما هـ > ٠ :

متوسط التغير $= \frac{(٢+هـ)^{٢}+٣(٢+هـ) -١٠}{هـ} = \frac{٤+٤هـ + هـ^{٢}+٦+٣هـ -١٠}{هـ}$

$= \frac{٧هـ+هـ^{٢}}{هـ} = \frac{هـ(٧+هـ)}{هـ} = ٧+ هـ \quad ، \quad هـ \neq ٠$

ب عندما هـ < ٠ :

متوسط التغير $= \frac{٣(٢+هـ) + ٤ - (١٠)}{هـ}$

$= \frac{٣هـ}{هـ} = ٣ \quad ، \quad هـ \neq ٠$

∴ متوسط التغير $= \frac{\Delta ص}{\Delta س} = \begin{cases} ٧ + هـ &، \quad هـ > ٠ \\ ٣ &، \quad هـ < ٠ \end{cases}$

ب عندما تتغير س من ٢ إلى ٥ تكون هـ =٣ > ٠ ؛ ولذلك يكون متوسط التغير = ٧ + ٣ = ١٠

وعندما تتغير س من ٢ إلى −١ تكون هـ = −٣ < ٠ ؛ لذلك يكون متوسط التغير = ٣ .

إذن تتطابق النتيجتان مع الإجابتين في القسمين ١ ، ٢ .

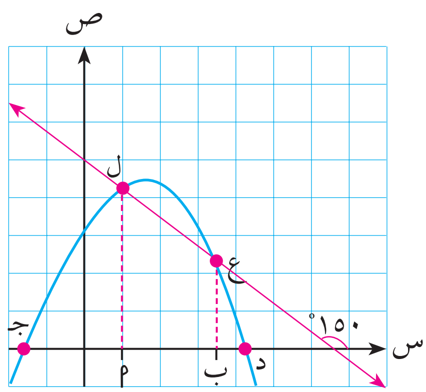
مثال (٤)

يمثل الشكل (٢−٣) منحنى الاقتران ص = ق(س)

جد متوسط التغير في ق(س):

أ بين س = م ، س = ب

ب بين س = جـ ، س = د



الشكل (٢−٣)

الحل:

أ متوسط التغير بين س = م ، س = ب

$$= \text{ميل القاطع ل ع} = \text{ظا}١٥٠° = \frac{-١}{\sqrt{٣}}$$

ب متوسط التغير بين س = جـ ، س = د تساوي ميل القاطع جـ د = ميل محور السينات = صفر .

مثال (٥)

يتحرك جسم على خط مستقيم بحيث إن بعده ف بالأمتار عن نقطة ثابته على الخط يعطى بالقاعدة ف = ق(ن) = ن^٢+٥ن، ن بالثواني . جد متوسط التغير في ف بالنسبة للزمن في الفترة الزمنية [١ ، ٣] .

الحل:

$$\text{متوسط التغير في ف بالنسبة لـ ن} = \frac{\Delta\text{ف}}{\Delta\text{ن}}$$

$$= \frac{\text{ق}(٣) - \text{ق}(١)}{٣-١}$$

$$= \frac{(٩+١٥)-(١+٥)}{٢} = \frac{١٨}{٢} = ٩ \text{ م/ث}$$

ملاحظة : يسمى متوسط التغير $\frac{\Delta\text{ف}}{\Delta\text{ن}}$ السرعة المتوسطة للجسم .

تمارين (٢-١)

١ إذا كان ق(س)= س^{٢}– س+٥ فأوجد قيمة التغير في الاقتران ق(س) :

أ عندما تتغير س من ١ إلى ٣ .

ب عندما تتغير س من ١ إلى ١+هـ.

جـ استخدم القاعدة التي توصلت إليها في الفرع (ب) للتأكد من صحة جوابك في الفرع (أ) .

٢ إذا كان هـ(س) = جاس–٣ جتاس ، فأوجد متوسط التغير في هـ(س) بين س$_{١}$ = $\frac{\pi}{٢}$ ، س$_{٢}$ = ٣ π .

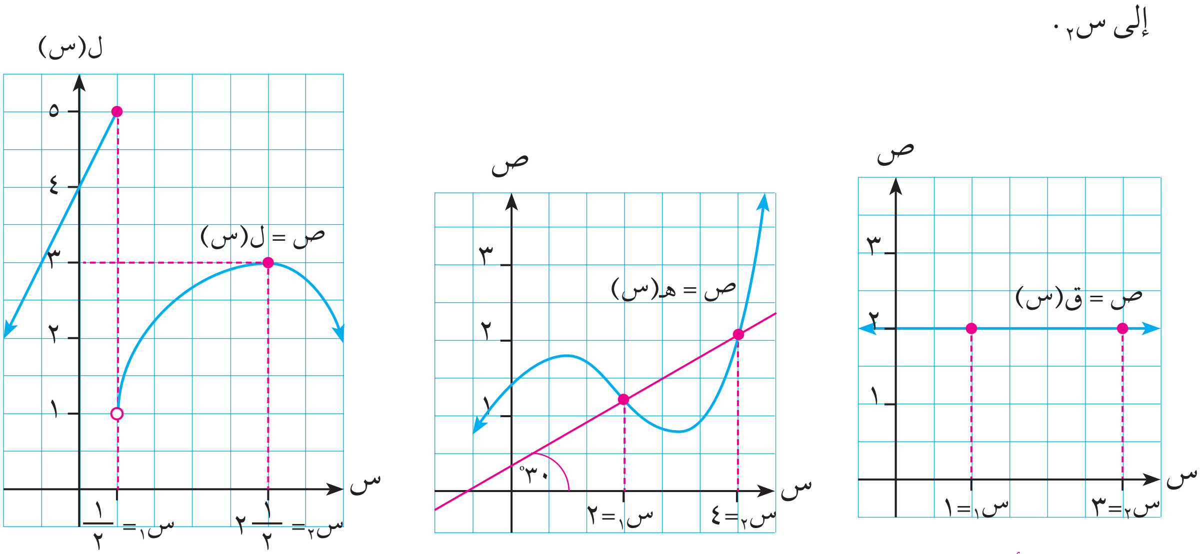
٣ جد متوسط التغير في الاقتران ق(س) =
$$\begin{cases} ٣\text{س}+٥ & ، \text{س} \leq -١ \\ \text{س}^{٢}+٣\text{س}+٤ & ، \text{س} > -١ \end{cases}$$
بين س = –١ ، س = –١+Δس ، ثم استخدم الناتج لإيجاد متوسط التغير في ق(س) بين س = –١ ، س = ٢ .

٤ إذا كان متوسط التغير في ق(س) = $\sqrt{٤\text{س}+١}$ بين س = ٢ ، س = ب مساوياً $\frac{١}{٣}$ ، فما قيمة ب؟

٥ إذا كان متوسط التغير في ق(س) عندما تتغير س من س$_{١}$= ١ إلى س$_{٢}$= ٩ مساوياً ٥ ، فأوجد متوسط التغير في الاقتران ل(س) = س^{٢}ق(٢س+٥) بين س = –٢ ، س = ٢ .

٦ يتحرك جسم على خط مستقيم وفق العلاقة ف = ن^{٣}+٢ن ، حيث ف المسافة التي يقطعها بالأمتار ، ن الزمن بالثواني . جد السرعة المتوسطة لهذا الجسم في الفترة الزمنية [٢ ، ٥] .

٧ بالاعتماد على الأشكال البيانية التالية ، أوجد متوسط تغير الاقتران الممثل في كل حالة عندما تتغير س من س$_{١}$ إلى س$_{٢}$.



(أ) (ب) (جـ)

٨ إذا كان ل(س) = ق(س) + هـ(س) ، فاثبت أن متوسط التغير في الاقتران ل(س) في الفترة [س$_{١}$، س$_{٢}$] يساوي متوسط التغير في الاقتران ق(س) + متوسط التغير في الاقتران هـ(س) في الفترة ذاتها .

٢-٢ المشتقة الأولى First Derivative

سبق أن عرَّفنا متوسط التغير في الاقتران ص = ق(س)، عندما تتغير س من $س_١$ إلى $س_١$+Δس، بأنه :

$$\frac{\Delta ص}{\Delta س} = \frac{ق(س_١+\Delta س) - ق(س_١)}{\Delta س} ،\ \Delta س \neq ٠$$

وهذا مقدار تتوقف قيمته على $س_١$، Δس فإذا بقيت $س_١$ ثابتة، وجعلنا Δس تقترب من الصفر، فإن هذا المقدار قد تكون له نهاية معينة تسمى معدل تغير الاقتران أو المشتقة الأولى للاقتران عند س = $س_١$.

تعريف:

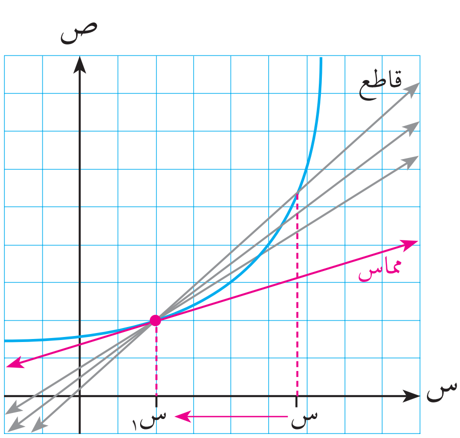
يعرف معدل تغير الاقتران أو المشتقة الأولى للاقتران ق(س) عند س = $س_١$ في مجاله، ونرمز له بالرمز $\acute{ق}(س_١)$، بأنه :

$$\acute{ق}(س_١) = \lim_{هـ \to ٠} \frac{ق(س_١+هـ) - ق(س_١)}{هـ}$$ ، بشرط وجود النهاية.

ويمكن كتابة معدل تغير الاقتران أو المشتقة الأولى على النحو التالي أيضا :

$$\acute{ق}(س_١) = \lim_{س \to س_١} \frac{ق(س) - ق(س_١)}{س - س_١}$$

ومن الناحية الهندسية نلاحظ من الشكل (٢-٤) أنه باقتراب س من $س_١$ يؤول متوسط التغير (ميل القاطع) إلى معدل التغير (ميل المماس) عند $س_١$.



الشكل (٢-٤)

مثال (١)

إذا كان $\text{ق}(\text{س})=\text{س}^{٢}+٣\text{س}-٢$ فأوجد باستخدام التعريف $\text{قَ}(٥)$.

الحل:

$$\text{قَ}(٥) = \underset{\text{هـ} \leftarrow ٠}{\text{نهـا}} \frac{\text{ق}(٥+\text{هـ}) - \text{ق}(٥)}{\text{هـ}}$$

$$= \underset{\text{هـ} \leftarrow ٠}{\text{نهـا}} \frac{\left((٥+\text{هـ})^{٢}+٣(٥+\text{هـ})-٢\right)-(٢٥+١٥-٢)}{\text{هـ}}$$

$$= \underset{\text{هـ} \leftarrow ٠}{\text{نهـا}} \frac{٢٥+١٠\text{هـ}+\text{هـ}^{٢}+١٥+٣\text{هـ}-٢-٣٨}{\text{هـ}}$$

$$= \underset{\text{هـ} \leftarrow ٠}{\text{نهـا}} \frac{١٣\text{هـ}+\text{هـ}^{٢}}{\text{هـ}} = \underset{\text{هـ} \leftarrow ٠}{\text{نهـا}} \frac{\text{هـ}(١٣+\text{هـ})}{\text{هـ}} = ١٣$$

مثال (٢)

إذا كان $\text{ق}(\text{س}) = \sqrt{٢\text{س}-٣}$ فأوجد باستخدام التعريف $\text{قَ}(٦)$.

الحل:

$$\text{قَ}(٦) = \underset{\text{س} \leftarrow ٦}{\text{نهـا}} \frac{\text{ق}(\text{س}) - \text{ق}(٦)}{\text{س} - ٦}$$

$$= \underset{\text{س} \leftarrow ٦}{\text{نهـا}} \frac{\sqrt{٢\text{س}-٣} - ٣}{\text{س} - ٦}$$

$$= \underset{\text{س} \leftarrow ٦}{\text{نهـا}} \frac{\sqrt{٢\text{س}-٣} - ٣}{\text{س} - ٦} \times \frac{\sqrt{٢\text{س}-٣} + ٣}{\sqrt{٢\text{س}-٣} + ٣}$$

(بضرب كلٍ من البسط والمقام في مرافق البسط)

$$= \underset{\text{س} \leftarrow ٦}{\text{نهـا}} \frac{٢\text{س} - ٣ - ٩}{(\text{س}-٦)\left(\sqrt{٢\text{س}-٣} + ٣\right)}$$

$$= \underset{\text{س} \leftarrow ٦}{\text{نهـا}} \frac{٢(\text{س} - ٦)}{(\text{س}-٦)\left(\sqrt{٢\text{س}-٣} + ٣\right)}$$

$$= \underset{\text{س} \leftarrow ٦}{\text{نهـا}} \frac{٢}{\sqrt{٢\text{س}-٣} + ٣} = \frac{٢}{٦} = \frac{١}{٣}$$

ملاحظة:

إذا كان ص = ق(س) فإن المشتقة الأولى للاقتران ق(س) عند س = أ ، أي قَ(أ)، يرمز لها أيضاً بأحد الرموز التالية:

$$\frac{\text{د}}{\text{د س}}\left(\text{ق(س)}\right)\Big|_{\text{س}=\text{أ}} \quad ، \quad \frac{\text{د ص}}{\text{د س}}\Big|_{\text{س}=\text{أ}} \quad ، \quad \text{صَ عند س} = \text{أ}$$

مثال (٣)

إذا كانت ص= ق(س) = $\frac{\text{٢س}+\text{٣}}{\text{٣س}-\text{١}}$ ، فأوجد باستخدام التعريف $\frac{\text{د ص}}{\text{د س}}\Big|_{\text{س}=\text{٤}}$.

الحل:

$$\frac{\text{د ص}}{\text{د س}}\Big|_{\text{س}=\text{٤}} = \lim_{\text{س}\leftarrow\text{٤}} \frac{\text{ق(س)} - \text{ق(٤)}}{\text{س} - \text{٤}}$$

$$= \lim_{\text{س}\leftarrow\text{٤}} \frac{\frac{\text{٢س} + \text{٣}}{\text{٣س} - \text{١}} - \text{١}}{\text{س} - \text{٤}}$$

$$= \lim_{\text{س}\leftarrow\text{٤}} \frac{\left(\frac{\text{٢س}+\text{٣}-\text{٣س}+\text{١}}{\text{٣س} - \text{١}}\right)}{\text{س} - \text{٤}}$$

$$= \lim_{\text{س}\leftarrow\text{٤}} \frac{-(\text{س} - \text{٤})}{\text{٣س} - \text{١}} \times \frac{\text{١}}{\text{س} - \text{٤}} = - \frac{\text{١}}{\text{١١}}$$

المشتقة من اليمين ومن اليسار:

مثلما عرَّفنا النهاية من اليمين والنهاية من اليسار ، نعرِّف المشتقة من اليمين (المشتقة اليمنى) للاقتران ص = ق(س) عند س = أ الواقعة في مجاله ، ويرمز لها بالرمز قَ(أ)^{+} بأنها :

$$\text{قَ(أ)}^{+} = \lim_{\text{هـ}\leftarrow\text{٠}^{+}} \frac{\text{ق(أ+هـ)} - \text{ق(أ)}}{\text{هـ}} \quad \text{أو بصورة مكافئة} \quad \text{قَ(أ)}^{+} = \lim_{\text{س}\leftarrow\text{أ}^{+}} \frac{\text{ق(س)} - \text{ق(أ)}}{\text{س} - \text{أ}}$$

وبالمثل تعرف المشتقة من اليسار (المشتقة اليسرى) للاقتران ص = ق(س) عند س = أ في مجاله ، ويرمز لها بالرمز قَ(أ)^{-} بأنها :

$$\text{قَ(أ)}^{-} = \lim_{\text{هـ}\leftarrow\text{٠}^{-}} \frac{\text{ق(أ+هـ)} - \text{ق(أ)}}{\text{هـ}} \quad \text{أو بصورة مكافئة} \quad \text{قَ(أ)}^{-} = \lim_{\text{س}\leftarrow\text{أ}^{-}} \frac{\text{ق(س)} - \text{ق(أ)}}{\text{س} - \text{أ}}$$

ويكون الاقتران ق(س) قابلاً للاشتقاق عند س = أ إذا وفقط إذا كانت $\text{قَ(أ)}^{+} = \text{قَ(أ)}^{-}$.

أمّا الاقتران ق(س) المعرف على الفترة المغلقة [أ ، ب] فلا يكون قابلاً للاشتقاق عند الطرفين أ ، ب .

مثال (٤)

إذا كان ق(س) = $\begin{cases} س^٢ + ٥س & ، \quad س \le ١ \\ ٤س + ٢ & ، \quad س > ١ \end{cases}$

فأوجد باستخدام التعريف : أ ق̅(٢) ب ق̅(١)

الحل:

أ بما أن ق(س) = ٤س + ٢ لجميع قيم س في جوار العدد ٢ ،

$$\therefore \quad ق̅(٢) = \lim_{س \to ٢} \frac{ق(س) - ق(٢)}{س - ٢}$$

$$= \lim_{س \to ٢} \frac{(٤س + ٢) - (٨ + ٢)}{س - ٢}$$

$$= \lim_{س \to ٢} \frac{٤س - ٨}{س - ٢}$$

$$= \lim_{س \to ٢} \frac{٤(س - ٢)}{س - ٢} = \lim_{س \to ٢} ٤$$

$$= ٤$$

ب $$ق̅(١) = \lim_{س \to ١} \frac{ق(س) - ق(١)}{س - ١}$$

بما أن قاعدة الاقتران ق(س) تتغير في جوار س = ١

فإننا نلجأ إلى حساب المشتقة اليمنى واليسرى عند س = ١

أولاً : $$ق̅(١)^- = \lim_{س \to ١^-} \frac{ق(س) - ق(١)}{س - ١} = \lim_{س \to ١^-} \frac{س^٢ + ٥س - ٦}{س - ١}$$

$$= \lim_{س \to ١^-} \frac{(س - ١)(س + ٦)}{س - ١} = ٧$$

ثانياً : $$ق̅(١)^+ = \lim_{س \to ١^+} \frac{ق(س) - ق(١)}{س - ١}$$

$$= \lim_{س \to ١^+} \frac{(٤س + ٢) - (١ + ٥)}{س - ١} = \lim_{س \to ١^+} \frac{٤س - ٤}{س - ١}$$

$$= \lim_{س \to ١^+} \frac{٤(س - ١)}{س - ١} = ٤$$

وبما أن ق̅(١)$^-$ ≠ ق̅(١)$^+$ إذن ق̅(١) غير موجودة . نقول في مثل هذه الحالة إن الاقتران ق(س) غير قابل للاشتقاق عند س = ١ .

الاقتران المشتق (اقتران المشتقة الأولى):

درسنا في الأمثلة السابقة كيفية ايجاد مشتقة الاقتران ق(س) عند نقطة محددة س = أ في مجاله . وفيما يلي سنبحث في مشتقة الاقتران ق(س) عند كل نقطة س في مجاله ، لنحصل على اقتران آخر يسمى الاقتران المشتق قَ(س) .

تعريف:

يعرف الاقتران المشتق قَ(س) للاقتران ق(س) بأنه :

$$\text{قَ(س)} = \lim_{\text{هـ} \to 0} \frac{\text{ق(س+هـ)} - \text{ق(س)}}{\text{هـ}}$$

أو : $\text{قَ(س)} = \lim_{\text{ع} \to \text{س}} \frac{\text{ق(ع)} - \text{ق(س)}}{\text{ع} - \text{س}}$ ، بشرط وجود النهاية .

يلاحظ من التعريف أن مجال قَ(س) يكون دائماً مجموعة جزئية من مجال ق(س) .

مثال (٥)

إذا كان ق(س) = س^{٢} + ٣س − ٥ ، فأوجد قَ(س) .

الحل:

$$\text{قَ(س)} = \lim_{\text{ع} \to \text{س}} \frac{\text{ق(ع)} - \text{ق(س)}}{\text{ع} - \text{س}}$$

$$= \lim_{\text{ع} \to \text{س}} \frac{(\text{ع}^{٢} + ٣\text{ع} - ٥) - (\text{س}^{٢} + ٣\text{س} - ٥)}{\text{ع} - \text{س}}$$

$$= \lim_{\text{ع} \to \text{س}} \frac{(\text{ع}^{٢} - \text{س}^{٢}) + (٣\text{ع} - ٣\text{س})}{\text{ع} - \text{س}}$$

$$= \lim_{\text{ع} \to \text{س}} \frac{(\text{ع} - \text{س})(\text{ع} + \text{س}) + ٣(\text{ع} - \text{س})}{\text{ع} - \text{س}}$$

$$= \lim_{\text{ع} \to \text{س}} \frac{(\text{ع} - \text{س})(\text{ع} + \text{س} + ٣)}{\text{ع} - \text{س}}$$

$$= \lim_{\text{ع} \to \text{س}} (\text{ع} + \text{س} + ٣)$$

$$= \text{س} + \text{س} + ٣ = ٢\text{س} + ٣$$

أي أن قَ(س) = ٢س + ٣

مثال (٦)

إذا كان ق(س) = $\sqrt{س}$ ، س ≤ ٠ ، فأوجد قَ(س) وعين مجاله .

الحل:

$$قَ(س) = \lim_{ع \to س} \frac{ق(ع) - ق(س)}{ع - س}$$

$$= \lim_{ع \to س} \frac{\sqrt{ع} - \sqrt{س}}{ع - س}$$

$$= \lim_{ع \to س} \left(\frac{\sqrt{ع} - \sqrt{س}}{ع - س}\right) \times \frac{\sqrt{ع} + \sqrt{س}}{\sqrt{ع} + \sqrt{س}}$$

$$= \lim_{ع \to س} \frac{(ع - س)}{(ع - س)\left(\sqrt{ع} + \sqrt{س}\right)}$$

$$= \lim_{ع \to س} \frac{١}{\sqrt{ع} + \sqrt{س}} = \frac{١}{٢\sqrt{س}}$$

$$\therefore \quad قَ(س) = \frac{١}{٢\sqrt{س}}$$

مجال قَ(س) هو جميع الأعداد الحقيقية الموجبة .

مثال (٧)

$$\text{إذا كان } ق(س) = \begin{cases} س^{٢} & ، \quad -١ \le س < ١ \\ ٣س - ٢ & ، \quad ١ \le س \le ٣ \end{cases} \quad ، \text{ أوجد } قَ(س) .$$

الحل:

أولاً : الاشتقاق على الفترة المفتوحة]-١ ، ١[:

∀ س ∈]-١ ، ١[، يكون :

$$قَ(س) = \lim_{ع \to س} \frac{ق(ع) - ق(س)}{ع - س} = \lim_{ع \to س} \frac{ع^{٢} - س^{٢}}{ع - س}$$

$$= \lim_{ع \to س} \frac{(ع - س)(ع + س)}{ع - س} = \lim_{ع \to س} (ع + س) = ٢س$$

ثانياً: الاشتقاق على الفترة المفتوحة]١، ٣[:

$\forall$ س $\in$]١، ٣[، يكون:

$$\text{قَ(س)} = \underset{\text{ع}\to\text{س}}{\text{نهـــا}} \frac{\text{ق(ع)} - \text{ق(س)}}{\text{ع} - \text{س}}$$

$$= \underset{\text{ع}\to\text{س}}{\text{نهـــا}} \frac{(\text{٣ع} - \text{٢}) - (\text{٣س} - \text{٢})}{\text{ع} - \text{س}} = \underset{\text{ع}\to\text{س}}{\text{نهـــا}} \frac{\text{٣ع} - \text{٣س}}{\text{ع} - \text{س}}$$

$$= \underset{\text{ع}\to\text{س}}{\text{نهـــا}} \frac{\text{٣(ع} - \text{س)}}{\text{ع} - \text{س}} = \text{٣}$$

ثالثاً: الاشتقاق عند نقطة تغير تعريف الاقتران حيث س = ١

$$\text{قَ(١)}^{+} = \underset{\text{س}\to\text{١}^{+}}{\text{نهـــا}} \frac{\text{ق(س)} - \text{ق(١)}}{\text{س} - \text{١}}$$

$$= \underset{\text{س}\to\text{١}^{+}}{\text{نهـــا}} \frac{(\text{٣س} - \text{٢}) - (\text{٣} \times \text{١} - \text{٢})}{\text{س} - \text{١}}$$

$$= \underset{\text{س}\to\text{١}^{+}}{\text{نهـــا}} \frac{\text{٣س} - \text{٣}}{\text{س} - \text{١}} = \underset{\text{س}\to\text{١}^{+}}{\text{نهـــا}} \text{٣} = \text{٣}$$

$$\text{قَ(١)}^{-} = \underset{\text{س}\to\text{١}^{-}}{\text{نهـــا}} \frac{\text{ق(س)} - \text{ق(١)}}{\text{س} - \text{١}}$$

$$= \underset{\text{س}\to\text{١}^{-}}{\text{نهـــا}} \frac{\text{س}^{\text{٢}} - (\text{٣} \times \text{١} - \text{٢})}{\text{س} - \text{١}}$$

$$= \underset{\text{س}\to\text{١}^{+}}{\text{نهـــا}} \frac{\text{س}^{\text{٢}} - \text{١}}{\text{س} - \text{١}} = \underset{\text{س}\to\text{١}^{+}}{\text{نهـــا}} (\text{س} + \text{١}) = \text{٢}$$

وبما أن $\text{قَ(١)}^{+} \neq \text{قَ(١)}^{-}$

$\therefore$ قَ(١) غير موجودة.

رابعاً: قَ(−١) غير موجودة، وكذلك قَ(٣) غير موجودة؛ لأن س = −١ ، س = ٣ هما نقطتان طرفيتان

$$\therefore \quad \text{قَ(س)} = \begin{cases} \text{٢س} & ، \quad -\text{١} < \text{س} < \text{١} \\ \text{٣} & ، \quad \text{١} < \text{س} < \text{٣} \\ \text{غير موجودة} & ، \quad \text{س} = -\text{١} ، \text{١} ، \text{٣} \end{cases}$$

مثال (٨)

اذا كانت قَ(٣) = ١٢ ، فأوجد $\underset{\text{هـ} \leftarrow ٠}{\text{نهـا}} \dfrac{\text{ق}(٣+٥\text{هـ}) - \text{ق}(٣)}{٣\text{هـ}}$

الحل:

نفرض أن ٥ هـ = و فتكون هـ = $\dfrac{\text{و}}{٥}$ ، وعندما هـ ← ٠ فإن و ← ٠

$$\therefore \quad \underset{\text{هـ} \leftarrow ٠}{\text{نهـا}} \frac{\text{ق}(٣+٥\text{هـ}) - \text{ق}(٣)}{٣\text{هـ}} = \underset{\text{و} \leftarrow ٠}{\text{نهـا}} \frac{\text{ق}(٣+\text{و}) - \text{ق}(٣)}{٣ \times \frac{\text{و}}{٥}}$$

$$= \frac{٥}{٣} \underset{\text{و} \leftarrow ٠}{\text{نهـا}} \frac{\text{ق}(٣+\text{و}) - \text{ق}(٣)}{\text{و}}$$

$$= \frac{٥}{٣} \times \text{قَ}(٣) = \frac{٥}{٣} \times ١٢ = ٢٠$$

مثال (٩)

إذا علمت أن قَ(٤) = ٧، قَ(١٢) = ٥ فأوجد $\underset{\text{س} \leftarrow ٤}{\text{نهـا}} \dfrac{\text{ق}(٣\text{س}) - \text{ق}(١٢)}{\text{س} - ٤}$

الحل:

نفرض أن ٣س = ع فتكون س = $\dfrac{\text{ع}}{٣}$ ، وعندما س ← ٤ فإن ع ← ١٢

$$\therefore \quad \underset{\text{س} \leftarrow ٤}{\text{نهـا}} \frac{\text{ق}(٣\text{س}) - \text{ق}(١٢)}{\text{س} - ٤} = \underset{\text{ع} \leftarrow ١٢}{\text{نهـا}} \frac{\text{ق}(\text{ع}) - \text{ق}(١٢)}{\frac{\text{ع}}{٣} - ٤}$$

$$= ٣ \times \underset{\text{ع} \leftarrow ١٢}{\text{نهـا}} \frac{\text{ق}(\text{ع}) - \text{ق}(١٢)}{\text{ع} - ١٢}$$

$$= ٣ \times \text{قَ}(١٢)$$

$$= ٣ \times ٥ = ١٥$$

تمارين (٢-٢)

١ إذا كانت ص = ق(س) وكانت Δص الناتجة عن تغير س من ٢ إلى ٢+Δس معطاة بالعلاقة :

$\Delta\text{ص} = ٦\Delta\text{س} + ٢(\Delta\text{س})^{٢}$ فأوجد $\frac{\text{دص}}{\text{دس}}$ عند س = ٢ .

٢ باستخدام تعريف المشتقة ، جد مشتقة كل من الاقترانات الآتية (إن وجدت) عند النقطة المذكورة إزاء كل منها :

أ $\text{ق(س)} = \text{س}^{٢} - ٥\text{س} + ٣$ ، س = ٢

ب $\text{ق(س)} = \text{س} + \frac{٢}{\text{س}}$ ، س = ١

ج $\text{ص} = |٢\text{س} - ٨|$ ، س = ٤

د $\text{ل(س)} = \begin{cases} \text{س}^{٢} + ٤\text{س} &، \text{س} \le ١ \\ ٨\text{س} - ٣ &، \text{س} > ١ \end{cases}$ ، س = ١

٣ إذا كان $\text{ق(س)} = \sqrt{٥ + ٣\text{س}}$ فأوجد باستخدام التعريف قَ(س) ثم عين مجالها .

٤ إذا كانت قَ(٣) = ٢٤ فأوجد قيمة كلٍ من :

أ $\lim\limits_{\text{و} \to ٠} \frac{\text{ق}(٣ + ٢\text{و}) - \text{ق}(٣)}{٦\text{و}}$

ب $\lim\limits_{\text{و} \to ٠} \frac{\text{ق}(٣ + ٥\text{و}) - \text{ق}(٣ - \text{و})}{١٢\text{و}}$ (إرشاد : أضف واطرح ق(٣) للبسط).

٥ إذا كانت قَ(٥) = ٣ فأوجد $\lim\limits_{\text{س} \to ٤} \frac{\text{ق}(٣\text{س} - ٧) - \text{ق}(٥)}{٢\text{س} - ٨}$.

٦ إذا علمت أن قَ(٣) = ٦ ، وكان هـ(س) = ٣ق(٢س + ٥) ، فأوجد باستخدام تعريف المشتقة هـَ(−١) .

٧ إذا كان $\text{ق(س)} = \begin{cases} \text{س}^{٢} + ٥\text{س} &، \text{س} < ٣ \\ ٢٤ &، \text{س} = ٣ \\ ٩\text{س} - ٣ &، \text{س} > ٣ \end{cases}$

فأوجد : أ $\text{قَ}(٣)^{-}$ ب $\text{قَ}(٣)^{+}$ ج قَ(٣) د قَ(س) .

٨ تتمدد صفيحة مربعة الشكل بحيث تبقى محتفظة بشكلها . احسب معدل تغير مساحتها بالنسبة لطول ضلعها عندما يكون طول الضلع ٢٠ سم .

٢-٣ قواعد الاشتقاق (Rules of Differentiation)

كنا نستخدم سابقاً تعريف المشتقة في ايجاد المشتقة الأولى لاقتران ما، ولتسهيل الحصول على هذه المشتقة يمكننا استخدام القواعد التالية:

قاعدة (١):

إذا كان ق(س) = جـ ، حيث جـ ثابت، فإن ق̀(س) = ٠ $\forall$ س $\in$ ح

البرهان:

$$ق̀(س) = \lim_{هـ \leftarrow ٠} \frac{ق(س+هـ) - ق(س)}{هـ} = \lim_{هـ \leftarrow ٠} \frac{جـ - جـ}{هـ}$$

$$= \lim_{هـ \leftarrow ٠} \frac{٠}{هـ} = \lim_{هـ \leftarrow ٠} ٠ = ٠$$

مثال (١)

إذا كان ق(س) = $\sqrt{١٥}$ فأوجد ق̀(س) ، ق̀(٣).

الحل:

ق̀(س) = ٠ لجميع قيم س $\in$ ح

$\therefore$ ق̀(٣) = ٠

قاعدة (٢):

إذا كان ق(س) = $س^{ن}$ ، ن $\in$ ط* فإن ق̀(س) = ن$س^{ن-١}$

البرهان:

$$ق̀(س) = \lim_{ع \leftarrow س} \frac{ق(ع) - ق(س)}{ع - س}$$

$$= \lim_{ع \leftarrow س} \frac{ع^{ن} - س^{ن}}{ع - س}$$

$$= ن س^{ن-١}$$ (انظر التعميم صفحة ٢٠)

مثال (٢)

إذا كان ق(س) = س^{٥} ، فأوجد ق َ(س) ، ق َ(−٢) .

الحل:

ق َ(س) = ٥س^{٤} ، لجميع قيم س ∋ ح

∴ ق َ(−٢) = ٥ × (−٢)^{٤} = ٨٠

قاعدة (٣):

إذا كان كل من ق(س) ، هـ(س) اقتراناً قابلاً للاشتقاق عند س ، وكانت جـ ∋ ح فإن :

١ ك(س) = جـ × ق(س) قابل للاشتقاق عند س ، ويكون ك َ(س) = جـ × ق َ(س) .

٢ ع(س) = ق(س) + هـ(س) قابل للاشتقاق عند س ، ويكون ع َ(س) = ق َ(س) + هـ َ(س) .

٣ ل(س) = ق(س) − هـ(س) قابل للاشتقاق عند س ، ويكون ل َ(س)= ق َ(س) − هـ َ(س) .

البرهان:

١ $$\text{ك}'(\text{س}) = \underset{\text{و}\to 0}{\text{نهــا}} \frac{\text{ك}(\text{س}+\text{و}) - \text{ك}(\text{س})}{\text{و}}$$

$$= \underset{\text{و}\to 0}{\text{نهــا}} \frac{\text{جـ ق}(\text{س}+\text{و}) - \text{جـ ق}(\text{س})}{\text{و}}$$

$$= \text{جـ} \underset{\text{و}\to 0}{\text{نهــا}} \frac{\text{ق}(\text{س}+\text{و}) - \text{ق}(\text{س})}{\text{و}} = \text{جـ ق}'(\text{س}) .$$

٢ $$\text{ع}'(\text{س}) = \underset{\text{و}\to 0}{\text{نهــا}} \frac{\text{ع}(\text{س}+\text{و}) - \text{ع}(\text{س})}{\text{و}}$$

$$= \underset{\text{و}\to 0}{\text{نهــا}} \frac{(\text{ق}(\text{س}+\text{و}) + \text{هـ}(\text{س}+\text{و})) - (\text{ق}(\text{س}) + \text{هـ}(\text{س}))}{\text{و}}$$

$$= \underset{\text{و}\to 0}{\text{نهــا}} \frac{(\text{ق}(\text{س}+\text{و}) - \text{ق}(\text{س})) + (\text{هـ}(\text{س}+\text{و}) - \text{هـ}(\text{س}))}{\text{و}}$$

$$= \underset{\text{و}\to 0}{\text{نهــا}} \frac{\text{ق}(\text{س}+\text{و}) - \text{ق}(\text{س})}{\text{و}} + \underset{\text{و}\to 0}{\text{نهــا}} \frac{\text{هـ}(\text{س}+\text{و}) - \text{هـ}(\text{س})}{\text{و}}$$

= ق َ(س) + هـ َ(س) وهو المطلوب .

٣ يترك البرهان للطالب .

مثال (٣)

إذا كان ق(س) = ٥س^{٣} + س^{٢} فأوجد قَ(٢) .

الحل:

قَ(س) = ٥ × ٣س^{٢} + ٢س = ١٥س^{٢} + ٢س

∴ قَ(٢) = ١٥ × (٢)^{٢} + ٢ × ٢ = ٦٤

تعميم:

يمكن تعميم قاعدة (٣) لتشمل أكثر من اقترانين قابلين للاشتقاق أي أنه :

إذا كانت ق$_{١}$(س) ، ق$_{٢}$(س)، . . . ، ق$_{ن}$(س) اقترانات قابلة للاشتقاق عند س ،

وكانت جـ$_{١}$، جـ$_{٢}$، . . . ، جـ$_{ن}$ ∈ ح فإن :

(جـ$_{١}$ ق$_{١}$(س) ∓ جـ$_{٢}$ ق$_{٢}$(س) ∓ . . . ∓ جـ$_{ن}$ ق$_{ن}$(س))َ = جـ$_{١}$ قَ$_{١}$(س) ∓ جـ$_{٢}$ قَ$_{٢}$(س) ∓ . . . ∓ جـ$_{ن}$ قَ$_{ن}$(س) .

وبوجهٍ خاص :

إذا كان ق(س) = أ$_{ن}$ س^{ن} + أ$_{ن-١}$ س$^{ن-١}$ + . . . + أ$_{١}$ س + أ$_{٠}$ اقتراناً كثير حدود، فإن ق(س) قابل للاشتقاق ∀ س ∈ ح ، ويكون قَ(س) = أ$_{ن}$ × ن س$^{ن-١}$ + أ$_{ن-١}$ × (ن-١) س$^{ن-٢}$ + . . . + أ$_{١}$

مثال (٤)

إذا كان هـ(س) = ٢س^{٤} – ٣س^{٣} + ٤س^{٢} – ٥س + ١١ فأوجد هـَ(س) .

الحل:

هـَ(س) = ٨س^{٣} – ٩س^{٢} + ٨س – ٥

مثال (٥)

إذا كان ق(س) = س^{٢}+٣س ، وكان ل(س) = ق(س)+٣هـ(س)، هـ(٢) = ٥ ، هـَ(٢) = ١

فأوجد لَ(٢) .

الحل:

لَ(س) = قَ(س) + ٣هـَ(س)

= (٢س + ٣) + ٣هـَ(س)

⇐ لَ(٢) = (٢ × ٢ + ٣) + ٣هـَ(٢)

= ٧ + ٣ × ١ = ١٠

قاعدة (٤):

مشتقة حاصل ضرب اقترانين:

إذا كان كلٌّ من ق(س)، هـ(س) اقتراناً قابلاً للاشتقاق عند س، وكان ل(س) = ق(س) × هـ(س) فإن :
ل(س) قابل للاشتقاق عند س، ويكون لَ(س) = ق(س) × هـَ(س) + هـ(س) × قَ(س) .

البرهان:

$$\text{لَ(س)} = \underset{\text{و}\to 0}{\text{نهـا}} \frac{\text{ل(س + و) – ل(س)}}{\text{و}}$$

$$= \underset{\text{و}\to 0}{\text{نهـا}} \frac{\text{ق(س + و)} \times \text{هـ(س + و) – ق(س)} \times \text{هـ(س)}}{\text{و}}$$

$$= \underset{\text{و}\to 0}{\text{نهـا}} \frac{\text{ق(س + و) هـ(س + و) – ق(س + و) هـ(س) + ق(س + و) هـ(س) – ق(س) هـ(س)}}{\text{و}}$$

(باضافة وطرح المقدار ق(س + و) هـ(س) في البسط)

$$= \underset{\text{و}\to 0}{\text{نهـا}} \frac{\text{ق(س + و)}\Big(\text{هـ(س + و) – هـ(س)}\Big) + \text{هـ(س)}\Big(\text{ق(س + و) – ق(س)}\Big)}{\text{و}}$$

$$= \underset{\text{و}\to 0}{\text{نهـا}} \text{ق(س + و)} \frac{\text{هـ(س + و) – هـ(س)}}{\text{و}} + \underset{\text{و}\to 0}{\text{نهـا}} \text{هـ(س)} \frac{\text{ق(س + و) – ق(س)}}{\text{و}}$$

= ق(س) × هـَ(س) + هـ(س) × قَ(س)   وهو المطلوب .

أي أن مشتقة حاصل ضرب اقترانين قابلين للاشتقاق = الأول × مشتقة الثاني + الثاني × مشتقة الأول

مثال (٦)

إذا كانت ص = (س^{٢}+٥س–١)(٣س+٤)، فأوجد $\frac{\text{د ص}}{\text{د س}}$.

الحل:

$$\frac{\text{د ص}}{\text{د س}} = \text{(س}^{٢}\text{+٥س–١)} \times ٣ + \text{(٣س+٤)(٢س+٥)}$$

$$= \text{٣س}^{٢}\text{+١٥س–٣ + ٦س}^{٢}\text{+٢٣س+٢٠}$$

$$= \text{٩س}^{٢}\text{+٣٨س+١٧}$$

لاحظ أنه بالضرب المباشر تكون ص =٣س^{٣}+١٩س^{٢}+١٧س−٤

ومنها $\frac{د\,ص}{د\,س}$ = ٩س^{٢}+٣٨س+١٧ لاحظ تطابق النتيجتين .

مثال (٧)

إذا كان ق(س) = (س^{٣}+٢س^{٢}−٤س+١)(٢س^{٣}−س^{٢}+س−٣) فأوجد قَ(١) .

الحل:

قَ(س) = (س^{٣}+٢س^{٢}−٤س+١)(٦س^{٢}−٢س+١)+(٢س^{٣}− س^{٢}+س−٣)(٣س^{٢}+٤س−٤)

وبتعويض س = ١ نحصل على :

قَ(١) = صفر × ٥ + −١ × ٣ = −٣

مثال (٨)

إذا كان ق(س)=(س^{٢}+٥س−١١)×هـ(س)، فأوجد قَ(٢) علماً بأن هـَ(٢) = ٥ ، هـ(٢) = ٤ .

الحل:

قَ(س) = (س^{٢}+٥س−١١)×هـَ(س) + هـ(س) × (٢س+٥)

⇐ قَ(٢) = ٣ × هـَ(٢) + هـ(٢) × ٩

بالتعويض ينتج :

قَ(٢) = ٣ × ٥ + ٤ × ٩ = ٥١

قاعدة (٥): مشتقة مقلوب اقتران:

إذا كان ل(س) = $\frac{١}{ق(س)}$ ، ق(س) ≠ ٠ ، وكان ق(س) قابلاً للاشتقاق عند س فإن :

ل(س) قابل للاشتقاق عند س ويكون لَ(س) = $\frac{-قَ(س)}{(ق(س))^{٢}}$

البرهان:

$$لَ(س) = \lim_{هـ \to ٠} \frac{ل(س+هـ) - ل(س)}{هـ}$$

$$= \lim_{هـ \to ٠} \frac{١}{هـ}\left(\frac{١}{ق(س+هـ)} - \frac{١}{ق(س)}\right) = \lim_{هـ \to ٠} \frac{١}{هـ}\left(\frac{ق(س) - ق(س+هـ)}{ق(س+هـ)\,ق(س)}\right)$$

$$= \lim_{هـ \leftarrow 0} \left(\frac{-1\left(ق(س+هـ)-ق(س)\right)}{هـ} \times \frac{1}{ق(س + هـ)\, ق(س)} \right)$$

$$= -1 \lim_{هـ \leftarrow 0} \frac{\left(ق(س+هـ)-ق(س)\right)}{هـ} \times \lim_{هـ \leftarrow 0} \frac{1}{ق(س + هـ)\, ق(س)}$$

$$= -1 \times قَ(س) \times \frac{1}{(ق(س))^2} = \frac{-قَ(س)}{(ق(س))^2}$$

قاعدة (٦): مشتقة ناتج قسمة اقترانين:

إذا كان كل من ق(س)، هـ(س) قابلاً للاشتقاق عند س، هـ(س) $\neq$ ٠ فإن:

ل(س) = $\frac{ق(س)}{هـ(س)}$ قابل للاشتقاق عند س ويكون لَ(س) = $\frac{هـ(س)قَ(س) - ق(س)\, هـَ(س)}{(هـ(س))^2}$

البرهان:

ل(س) = $\frac{ق(س)}{هـ(س)}$ = ق(س) × $\frac{1}{هـ(س)}$ ، هـ(س) $\neq$ ٠

وبما أن ق(س)، $\frac{1}{هـ(س)}$ قابلان للاشتقاق عند س

∴ حاصل الضرب وهو الاقتران ل(س) قابل للاشتقاق عند س ويكون:

$$لَ(س) = ق(س) \times \frac{-هـَ(س)}{(هـ(س))^2} + قَ(س) \times \frac{1}{هـ(س)}$$

$$= \frac{-ق(س)\ هـَ(س)}{(هـ(س))^2} + \frac{قَ(س)}{هـ(س)}$$

$$= \frac{-ق(س) \times هـَ(س) + قَ(س) \times هـ(س)}{(هـ(س))^2} = \frac{هـ(س) \times قَ(س) - ق(س) \times هـَ(س)}{(هـ(س))^2}$$

أي أن مشتقة ناتج قسمة اقترانين قابلين للاشتقاق = $\frac{\text{المقام} \times \text{مشتقة البسط} - \text{البسط} \times \text{مشتقة المقام}}{(\text{المقام})^2}$

مثال (٩)

إذا كان ق(س) = $\frac{٣س + ١}{٢س - ٥}$ ، س $\neq \frac{٥}{٢}$ ، فأوجد قَ(س).

الحل:

قَ(س) = $\frac{(٢س - ٥) \times ٣ - (٣س + ١) \times ٢}{(٢س - ٥)^2}$ = $\frac{-١٧}{(٢س - ٥)^2}$ ، س $\neq \frac{٥}{٢}$

مثال (١٠)

إذا كان هـ(س) = $\frac{\text{ق(س)}}{\text{٥س + ٦}}$ ، س $\neq$ $\frac{-٦}{٥}$ ، فأوجد هـَ(٣) علماً بأن :

ق(٣) = ١٥ ، قَ(٣) = $\frac{١}{٧}$

الحل:

هـَ(س) = $\frac{\text{(٥س + ٦)} \times \text{قَ(س)} - \text{ق(س)} \times ٥}{\text{(٥س + ٦)}^{٢}}$

$\Leftarrow$ هـَ(٣) = $\frac{٢١ \text{ قَ(٣)} - \text{ق(٣)} \times ٥}{(٢١)^{٢}}$ . . . . (١)

بالتعويض في (١) ينتج أن :

هـَ(٣) = $\frac{٢١ \times \frac{١}{٧} - ١٥ \times ٥}{(٢١)^{٢}}$ = $\frac{-٧٢}{٤٤١}$ = $\frac{-٨}{٤٩}$

نتيجة:

إذا كانت ص = س$^{-ن}$: ن $\in$ ط* فإن : $\frac{\text{د ص}}{\text{د س}}$ = ـن س$^{-ن-١}$

أي أن قاعدة الاشتقاق في حالة الأسس الصحيحة الموجبة تنطبق أيضاً في حالة الأسس الصحيحة السالبة .

البرهان:

ص = س$^{-ن}$ = $\frac{١}{\text{س}^{ن}}$ ، ن $\in$ ط*

$\frac{\text{د ص}}{\text{د س}}$ = $\frac{\text{ـن س}^{ن-١}}{\text{س}^{٢ن}}$ = ـن س$^{ن-١-٢ن}$ = ـن س$^{-ن-١}$

مثال (١١)

إذا كان ق(س) = س$^{-٣}$ فأوجد قَ(٢) .

الحل:

قَ(س) = ـ٣س$^{-٤}$ = $\frac{-٣}{\text{س}^{٤}}$

$\Leftarrow$ قَ(٢) = $\frac{-٣}{٢^{٤}}$ = $\frac{-٣}{١٦}$

مثال (١٢)

إذا كان ق(س) = $\frac{٥}{٢س}$ + $\frac{٤}{س^٢}$ ، س ≠ ٠ فأوجد قَ(س) .

الحل:

$$ق(س) = \frac{٥}{٢} س^{-١} + ٤ س^{-٢} ، س \neq ٠$$

$$\Leftarrow \quad قَ(س) = \frac{٥}{٢} \times -١ س^{-٢} + ٤ \times -٢ س^{-٣}$$

$$= \frac{-٥}{٢} \times \frac{١}{س^٢} - ٨ \times \frac{١}{س^٣}$$

$$= \frac{-٥}{٢س^٢} - \frac{٨}{س^٣}$$

المشتقات العليا:

إذا كان ص = ق(س) اقتراناً قابلاً للاشتقاق، فإن المشتقة قَ(س) تمثل اقتراناً آخر يسمى الاقتران المشتق للاقتران ق(س) أو المشتقة الأولى للاقتران ق(س). والمشتقة الأولى للاقتران المشتق أي $\frac{د}{د س}\left(\frac{د ص}{د س}\right)$ تسمى المشتقة الثانية للاقتران ق(س)، ويرمز لها بالرمز $\frac{د^٢ص}{د س^٢}$ (وتقرأ دال اثنين ص دال س تربيع)، أو قً(س). وبالمثل يرمز للمشتقة الثالثة للاقتران ق(س) بالرمز $\frac{د}{د س}\left(\frac{د^٢ص}{د س^٢}\right)$ أو $\frac{د^٣ص}{د س^٣}$ أو $ق^{(٣)}(س)$.

وبوجه عام، فإننا نعرف المشتقة النونية للاقتران ص = ق(س)، والتي يرمز لها بالرمز $ق^{(ن)}(س)$ أو $\frac{د^نص}{د س^ن}$ بأنها $\frac{د}{د س}\left(\frac{د^{ن-١}ص}{د س^{ن-١}}\right)$.

مثال (١٣)

جد المشتقة الأولى والثانية والثالثة للاقتران ص = $س^٤ - ٢س^٣ + ٥س + ٢$.

الحل:

$$\frac{د ص}{د س} = ٤س^٣ - ٦س^٢ + ٥$$

$$\frac{د^٢ص}{د س^٢} = \frac{د}{د س}(٤س^٣-٦س^٢+٥) = ١٢س^٢-١٢س$$

$$\frac{د^٣ص}{د س^٣} = \frac{د}{د س}(١٢س^٢ - ١٢س) = ٢٤س - ١٢$$

تمارين (٢-٣)

١ جد مشتقة كل من الاقترانات التالية:

أ $ق(س) = س^٣ - ٢س^٢ + ٥س - ٣$

ب $جـ(س) = (٣س+٢)(س^٢+٤)$

جـ $ص = \frac{٢}{٣} س^٣ - ٤س^٢ + ٥س + ٣$

د $ف = \frac{٥}{٤} ن^٤ - \frac{ن^٣}{٣} + ٦ن - \sqrt{٧}$

هـ $ق(س) = ٢س(س^٢ - ٣س + ٨)$

و $هـ(س) = \frac{٢س + ٥}{٣س - ١}$

ز $ل(س) = (س+١)(٢س+١)(٣س+٥)$

ح $م(س) = (٣س+٢) \times \frac{س - ٣}{٢س - ١}$

٢ إذا كان $ق(٣) = -٢$ ، $هـ(٣) = ٣$ ، $ق'(٣) = ٥$ ، $هـ'(٣) = ١$ فأوجد:

أ $(٢ق(س) + ٣هـ(س))'(٣)$

ب $\frac{د}{د س}\left(س^٢ \times ق(س)\right)\Big|_{س=٣}$

جـ $\frac{د}{د س}\left(\frac{٢}{هـ(س)}\right)\Big|_{س=٣}$

د $\frac{د}{د س}\left(\frac{٣ق(س)}{٥هـ(س)}\right)\Big|_{س=٣}$

٣ إذا كان $ق(س) = أس^٢ + ب س + ٢$ وكان $ق(١) = ق'(١) = ٧$ ، فأوجد الثابتين أ ، ب .

٤ جد المشتقة الثانية لكل من الاقترانات التالية:

أ $ق(س) = ٢س^٤ - س^٣ + ٢س^٢ + ٧$

ب $هـ(س) = \frac{١}{س}$ ، $س \neq ٠$

٥ إذا كان $ق'(١) = ٣$ ، $ق(١) = ٢$ ، وكان $م(س) = س ق(س)$ فأوجد $م'(١)$.

٦ إذا كان $ق(س) = \begin{cases} س^٢ + ٢س & ، \quad س \leq ١ \\ ٢س + ١ & ، \quad س > ١ \end{cases}$ ، فأجد $ق'(س)$.

٧ إذا كان $ل(س) = ق(س) \times هـ(س)$ فأوجد:

$ل''(س)$، علماً بأن المشتقة الأولى والثانية للاقترانين ق (س) ، هـ (س) موجودتان.

٢-٤ الاتصال وقابلية الاشتقاق (Continuity and Differentiability)

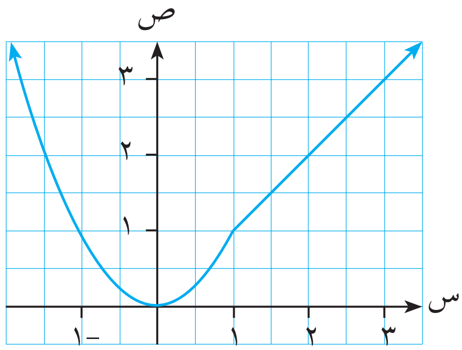
مر معنا مفهوما الاتصال والاشتقاق كل على حدة، فهل من علاقة تربط بين المفهومين؟ لندرس المثال التالي:

مثال (١)

الشكل (٢-٥) يمثل منحنى الاقتران:

$$\text{ق(س)} = \begin{cases} \text{س}^{٢} & \text{،} \quad \text{س} \le ١ \\ \text{س} & \text{،} \quad \text{س} > ١ \end{cases}$$

ادرس قابلية الاقتران للاشتقاق عند س = ٠ ، ١



الشكل (٢-٥)

الحل:

أ عند س = ٠

في جوار س = ٠ ، ق(س) = $\text{س}^{٢}$

∴ قَ(س) = ٢س

∴ قَ(٠) = ٠

ب عند س = ١:

عند س = ١ يغير الاقتران ق(س) تعريفه، وفي هذه الحالة تلزم دراسة المشتقتين اليمنى واليسرى:

١ $$\text{قَ}(١)^{+} = \underset{\text{هـ} \to ٠^{+}}{\text{نهــا}} \frac{\text{ق}(١ + \text{هـ}) - \text{ق}(١)}{\text{هـ}}$$

$$= \underset{\text{هـ} \to ٠^{+}}{\text{نهــا}} \frac{(١ + \text{هـ}) - ١^{٢}}{\text{هـ}}$$

$$= \underset{\text{هـ} \to ٠^{+}}{\text{نهــا}} \frac{\text{هـ}}{\text{هـ}} = \underset{\text{هـ} \to ٠^{+}}{\text{نهــا}} ١ = ١$$

٢ $$\text{قَ}(١)^{-} = \underset{\text{هـ} \to ٠^{-}}{\text{نهــا}} \frac{\text{ق}(١ + \text{هـ}) - \text{ق}(١)}{\text{هـ}}$$

$$= \underset{\text{هـ} \to ٠^{-}}{\text{نهــا}} \frac{(١ + \text{هـ})^{٢} - ١^{٢}}{\text{هـ}}$$

$$= \underset{\text{هـ} \to ٠^{-}}{\text{نهــا}} \frac{٢\text{هـ} + \text{هـ}^{٢}}{\text{هـ}} = \underset{\text{هـ} \to ٠^{-}}{\text{نهــا}} (٢ + \text{هـ}) = ٢$$

وبما أن $\text{قَ}(١)^{+} \ne \text{قَ}(١)^{-}$

∴ ق(س) غير قابل للاشتقاق عند س = ١

لاحظ أن الاقتران ق(س) متصل عند س = ٠ وقابل للاشتقاق عندها، وأنه متصل عند س = ١ ولكنه غير قابل للاشتقاق عندها، أي أن اتصال الاقتران عند نقطة لا يعني بالضرورة قابليته للاشتقاق عندها.

ولكن ماذا عن العكس؟ هل قابلية الاشتقاق عند نقطة تتضمن الاتصال عند تلك النقطة؟

النظرية التالية تجيب عن هذا التساؤل.

نظرية:

أذا كان الاقتران ق(س) اقتراناً قابلاً للاشتقاق عند س = $س_١$ فإن الاقتران ق(س) يكون متصلاً عند س = $س_١$

البرهان:

يكون الاقتران ق(س) متصلاً عند س = $س_١$

إذا كان $\lim\limits_{س \leftarrow س_١}$ ق(س) = ق($س_١$) أي $\lim\limits_{س \leftarrow س_١}$ (ق(س) − ق($س_١$)) = صفر

المقدار ق(س) − ق($س_١$) = $\frac{ق(س)-ق(س_١)}{س - س_١}$ × (س − $س_١$) (بالضرب والقسمة على المقدار (س − $س_١$))

∴ $\lim\limits_{س \leftarrow س_١}$ (ق(س) − ق($س_١$)) = $\lim\limits_{س \leftarrow س_١}$ $\frac{ق(س)-ق(س_١)}{س - س_١}$ × (س − $س_١$)

= $\lim\limits_{س \leftarrow س_١}$ $\frac{ق(س)-ق(س_١)}{س - س_١}$ × $\lim\limits_{س \leftarrow س_١}$ (س − $س_١$)

= قَ($س_١$) × صفر = صفر

∴ $\lim\limits_{س \leftarrow س_١}$ (ق(س) − ق($س_١$)) = صفر

مثال (٢)

إذا كان ق(س) = $\begin{cases} ٢س^٢ + ٥ & ، \quad س \leq ١ \\ ٤س + م & ، \quad س > ١ \end{cases}$

قابلاً للاشتقاق عند س = ١ . فأوجد قيمة الثابت م .

الحل:

ق(س) قابل للاشتقاق عند س = ١ ، فهو متصل عند س = ١

∴ $\lim\limits_{س \leftarrow ١^+}$ ق(س) = $\lim\limits_{س \leftarrow ١^-}$ ق(س) = ق(١)

٤ + م = ٧

م = ٣

ملاحظة:

النظرية السابقة تكافئ المعاكس الايجابي لها وهو العبارة :

إذا كان ق(س) اقتراناً غير متصل عند س = س$_1$ فإن ق(س) غير قابل للاشتقاق عند س = س$_1$

مثال (٢)

إذا كان ق(س) = $\begin{cases} \text{س}^3 + 5\text{س}^2 + 2 &، \text{س} \leq 1 \\ \text{س}^2 + 2\text{س} &، \text{س} > 1 \end{cases}$

فابحث في قابلية الاقتران ق(س) للاشتقاق عند س = ١

الحل:

نبحث أولاً في اتصال ق(س) عند س = ١ :

ق(١) = ١ + ٥ + ٢ = ٨

$\lim\limits_{\text{س} \to 1^-}$ ق(س) = $\lim\limits_{\text{س} \to 1^-}$ (س^3 + ٥ س^2 + ٢) = ٨

$\lim\limits_{\text{س} \to 1^+}$ ق(س) = $\lim\limits_{\text{س} \to 1^+}$ (س^2 + ٢ س) = ٣

$\therefore$ ق(س) منفصل عند س = ١

وبالتالي فإن ق(س) غير قابل للاشتقاق عند س = ١

مثال (٣)

إذا كان ق(س) = $\begin{cases} \text{س}^2 + 4\text{س} - 5 &، \text{س} < 2 \\ 3\text{س} + 1 &، \text{س} \geq 2 \end{cases}$

فابحث في قابلية الاقتران ق(س) للاشتقاق عند س = ٢

الحل:

ندرس أولاً اتصال ق(س) عند س=٢ فنجد أن :

ق(٢)= ٣ × ٢ + ١ = ٧

$\lim\limits_{\text{س} \to 2^+}$ ق(س) = $\lim\limits_{\text{س} \to 2^+}$ (٣س + ١) = ٧

$\lim\limits_{\text{س} \to 2^-}$ ق(س) = $\lim\limits_{\text{س} \to 2^-}$ (س^2+٤ س −٥) = ٧

$\therefore$ ق(س) متصل عند س = ٢

لا يمكننا الحكم بناء على ذلك إن كان ق(س) قابلاً للاشتقاق أم لا ، ولهذا نلجأ لاستخدام

التعريف، مع مراعاة أن الاقتران يغير تعريفه عند س = ٢ مما يستوجب حساب المشتقتين اليمنى واليسرى عندها:

$$\text{قَ}(٢)^{+} = \underset{س \leftarrow ٢^{+}}{\text{نهـا}} \frac{\text{ق}(س)-\text{ق}(٢)}{س - ٢} = \underset{س \leftarrow ٢^{+}}{\text{نهـا}} \frac{(٣س+١)-(٤+٨-٥)}{س - ٢}$$

$$= \underset{س \leftarrow ٢^{+}}{\text{نهـا}} \frac{٣س-٦}{س - ٢} = \underset{س \leftarrow ٢^{+}}{\text{نهـا}} ٣ = ٣$$

$$\text{قَ}(٢)^{-} = \underset{س \leftarrow ٢^{-}}{\text{نهـا}} \frac{\text{ق}(س)-\text{ق}(٢)}{س - ٢} = \underset{س \leftarrow ٢^{-}}{\text{نهـا}} \frac{(س^{٢}+٤س-٥) - (٤+٨-٥)}{س - ٢}$$

$$= \underset{س \leftarrow ٢^{-}}{\text{نهـا}} \frac{س^{٢}+٤س-١٢}{س - ٢} = \underset{س \leftarrow ٢^{-}}{\text{نهـا}} \frac{(س-٢)(س+٦)}{س - ٢} = ٨$$

وعليه فإن قَ(٢) غير موجودة، أي أن ق(س) غير قابل للاشتقاق عند س = ٢ .

مثال (٤)

إذا كان ق(س) = $\begin{cases} س^{٢} & ، \quad س < ١ \\ ٢س-١ & ، \quad س \geq ١ \end{cases}$ فأوجد الاقتران المشتق قَ(س).

الحل:

$$\text{قَ}(س) = \begin{cases} ٢س & ، \quad س < ١ \\ ٢ & ، \quad س > ١ \end{cases}$$

ولايجاد قَ(١) نبحث في اتصال الاقتران ق (س) عند س = ١ .

الاقتران ق (س) متصل عند س = ١ . (تحقق من ذلك)

أ

$$\text{قَ}(١)^{+} = \underset{س \leftarrow ١^{+}}{\text{نهـا}} \frac{\text{ق}(س) - \text{ق}(١)}{س - ١}$$

$$= \underset{س \leftarrow ١^{+}}{\text{نهـا}} \frac{(٢س-١) - (٢-١)}{س - ١} = \underset{س \leftarrow ١^{+}}{\text{نهـا}} \frac{٢س-٢}{س - ١}$$

$$= \underset{س \leftarrow ١^{+}}{\text{نهـا}} \frac{٢(س-١)}{س - ١} = ٢$$

ب

$$\text{قَ}(١)^{-} = \underset{س \leftarrow ١^{-}}{\text{نهـا}} \frac{\text{ق}(س) - \text{ق}(١)}{س - ١}$$

$$= \underset{س \leftarrow ١^{-}}{\text{نهـا}} \frac{س^{٢} - ١}{س - ١} = \underset{س \leftarrow ١^{-}}{\text{نهـا}} س + ١ = ٢$$

$\Leftarrow$ $\acute{ق}(1) = 2$ وبالتالي : $\acute{ق}(س) = \begin{cases} 2س & ، س < 1 \\ 2 & ، س > 1 \\ 2 & ، س = 1 \end{cases}$

نلاحظ في المثال السابق أن : $\acute{ق}(1)^+ = \underset{س \leftarrow 1^+}{نهـا} \acute{ق}(س)$ ، $\acute{ق}(1)^- = \underset{س \leftarrow 1^-}{نهـا} \acute{ق}(س)$

وهذا يزودنا بطريقة أخرى غير طريقة التعريف لإيجاد المشتقة عند النقطة التي يغير عندها الاقتران تعريفه إذا كان متصلاً .

مثال (٥)

إذا كان ق(س) $= \begin{cases} س^3 - س^2 + 8 & ، س \leq 2 \\ س^2 + 4س & ، س > 2 \end{cases}$ فأوجد $\acute{ق}(س)$.

الحل:

$\acute{ق}(س) = \begin{cases} 3س^2 - 2س & ، س < 2 \\ 2س + 4 & ، س > 2 \end{cases}$

ولايجاد $\acute{ق}(2)$ دون اللجوء إلى التعريف :

أ ندرس اتصال ق(س) عند س = ٢

$ق(2) = 8 - 4 + 8 = 12$

$\underset{س \leftarrow 2^-}{نهـا} ق(س) = \underset{س \leftarrow 2^-}{نهـا} (س^3 - س^2 + 8) = 12$

$\underset{س \leftarrow 2^+}{نهـا} ق(س) = \underset{س \leftarrow 2^+}{نهـا} (س^2 + 4س) = 12$

$\therefore$ ق(س) متصل عند س = ٢ .

ب $\acute{ق}(2)^+ = \underset{س \leftarrow 2^+}{نهـا} \acute{ق}(س) = \underset{س \leftarrow 2^+}{نهـا} (2س + 4) = 8$

$\acute{ق}(2)^- = \underset{س \leftarrow 2^-}{نهـا} \acute{ق}(س) = \underset{س \leftarrow 2^-}{نهـا} (3س^2 - 2س) = 8$

$\therefore$ $\acute{ق}(2) = 8$

$\Leftarrow$ $\acute{ق}(س) = \begin{cases} 3س^2 - 2س & ، س < 2 \\ 2س + 4 & ، س > 2 \\ 8 & ، س = 2 \end{cases}$

تمارين (٢-٤)

١ أبحث في قابلية الاقترانات التالية للاشتقاق عند النقطة / النقط المذكورة إزاء كل منها :

أ ق(س) = $\begin{cases} ٣س^٢ - س + ٥ &، س \leq ٢ \\ س^٣ + س^٢ - ٥س &، س > ٢ \end{cases}$ ، س = ٢

ب ل(س) = |س| ، س = ٠ ، ١

جـ هـ(س) = [س] ، س = $\frac{٣}{٢}$ ، ١

٢ إذا كان ق(س) = $\begin{cases} س^٢ - أس + ب &، س \leq ١ \\ ٤ &، س > ١ \end{cases}$

قابلاً للاشتقاق عند س = ١ فأوجد الثابتين أ ، ب .

٣ إذا كان ق(س) = $\begin{cases} س^٢ + ١ &، س \geq ٠ \\ س + أ &، س < ٠ \end{cases}$

ما قيمة أ التي تجعل الاقتران ق(س) متصلاً عند س = ٠ ؟

وهل هذه القيمة لِـ أ تجعل الاقتران ق(س) قابلاً للاشتقاق عند س = ٠ ؟

٤ إذا كان ق(س) = $|س|^٣$ فأوجد قَ(س) .

٥ إذا كان ق(س) = $\begin{cases} [٢س+٣] &، ١ \leq س < ١,٥ \\ |س-٢| &، ١,٥ \leq س < ٢ \end{cases}$ ، فأوجد قَ(س) .

٦ العبارتان الآتيتان خاطئتان . أعط مثالاً يوضح خطأ كلٍ منهما .

أ إذا كان ق(س) اقتراناً بحيث إن قَ(١) = ٣ فإن قَ(٢) = ٦ .

ب إذا كان كلٌّ من ق(س) ، هـ(س) اقتراناً غير قابل للاشتقاق عند س = أ فإن مجموعهما غير قابل للاشتقاق عند س = أ

٢-٥ تطبيقات على الاشتقاق

(١) تطبيقات هندسية (المماس والعمودي):

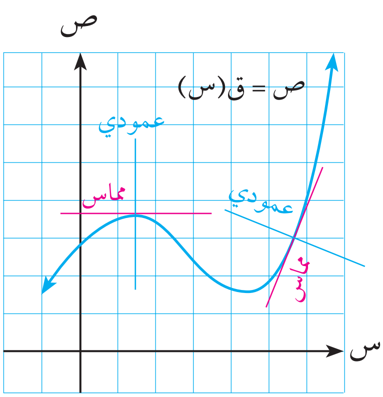
مر معنا أن المشتقة الأولى للاقتران ق(س) عند نقطة في مجاله تمثل ميل المماس المرسوم لمنحنى الاقتران عند تلك النقطة، أي أن قَ(أ) = ميل المماس المرسوم لمنحنى ق(س) عند النقطة (أ ، ق(أ)) الواقعة عليه والتي تسمى نقطة التماس.

تعريف:

يعرف ميل منحنى اقتران عند نقطة عليه بأنه ميل المماس المرسوم لهذا المنحنى عند تلك النقطة.

تعريف:

يعرف العمودي على منحنى اقتران عند نقطة عليه بأنه العمودي على مماس المنحنى عند تلك النقطة.



الشكل (٢-٦)

لاحظ الشكل (٢-٦):

مثال (١)

رسم مماس لمنحنى الاقتران ق(س) = س^{٢} − ٣س + ٤ عند النقطة (١ ، ٢) الواقعة عليه.

جد معادلة هذا المماس وكذلك زاوية ميله.

الحل:

قَ(س) = ٢س − ٣

⇐ ميل المماس = قَ(١) = ٢×١ − ٣ = −١

معادلة المماس هي:

ص − ص$_{١}$ = م(س − س$_{١}$)

ص − ٢ = −١(س − ١)

ص − ٢ = −س + ١

ص = −س + ٣

نفرض أن زاوية ميل هذا المماس = هـ

⇐ ظا هـ = −١

⇐ هـ = ١٣٥° = $\frac{٣}{٤}\pi$،

مثال (٢)

رسم مماس لمنحنى ق(س) = $س^٢$+س−٢ عند نقطة عليه فكان ميله= ٧ .

جد إحداثيي نقطة التماس .

الحل:

قَ(س) = ٢س + ١

بفرض أن نقطة التماس (أ ، ق(أ))، يكون ميل المماس = ٢أ +١

٢أ + ١ = ٧ ، ومنها أ = ٣

∴ نقطة التماس هي(٣، ق(٣)) = (٣، ١٠)

مثال (٣)

جد ميل منحنى الاقتران ق(س) = $\frac{٢س}{٣س - ٢}$ عند النقطة (٢ ، ١) الواقعة عليه .

ثم جد معادلة العمودي على منحنى ق(س) عند هذه النقطة .

الحل:

قَ(س) = $\frac{(٣س-٢)(٢)-٢س \times ٣}{(٣س-٢)^٢}$

ميل مماس المنحنى عند النقطة (٢ ، ١) يساوي قَ(٢) = $\frac{(٦-٢)\times ٢-٤\times ٣}{(٦-٢)^٢}$ = $\frac{-٤}{١٦}$ = $\frac{-١}{٤}$

∴ ميل منحنى الاقتران عند هذه النقطة = $\frac{-١}{٤}$

وبفرض أن ميل العمودي على المنحنى = م ، يكون م × $\frac{-١}{٤}$ = −١ ، ومنها م = ٤

معادلة العمودي على المنحنى عند هذه النقطة هي : ص − $ص_١$ = م (س − $س_١$)

(ص−١) = ٤(س−٢)

ص = ٤س − ٧

مثال (٤)

جد معادلة المماس المرسوم لمنحنى الاقتران ق(س) = $س^٢$−س−٧

الذي يعامد المستقيم س + ٣ص = ١١

الحل:

ميل العمودي على المماس = ميل المستقيم س + ٣ص = ١١

= ميل المستقيم ص = $\frac{١١}{٣}$ − $\frac{١}{٣}$ س

= − $\frac{١}{٣}$ (لاحظ أن $\frac{دص}{دس}$ = − $\frac{١}{٣}$)

⇐ ميل المماس = ٣

قَ(س) = ٢س − ١

وبفرض أن نقطة التماس (م ، ق(م)) يكون ميل المماس = ٢م−١

∴ ٢م−١ = ٣ ، ومنها م = ٢

∴ نقطة التماس هي (٢ ، ق(٢)) = (٢ ، −٥)

معادلة المماس هي : ص − $ص_١$ = م (س − $س_١$)

(ص+٥) = ٣(س−٢)

ص = ٣س − ١١

مثال (٥)

إذا كان المستقيم ص = ٥س + م مماساً لمنحنى الاقتران ق(س) = ٢$س^٢$+ س − ٣،

فأوجد قيمة الثابت م .

الحل:

ميل المماس = $\frac{\text{دص}}{\text{دس}}$ = ٥ ، قَ(س) = ٤س + ١

وبفرض أن نقطة التماس (ب، ق(ب)) يكون ميل المماس = ٤ب + ١

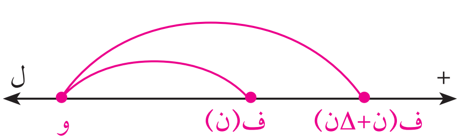
٤ب+١ = ٥ ، ومنها ب = ١

∴ نقطة التماس هي (١ ، ق(١)) = (١ ، ٠)

لكن هذه النقطة تقع على المماس فهي تحقق معادلته أي أن : صفر = ٥×١ + م ، ومنها م = −٥

(٢) تطبيقات فيزيائية (السرعة والتسارع):

لتكن و نقطة ثابتة على الخط المستقيم ل المبين في الشكل (٢−٧) .



الشكل (٢−٧)

أ إذا تحرك جسم على هذا المستقيم بحيث كانت ف تمثل إزاحة الجسم عن النقطة و عند الزمن ن فإن السرعة المتوسطة لهذا الجسم في الفترة الزمنية [ن، ن + Δن] هي $\frac{\Delta \text{ف}}{\Delta \text{ن}} = \frac{\text{ف(ن + Δن) − ف(ن)}}{\Delta \text{ن}}$

أما $\lim_{\Delta \text{ن} \to ٠} \frac{\Delta \text{ف}}{\Delta \text{ن}}$ وتساوي $\frac{\text{د ف}}{\text{د ن}}$ فتسمى السرعة اللحظية للجسم عند الزمن ن ويرمز لها بالرمز ع .

ب وبطريقة مماثلة يعرف التسارع المتوسط للجسم في الفترة الزمنية [ن، ن + Δن] بأنه $\frac{\Delta ع}{\Delta ن}$

ويكون التسارع اللحظي ت = $\frac{دع}{دن} = \frac{د}{دن}\left(\frac{دف}{دن}\right) = \frac{د^{٢}ف}{دن^{٢}}$

مثال (٦)

يتحرك جسم على خط مستقيم تبعاً للعلاقة ف(ن) = ن^{٣} + ٢ن^{٢}، حيث ف إزاحة الجسم بالأمتار عن نقطة ثابتة و على خط الحركة، ن الزمن بالثواني. أوجد:

أ السرعة المتوسطة بين ن=١، ن=٣ ب السرعة عند ن =٤

جـ التسارع المتوسط في الفترة الزمنية [٢ ، ٥] د التسارع عند ن = ٣

الحل:

ف(ن) = ن^{٣} + ٢ن^{٢}

أ السرعة المتوسطة = $\frac{\Delta ف}{\Delta ن} = \frac{ف(٣) - ف(١)}{٣ - ١} = \frac{٤٥ - ٣}{٢}$ = ٢١ م/ث

ب ع = $\frac{دف}{دن}$ = ٣ن^{٢} + ٤ن

∴ السرعة اللحظية عندما ن = ٤ تساوي ٣ × ١٦ + ٤ × ٤ = ٦٤ م/ث

جـ التسارع المتوسط = $\frac{\Delta ع}{\Delta ن} = \frac{ع(٥) - ع(٢)}{٥ - ٢}$

$= \frac{(٣×٢٥ + ٢٠) - (٣×٤ + ٤×٢)}{٥ - ٢} = \frac{٧٥}{٣}$ = ٢٥ م/ث^{٢}

د ت = $\frac{دع}{دن}$ = ٦ن + ٤

∴ ت عندما ن = ٣ تساوي ٦ × ٣ + ٤ = ٢٢م/ث^{٢}

مثال (٧)

قذف جسم رأسياً للأعلى من نقطة (و) على سطح الأرض، وكان ارتفاعه ف بالأمتار يعطى بالقاعدة ف= ٣٠ن − ٥ن^{٢} ، ن الزمن بالثواني.

أ جد السرعة الابتدائية (ع.) للجسم. ب جد التسارع عند ن = ٢

جـ جد أقصى ارتفاع يصل إليه الجسم. د أثبت أن زمن الصعود = زمن الهبوط.

هـ جد المسافة الكلية التي قطعها الجسم في الثواني الأربع الأولى.

الحل:

أ $ع = \frac{د ف}{د ن}$

$ع = ٣٠ - ١٠ ن$

السرعة الابتدائية (ع) هي السرعة اللحظية عند ن = ٠

∴ ع. = ٣٠ − ١٠ × ٠ = ٣٠ م/ث

ب $ت = \frac{د ع}{د ن} = -١٠$

وعند ن = ٢ تكون ت = −١٠ م/ث^{٢}،

أي أن الجسم يتباطأ (تنقص سرعته) بمعدل ١٠ م/ث لكل ثانية.

جـ يصل الجسم إلى أقصى ارتفاع عندما تكون سرعته ع = ٠

أي عندما ٣٠ − ١٠ ن = ٠

ن = ٣ ثوان

ويكون أقصى ارتفاع ف = ٣٠×٣ − ٥×٣^{٢} = ٤٥ متراً.

د زمن الصعود = ٣ ثوان

ولإيجاد زمن الهبوط نجد زمن الحركة الكلي وهو الزمن اللازم

ليعود الجسم إلى النقطة و. عندئذ تكون ف = ٠

صفر = ٣٠ن − ٥ن^{٢}

صفر = ٥ن (٦−ن)

ن = ٠ أو ن = ٦ ثوان. ∴ زمن الحركة = ٦ ثوان.

∴ زمن الهبوط = ٦−٣ = ٣ ثوان. مما يعني أن زمن الصعود = زمن الهبوط.

هـ عندما ن = ٤ ثوان، يكون الجسم على ارتفاع

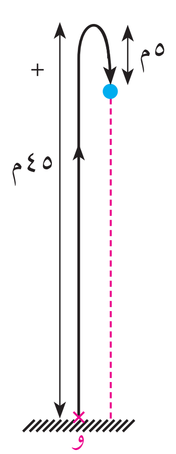
ف = ٣٠×٤ − ٥×١٦ = ٤٠ متراً.

وبما أن الزمن ٤ ثوان أكبر من زمن الصعود (٣ ثوان)، فإن الجسم بعد ٤ ثوان يكون هابطاً وعلى ارتفاع ٤٠ متراً.

المسافة التي هبطها الجسم = ٤٥ − ٤٠ = ٥م

المسافة الكلية التي قطعها الجسم = ٤٥ + ٥ = ٥٠ متراً.

لاحظ الشكل (٢−٨).



الشكل (٢−٨)

مثال (٨)

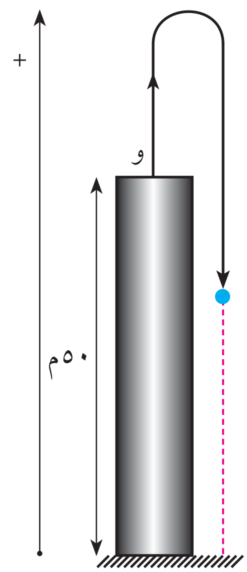
من قمة برج يرتفع عن سطح الأرض ٥٠م، لاحظ الشكل (٢-٩)، أطلق جسم رأسياً للأعلى فكانت إزاحته ف بالامتار عن قمة البرج بعد ن ثانية تعطى بالقاعدة :

ف= ١٥ن – ٥ن^{٢} . جد :

أ سرعة هذا الجسم عند ن = ٢ ث .

ب الزمن اللازم ليكون الجسم على ارتفاع ١٠ م من قمة البرج .

جـ سرعة ارتطام الجسم بسطح الأرض .



الشكل (٢-٩)

الحل:

أ ع = $\frac{\text{د ف}}{\text{د ن}}$ = ١٥–١٠ ن

وعندما ن = ٢ تكون ع = ١٥–١٠ × ٢ = –٥ م/ ث

أي أن الجسم يكون متجهاً إلى أسفل بسرعة مقدارها ٥ م/ ث .

ب ف = ١٥ن – ٥ن^{٢}

١٠ = ١٥ن – ٥ن^{٢}

٥ن^{٢} –١٥ن + ١٠ = ٠

ن^{٢} – ٣ن + ٢ = ٠

(ن–١) (ن–٢) = ٠ ⟸ ن = ١ث ، ٢ث

وهذا يعني أن الجسم يكون على ارتفاع ١٠م من قمة البرج مرتين : الأولى بعد ثانية واحدة وهو صاعد، والأخرى بعد ثانيتين وهو هابط .

جـ عند ارتطام الجسم بسطح الأرض تكون ف = –٥٠

–٥٠ = ١٥ن – ٥ن^{٢}

٥ن^{٢} –١٥ن + ٥٠ = ٠

ن^{٢} – ٣ن + ١٠ = ٠

(ن–٥) (ن+٢) = ٠

ن = ٥ ، –٢

ن = ٥ ثوان، الزمن اللازم لارتطام الجسم بسطح الأرض

وعندها تكون ع = ١٥–١٠ × ٥ = –٣٥م/ ث

أي أن الجسم يرتطم بسطح الأرض بسرعة مقدارها ٣٥م / ث إلى أسفل .

تمارين (٢-٥)

١ جد ميل المماس المرسوم لمنحنى الاقتران ق(س) = س^{٢} − س + ٣ عند النقطة (٠ ، ٣) الواقعة عليه .

٢ جد النقطة/ النقاط الواقعة على منحنى الاقتران ق(س) = س^{٣} −٣س^{٢} +٥ التي يكون المماس المرسوم عندها موازياً لمحور السينات .

٣ رسم مماس لمنحنى الاقتران ق(س) = س^{٢} + س − ٥ فكان عمودياً على المستقيم س − ٥ص = ٧
جد معادلة المماس .

٤ جد معادلة المماس المرسوم لمنحنى ق(س) = س^{٣} +س^{٢} −٧ عند النقطة التي تكون زاوية ميل العمودي على المنحنى عندها = $\frac{٣}{٤}$ π د.

٥ إذا كان المستقيم الواصل بين النقطتين (٠ ، −١) ، (١ ، ب) مماساً لمنحنى ق(س) = ٢س^{٢} − ٥س + ٧
أوجد قيمة ب .

٦ أوجد الثوابت م ، ب ، جـ بحيث يمر منحنى الاقتران ص = م س^{٢} + ب س + جـ بالنقطة (١ ، ٣)، ويمس المستقيم ٤س + ص = ٨ عند النقطة (٢ ، ٠).

٧ أوجد معادلة المماس المرسوم لمنحنى الاقتران ق(س) = س^{٢} من النقطة (١ ، ٠) الواقعة خارجه .
كم حلاً للمسألة؟

٨ إذا كانت ف = ن^{٣} −٣ن^{٢} +٥ هي العلاقة بين الازاحة ف بالامتار والزمن ن بالثواني لجسم يتحرك على خط مستقيم، فأوجد سرعة هذا الجسم وتسارعه عند ن = ٣ .

٩ قذف جسم رأسياً للأعلى فكانت العلاقة بين ارتفاعه ف بالأمتار عن نقطة قذفه وزمن حركته ن بالثواني هي : ف = ٥٠ن − ٥ن^{٢} .

أ جد أقصى ارتفاع يصل إليه الجسم .

ب جد سرعة هذا الجسم عندما يكون على ارتفاع ٨٠ متراً .

جـ جد المسافة المقطوعة في الثواني الست الأولى .

٦-٢ قاعدة السلسلة (مشتقة الاقتران المركب) (Chain Rule)

نعلم أنه إذا كان ق(س)، هـ(س) اقترانين بحيث كان مدى هـ(س) $\subseteq$ مجال ق(س) فإنه يمكن تعريف الاقتران المركب (ق ٥ هـ)(س) = ق(هـ(س))، فكيف نجد مشتقة هذا الاقتران؟

مثال (١)

إذا كان ق(س)= س^٢ ، هـ(س) = ٢س−٣، فأوجد (ق ٥ هـ)$'$(س).

الحل:

(ق ٥ هـ) (س) = ق(هـ(س)) = (٢س−٣)^٢

= ٤س^٢−١٢س + ٩

$\therefore$ (ق ٥ هـ)$'$ (س) = ٨س−١٢

ولكن هل يمكننا إيجاد مشتقة الاقتران المركب دون اللجوء إلى معرفة قاعدته؟

القاعدة التالية تجيب عن هذا التساؤل:

قاعدة السلسلة:

إذا كان هـ(س) اقتراناً قابلاً للاشتقاق عند س، وكان ق(س) قابلاً للاشتقاق عند هـ(س)، فإن الاقتران المركب (ق ٥ هـ) (س) يكون قابلاً للاشتقاق عند س، ويكون (ق ٥ هـ)$'$ (س) = ق$'$(هـ(س)) × هـ$'$(س).

مثال (٢)

إذا كان ق (س) = س^٣+٢س+٥ ، هـ (س) = س^٢+١ فأوجد:

أ (ق ٥ هـ)$'$(س)   ب (هـ ٥ ق)$'$(١)

الحل:

ق$'$(س) = ٣ س^٢+٢ ، هـ$'$(س) = ٢س

أ (ق ٥ هـ)$'$(س) = ق$'$(هـ(س)) × هـ$'$(س)

= ق$'$(س^٢+١) × ٢س

= (٣(س^٢+١)^٢+٢) × (٢س)

= ٦س^٥ + ١٢س^٣ + ١٠س

ب (هـ ٥ ق)$'$(١) = هـ$'$(ق(١)) × ق$'$(١)

= هـ$'$(٨) × ق$'$(١) = ١٦ × ٥ = ٨٠

ملاحظة:

لاحظ أنه إذا كان ص = ق(ع) ، ع = هـ(س) ، فإن ص = ق(هـ (س)) وبالتالي فإن :

$$\frac{د ص}{د س} = \frac{د}{د س}((ق \circ هـ)(س)) = قَ(هـ(س)) \,.\, هـَ(س)$$

$$= قَ(ع) \,.\, هـَ(س)$$

$$= \frac{د ص}{د ع} \cdot \frac{د ع}{د س}$$

أي أن $\frac{د ص}{د س} = \frac{د ص}{د ع} \cdot \frac{د ع}{د س}$

مثال (٣)

إذا كان ص = $ع^٢ + ٣ع + ١$ ، ع = $س^٣ + ٢س - ٣$ ، فأوجد $\frac{د ص}{د س}$.

الحل:

$$\frac{د ص}{د س} = \frac{د ص}{د ع} \times \frac{د ع}{د س}$$

$$= (٢ع + ٣)(٣س^٢ + ٢)$$

$$= \left(٢(س^٣ + ٢س - ٣) + ٣\right)(٣س^٢ + ٢)$$

$$= (٢س^٣ + ٤س - ٣)(٣س^٢ + ٢)$$

$$= ٦س^٥ + ١٦س^٣ - ٩س^٢ + ٨س - ٦$$

ملاحظة: يمكن تعميم قاعدة السلسلة لتشمل أكثر من اقترانين .

مثال (٤)

إذا كانت ع = $ل^٣ + ٢ل^٢ + ٣$ ، ل = $ص^٢ - ص + ٥$ ، ص = $س^٣ + س^٢ + ٣س$ ، فأوجد $\left.\frac{د ع}{د س}\right|_{س = ٠}$

الحل:

$$\frac{د ع}{د س} = \frac{د ع}{د ل} \times \frac{د ل}{د س}$$

$$= \frac{د ع}{د ل} \times \frac{د ل}{د ص} \times \frac{د ص}{د س}$$

$$= (٣ل^٢ + ٤ل)(٢ص - ١)(٣س^٢ + ٢س + ٣)$$

وعندما س = ٠ تكون ص = ٠ ، ل = ٥

$$\therefore \left.\frac{د ع}{د س}\right|_{س = ٠} = (٣ \times ٢٥ + ٢٠) \times -١ \times ٣ = -٢٨٥$$

مثال (٥)

ق(س) ، هـ(س) اقترانان قابلان للاشتقاق على ح بحيث إن :

هـَ(١) = ٥ ، قَ(١) = −٢ ، قَ(١٠) = ٣ ، هـ(١) = ١٠ ، أوجد (ق ∘ هـ)َ(١)

الحل:

(ق ∘ هـ)َ(١) = قَ(هـ(١)) × هـَ(١)

= قَ(١٠) × ٥ = ٣ × ٥ = ١٥

مثال (٦)

إذا كان ل(س) = ق($\text{س}^{٢}$+٣س−١) ، فأوجد لَ(٢) علماً بأن قَ(٩) = ٣

الحل:

بفرض أن هـ(س) = $\text{س}^{٢}$+٣س−١

يكون ل(س) = ق(هـ(س))

∴ لَ(س) = قَ(هـ(س)) × هـَ(س)

= قَ($\text{س}^{٢}$+٣س−١) × (٢س+٣)

∴ لَ(٢) = قَ(٩) × ٧ = ٣ × ٧ = ٢١

نتيجة:

إذا كانت ص = $(\text{ق(س)})^{\text{ن}}$ ، ن عدد صحيح، وكان ق(س) اقتراناً قابلاً للاشتقاق فإن :

$$\frac{\text{د ص}}{\text{د س}} = \text{ن}(\text{ق (س)})^{\text{ن}-١} \times \text{قَ(س)}$$

البرهان:

افرض أن ع = ق(س) ، فيكون ص = $\text{ع}^{\text{ن}}$

$$\frac{\text{د ص}}{\text{د س}} = \frac{\text{د ص}}{\text{د ع}} \times \frac{\text{د ع}}{\text{د س}}$$

$$= \text{ن ع}^{\text{ن}-١} \times \text{قَ(س)} = \text{ن}(\text{ق (س)})^{\text{ن}-١} \times \text{قَ(س)}$$

مثال (٨)

إذا كانت ص = $(٣\text{س}-١)^{٥}$ ، فأوجد $\frac{\text{د ص}}{\text{د س}}$

الحل:

$$\frac{\text{د ص}}{\text{د س}} = ٥(٣\text{س}-١)^{٤} \times ٣ = ١٥ (٣\text{س}-١)^{٤}$$

تمارين (٢-٦)

١ إذا كان ق(س) = س^٣ ، هـ(س) = ٣ – ٢س فأوجد :

أ (ق ∘ هـ)َ(س) ب (هـ ∘ ق)َ(س)

٢ إذا كانت ص = ع^٣ – ٥ع + ٦ ، ع = ٢س^٢+٣س–١ فأوجد $\frac{د ص}{د س}$.

٣ إذا كان ل(س) = س × هـ(س^٢–٣س+٢) فأوجد لَ(٣)، علماً بأن: هـ (٢) = ٤ ، هـَ(٢) = –١

٤ إذا كان م(س) = ق(س^٢) – ق^٣(س) فأوجد مَ(١)، علماً بأن ق(١) = ٣ ، قَ(١) = ٢

٥ إذا كانت م = ل^٢– ل ، ل = س^٢ + ٧س – ١ ، س = ٣ص + ٥ ، فأوجد:

أ $\frac{د ل}{د ص}$ ب $\frac{د م}{د ص}$

٦ إذا كان ل(س) = (س^٢–س–٣)^٥ فأوجد لَ(٢).

٧ إذا كان ص = ق(هـ($\frac{١}{س}$)) فأوجد $\left.\frac{د ص}{د س}\right|_{س = ٢}$

علماً بأن هـ($\frac{١}{٢}$) = –٣ ، هـَ($\frac{١}{٢}$) = ٢ ، قَ(–٣) = ٤ ، قَ(٢) = ٦

٨ ق(س) اقتران له الخواص التالية :

س	٠	١	٢	٤
ق(س)	٠	١	٣	٦
قَ(س)	١	١	٢	٣
قً(س)	٢	١	١	٠

ليكن ك(س) = س ق (س^٢) أوجد قيمة الاقتران ك ومشتقته الأولى والثانية عند س = ٠ ، ١ ، ٢

٩ ليكن ق(س) اقتراناً قابلاً للاشتقاق . برهن أنه :

أ إذا كان ق(س) اقتراناً زوجياً فإن قَ(س) يكون اقتراناً فردياً .

ب إذا كان ق(س) اقتراناً فردياً فإن قَ(س) يكون اقتراناً زوجياً .

(إرشاد : يكون الاقتران ق(س) زوجياً إذا كان ق(–س) = ق(س)، ويكون الاقتران ق(س) فردياً إذا كان ق(–س) = –ق(س))

٢-٧ الاشتقاق الضمني (Implicit Differentiation)

تعرفنا سابقاً كيف نجد المشتقة الأولى لاقتران صورته ص = ق(س) حيث ص معطاة بصورة صريحة بدلالة س . وفي الحالات الأخرى التي يظهر فيها المتغيران معاً في أحد طرفي المعادلة أو كليهما، يقال إن ص تُعرِّف ضمنياً اقتراناً أو أكثر . ويمكن حساب المشتقة لأي من هذه الاقترانات بالطريقة المسماه الاشتقاق الضمني كما في المثال التالي :

مثال (١)

إذا كانت $س^٢ + ص^٢ = ٢٥$ فأوجد $\frac{د ص}{د س}$

ومن ذلك، أوجد $\frac{د ص}{د س}$ عندما س = ٣ .

الحل:

نشتق طرفي العلاقة بالنسبة لـ س كما يلي :

$$\frac{د}{د س}(س^٢) + \frac{د}{د س}(ص^٢) = \frac{د}{د س}(٢٥)$$

$$٢س + \frac{د}{د ص}(ص^٢) \times \frac{د ص}{د س} = صفر$$

$$٢س + ٢ص \frac{د ص}{د س} = صفر$$

$$\therefore \frac{د ص}{د س} = \frac{-٢س}{٢ ص} = \frac{-س}{ص}$$

عندما س = ٣ تكون ص = ∓٤

$$\therefore \left.\frac{د ص}{د س}\right|_{(٣ ، ٤)} = \frac{-٣}{٤}$$

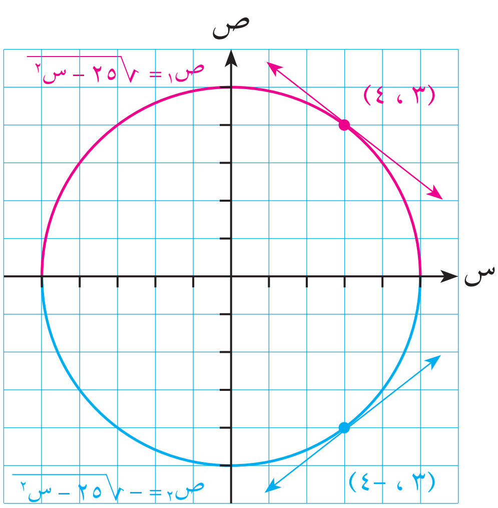
وهي تمثل ميل المماس لمنحنى الاقتران $ص_١ = \sqrt{٢٥ - س^٢}$

كما في الشكل (٢-١٠) (النصف العلوي من الدائرة) .

$$\left.\frac{د ص}{د س}\right|_{(٣ ، -٤)} = \frac{-٣}{-٤} = \frac{٣}{٤}$$

وهي تمثل ميل المماس لمنحنى الاقتران $ص_٢ = -\sqrt{٢٥ - س^٢}$

كما في الشكل (٢-١٠) (النصف السفلي من الدائرة) .



الشكل (٢-١٠)

مثال (٢)

إذا كانت $ل^{٢}م^{٣} + ٥م = ٤ل + ٦$ فأوجد $\frac{د ل}{د م}$.

الحل:

باشتقاق الطرفين بالنسبة لـ م ينتج أن :

$$ل^{٢} \times ٣م^{٢} + م^{٣} \times ٢ل \frac{د ل}{د م} + ٥ = ٤ \frac{د ل}{د م}$$

$$٢ل م^{٣} \frac{د ل}{د م} - ٤ \frac{د ل}{د م} = -٥ - ٣ل^{٢}م^{٢}$$

$$\frac{د ل}{د م} (٢ل م^{٣} - ٤) = -٥ - ٣ل^{٢}م^{٢}$$

$$\Leftarrow \quad \frac{د ل}{د م} = \frac{-٥ - ٣ل^{٢}م^{٢}}{٢ل م^{٣} - ٤}$$

مثال (٣)

إذا كانت $(س+٣ص)^{٥} = ٢س^{٢} + ص^{٣} - ٧$ ، فأوجد $\frac{د ص}{د س}$.

الحل:

باشتقاق الطرفين بالنسبة لـ س ينتج أن :

$$٥ (س+٣ص)^{٤} (١ + ٣ \frac{د ص}{د س}) = ٤س + ٣ص^{٢} \frac{د ص}{د س}$$

$$٥(س+٣ص)^{٤} + ١٥(س+٣ص)^{٤} \frac{د ص}{د س} = ٤س + ٣ص^{٢} \frac{د ص}{د س}$$

$$\frac{د ص}{د س} \left(١٥(س+٣ص)^{٤} - ٣ص^{٢}\right) = ٤س - ٥(س+٣ص)^{٤}$$

$$\therefore \quad \frac{د ص}{د س} = \frac{٤س - ٥(س+٣ص)^{٤}}{١٥(س+٣ص)^{٤} - ٣ص^{٢}}$$

مثال (٤)

جد معادلة المماس للمنحنى $س^{٢}+ص^{٢}-٤س+ ٢ص = ٢٠$ المرسوم عند النقطة (−١ ، ٣) الواقعة عليه .

الحل:

باشتقاق طرفي العلاقة بالنسبة للمتغير س ينتج أن :

$$٢س + ٢ص \frac{د ص}{د س} - ٤ + ٢ \frac{د ص}{د س} = ٠$$

وبالتعويض في النقطة (−١ ، ٣) يكون :

$$-٢ + ٦ \frac{د ص}{د س} - ٤ + ٢ \frac{د ص}{د س} = ٠ \quad ، \quad \text{ومنها} \quad \frac{د ص}{د س} = \frac{٣}{٤}$$

∴ ميل المماس المرسوم للمنحنى عند النقطة (−١ ، ٣) يساوي $\frac{٣}{٤}$

∴ معادلة المماس هي :

$$ص - ص_١ = م(س - س_١)$$

$$ص - ٣ = \frac{٣}{٤}(س + ١)$$

$$٤ص - ١٢ = ٣س + ٣$$

$$ص = \frac{٣}{٤}س + \frac{١٥}{٤}$$

نتيجة: مشتقة القوى الكسرية:

إذا كانت $ص = س^{\frac{م}{ن}}$ ، $\frac{م}{ن}$ عدد نسبي ، فإن : $\frac{د ص}{د س} = \frac{م}{ن} س^{\frac{م}{ن}-١}$

البرهان:

$$ص = س^{\frac{م}{ن}}$$

$$ص^{ن} = (س^{\frac{م}{ن}})^{ن}$$

$$ص^{ن} = س^{م}$$

بالاشتقاق بالنسبة لـ س :

$$\Leftarrow \quad ن ص^{ن-١} \frac{د ص}{د س} = م س^{م-١}$$

$$\frac{د ص}{د س} = \frac{م س^{م-١}}{ن ص^{ن-١}} = \frac{م}{ن} \times \frac{س^{م-١}}{(س^{\frac{م}{ن}})^{ن-١}} = \frac{م}{ن} \times \frac{س^{م-١}}{س^{م-\frac{م}{ن}}} = \frac{م}{ن} س^{م-١-م+\frac{م}{ن}} = \frac{م}{ن} س^{\frac{م}{ن}-١}$$

مثال (٥)

إذا كان $ق(س) = س^{\frac{٢}{٣}}$ ، فأوجد $قَ(٨)$.

الحل:

$$قَ(س) = \frac{٢}{٣} س^{\frac{-١}{٣}}$$

$$قَ(٨) = \frac{٢}{٣}(٨)^{\frac{-١}{٣}} = \frac{٢}{٣} \times (٢^{٣})^{\frac{-١}{٣}} = \frac{٢}{٣} \times ٢^{-١}$$

$$= \frac{٢}{٣} \times \frac{١}{٢} = \frac{١}{٣}$$

مثال (٦)

لتكن م = ل$^{\frac{٤}{٥}}$ − ٦ل$^{\frac{٥}{٣}}$ + ٨ل$^{\frac{١}{٤}}$ أوجد $\left.\frac{\text{د م}}{\text{د ل}}\right|_{\text{ل}=١}$.

الحل:

$\frac{\text{د م}}{\text{د ل}} = \frac{٤}{٥}$ ل$^{\frac{-١}{٥}}$ − ٦ x $\frac{٥}{٣}$ ل$^{\frac{٢}{٣}}$ + ٨ x $\frac{١}{٤}$ ل$^{\frac{-٣}{٤}}$

= $\frac{٤}{٥}$ ل$^{\frac{-١}{٥}}$ − ١٠ل$^{\frac{٢}{٣}}$ + ٢ل$^{\frac{-٣}{٤}}$

وعندما ل = ١ تكون $\frac{\text{د م}}{\text{د ل}} = \frac{٤}{٥}$ x ١ − ١٠ x ١ + ٢ x ١

= −٢,٧

ويمكن تعميم النتيجة السابقة على النحو الآتي:

إذا كانت ص = (ق(س))$^{\frac{م}{ن}}$ ، $\frac{م}{ن}$ عدد نسبي ، ق(س) قابل للاشتقاق فإن :

$\frac{\text{د ص}}{\text{د س}} = \frac{م}{ن}$ (ق(س))$^{\frac{م}{ن}-١}$ x قَ(س)

وبشكل خاص :

إذا كانت ص = $\sqrt{\text{ق(س)}}$ ، ق(س) > ٠ قَ(س) موجودة فإن: $\frac{\text{د ص}}{\text{د س}} = \frac{\text{قَ(س)}}{٢\sqrt{\text{ق(س)}}}$

مثال (٧)

إذا كانت ص = $\sqrt[٥]{\text{س}^٣ + ٢٤}$ فأوجد $\left.\frac{\text{د ص}}{\text{د س}}\right|_{\text{س}=٢}$.

الحل:

ص = (س^٣ + ٢٤)$^{\frac{١}{٥}}$

$\frac{\text{د ص}}{\text{د س}} = \frac{١}{٥}$ (س^٣ + ٢٤)$^{\frac{-٤}{٥}}$ (٣س^٢)

$\left.\frac{\text{د ص}}{\text{د س}}\right|_{\text{س}=٢} = \frac{١}{٥}$ (٣٢)$^{\frac{-٤}{٥}}$ (١٢)

= $\frac{١ \times ١٢}{٥ \times ١٦} = \frac{٣}{٢٠}$

مثال (٨)

إذا كانت ص = $\sqrt{\text{س}^{٢}+\text{س}+٨}$ فأوجد $\frac{\text{د ص}}{\text{د س}}$.

الحل:

$$\frac{\text{د ص}}{\text{د س}} = \frac{(٢\text{س}+١)}{٢\sqrt{\text{س}^{٢}+\text{س}+٨}}$$

مثال (٩)

إذا كان $\sqrt{٣\text{س ص}} = \text{س}^{٢} + ٥$ فأوجد $\frac{\text{د ص}}{\text{د س}}$.

الحل:

باشتقاق طرفي العلاقة بالنسبة لـ س ينتج أن :

$$\frac{٣\text{س}\frac{\text{د ص}}{\text{د س}}+٣\text{ص}}{٢\sqrt{٣\text{س ص}}} = ٢\text{س}$$

$$٣\text{س}\frac{\text{د ص}}{\text{د س}} + ٣\text{ص} = ٤\text{س}\sqrt{٣\text{س ص}}$$

$$\frac{\text{د ص}}{\text{د س}} = \frac{٤\text{س}\sqrt{٣\text{س ص}} - ٣\text{ص}}{٣\text{س}}$$

ملاحظة : يمكن حل المثال بطريقة أخرى ، وذلك بتربيع الطرفين ثم الاشتقاق الضمني بالنسبة إلى س .

تمارين (٢-٧)

١ في كل من العلاقات التالية، جد المشتقة المذكورة إزاءها:

أ س ص+ص^{٢} = ٣س − ٥ ؛ $\frac{د ص}{د س}$

ب ع ل − ٥ ع = ل^{٢}+٣ ؛ $\frac{د ل}{د ع}$

جـ (س+٢ص)^{٥} = ٣س−ص^{٢} ؛ $\frac{د ص}{د س}$

د ص = ٦ س$^{\frac{٢}{٣}}$ + ١٠س$^{\frac{-٤}{٥}}$ +٣س−٤ ؛ $\frac{د ص}{د س}$

هـ ل = $\sqrt[٣]{٢س + ١٨}$ ؛ $\left.\frac{د ل}{د س}\right|_{س = -٥}$

و ق(س) = $\sqrt{س^{٢} - س + ٧}$ ؛ قَ(٢)

ز $\sqrt{٣س+ص}$ = س^{٢}+٣ص−٥ ؛ $\frac{د ص}{د س}$

٢ إذا كانت ل = $\sqrt{(س^{٣}-٤)^{٣}}$ فأثبت أن : ٩ س^{٢} $\frac{د س}{د ل}$ = $\frac{٢}{\sqrt[٣]{ل}}$

٣ يتحرك جسم وفق العلاقة : ع = ٣ $\sqrt{ف}$

ع، ف هما السرعة والإزاحة على الترتيب، أثبت أن هذا الجسم يسير بتسارع ثابت.

٤ إذا كان س^{٢}− ص^{٢}= ١ فأثبت أن : $\frac{د^{٢} ص}{د س^{٢}}$ = $\frac{-١}{ص^{٣}}$.

٥ بيِّن أن النقطة (٣، ٢) تقع على منحنى العلاقة : س^{٢}+ س ص+ ص^{٢}= ١٩ ، ثـم أوجـد معادلة المماس والعمودي على المنحنى عندها.

٦ إذا كان ص^{٢}+٣س ص = ١٨ ، ع = ٥ص− ص^{٢}+٨ ، فأوجد $\frac{دع}{د س}$ عندما ص = ٦

٧ جد معادلة المماس المرسوم لمنحنى العلاقة : ص^{٢}+س ص = ٦ عند النقطة (١ ، ٢).

٨ بيِّن باستخدام حساب التفاضل أن الدائرتين :

س^{٢}+ص^{٢}− ١٢ س−٦ص+٢٥ = ٠ ، س^{٢}+ص^{٢}+٢س+ص−١٠ = ٠

متماستان عند النقطة (٢، ١).

٩ إذا كانت ص^{٣}+ص = س فأوجد $\frac{د^{٢}ص}{دس^{٢}}$ عند النقطة (٢ ، ١).

١٠ أوجد النقطة/ النقاط الواقعة على المنحنى س^{٢} − س ص + ٤ = ٠، والتي يكون المماس عندها أفقياً.

٢-٨ مشتقات الاقترانات الدائرية

تستخدم الاقترانات الدائرية في وصف الكثير من الظواهر التي تحمل صفة الدورية مثل: الحركة التوافقية البسيطة، والحقول الكهرومغناطيسية، وغيرها مما يمنح دراسة مشتقات هذه الاقترانات أهمية خاصة في فهم كثير من الظواهر الطبيعية.

نظرية (١):

إذا كان ق(س) = جاس، س بالتقدير الدائري، فإن $\acute{\text{ق}}$(س) = جتا س.

البرهان:

$$\acute{\text{ق}}(\text{س}) = \underset{\text{هـ}\to 0}{\text{نهـا}} \frac{\text{ق}(\text{س} + \text{هـ}) - \text{ق}(\text{س})}{\text{هـ}}$$

$$= \underset{\text{هـ}\to 0}{\text{نهـا}} \frac{\text{جا}(\text{س} + \text{هـ}) - \text{جا س}}{\text{هـ}}$$

$$= \underset{\text{هـ}\to 0}{\text{نهـا}} \frac{\text{جاس جتا هـ} + \text{جتا س جا هـ} - \text{جا س}}{\text{هـ}}$$

$$= \underset{\text{هـ}\to 0}{\text{نهـا}} \text{جا س} \left(\frac{\text{جتا هـ} - 1}{\text{هـ}}\right) + \underset{\text{هـ}\to 0}{\text{نهـا}} \text{جتا س} \frac{\text{جا هـ}}{\text{هـ}}$$

$$= \underset{\text{هـ}\to 0}{\text{نهـا}} \text{جا س} \times \underset{\text{هـ}\to 0}{\text{نهـا}} \frac{\text{جتا هـ} - 1}{\text{هـ}} + \text{جتا س} \times \underset{\text{هـ}\to 0}{\text{نهـا}} \frac{\text{جا هـ}}{\text{هـ}}$$

$= \text{جا س} \times \text{صفر} + \text{جتا س} \times 1$ ، (حيث $\underset{\text{هـ}\to 0}{\text{نهـا}} \frac{\text{جتا هـ} - 1}{\text{هـ}} = \text{صفر}$ ، انظر مثال ٣ صفحة ٢٤)

$= \text{جتا س}$

مثال (١)

إذا كان ق (س) = جا س ، فأوجد $\acute{\text{ق}}\left(\frac{\pi}{6}\right)$.

الحل:

$\acute{\text{ق}}(\text{س}) = \text{جتا س}$

$$\acute{\text{ق}}\left(\frac{\pi}{6}\right) = \text{جتا}\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

مثال (٢)

إذا كان هـ (س) = س^{٢} جاس فأوجد هـَ(س) .

الحل:

هـَ(س) = س^{٢} جتا س + ٢س جا س

مثال (٣)

إذا كانت ص= جا (٥-٣س) فأوجد $\frac{\text{د ص}}{\text{د س}}$.

الحل:

$\frac{\text{د ص}}{\text{د س}}$ = جتا (٥-٣س) x -٣ = -٣ جتا (٥-٣س)

مثال (٤)

إذا كان ع = جا (جا س) أوجد $\left.\frac{\text{د ع}}{\text{د س}}\right|_{\text{س} = \pi}$.

الحل:

$\frac{\text{د ع}}{\text{د س}}$ = $\big($جتا (جا س)$\big)$ x جتا س

وعندما س = π فإن $\frac{\text{د ع}}{\text{د س}}$ = $\big($جتا (جا π)$\big)$ x جتا π

= جتا ٠ x جتا π = ١ x -١ = -١

نظرية (٢):

إذا كان ق(س) = جتا س ، فإن قَ(س) = - جا س

البرهان:

ق (س) = جتا س = جا ($\frac{\pi}{٢}$ -س)

قَ(س) = جتا ($\frac{\pi}{٢}$ -س) x -١ = -جا س

مثال (٥)

إذا كان هـ(س)= جتا^{٣} (١-٢س) فأوجد هـَ(س)

الحل:

هـ(س) = $\big($جتا (١-٢س)$\big)^{٣}$

هـَ(س) = ٣$\big($جتا (١-٢س)$\big)^{٢}$ x $\big($- جا (١-٢س)$\big)$ x -٢

= ٦ جتا^{٢}(١-٢س) جا (١-٢س)

مثال (٦)

إذا كان جتا(س ص) = س ، فأوجد $\frac{د ص}{د س}$

الحل:

باشتقاق طرفي العلاقة بالنسبة إلى س ينتج أن :

$$-جا\left(س ص\right) \times \left(س \frac{د ص}{د س} + ص\right) = ١$$

$$-س جا \left(س ص\right) \times \frac{د ص}{د س} = ١ + ص جا \left(س ص\right)$$

$$\frac{د ص}{د س} = \frac{١ + ص جا \left(س ص\right)}{-س جا \left(س ص\right)} = -\frac{١ + ص جا \left(س ص\right)}{س جا \left(س ص\right)}$$

نظرية (٣): مشتقات الاقترانات الدائرية الأخرى:

١ إذا كانت ص = ظا س فإن $\frac{د ص}{د س}$ = قا^٢ س

٢ إذا كانت ص = ظتا س فإن $\frac{د ص}{د س}$ = -قتا^{٢}س

٣ إذا كانت ص = قا س فإن $\frac{د ص}{د س}$ = قا س ظا س

٤ إذا كانت ص = قتا س فإن $\frac{د ص}{د س}$ = -قتا س ظتا س

البرهان:

١ ص = ظا س = $\frac{جا س}{جتا س}$

$$\frac{د ص}{د س} = \frac{جتا س \times جتا س - جا س \times - جا س}{جتا^٢ س} = \frac{جتا^٢ س + جا^٢ س}{جتا^٢ س} = \frac{١}{جتا^٢ س} = قا^٢ س$$

ويمكن البرهنة على صحة القواعد ٢ ، ٣ ، ٤ بطريقة مماثلة .

مثال (٧)

إذا كانت ص = ٢ ظا س − قتا^{٢} ٥ س أوجد $\frac{\text{د ص}}{\text{د س}}$.

الحل:

ص = ٢ ظا س − (قتا ٥ س)^{٢}

$\frac{\text{د ص}}{\text{د س}}$ = ٢ قا^{٢} س − ٢ (قتا ٥ س)^{١} (−قتا ٥ س ظتا ٥ س) × ٥

= ٢ قا^{٢} س + ١٠ قتا^{٢} ٥ س ظتا ٥ س

مثال (٨)

إذا كانت ف = جا ٣ ن + جتا ٢ ن هي العلاقة بين الإزاحة ف بالأمتار والزمن (ن) بالثواني لجسم يتحرك على خط مستقيم، فأوجد سرعة وتسارع هذا الجسم عندما ن = $\frac{\pi}{٦}$.

الحل:

ع = $\frac{\text{د ف}}{\text{د ن}}$ = ٣ جتا ٣ ن − ٢ جا ٢ ن

وعندما ن = $\frac{\pi}{٦}$ فإن ع = ٣ جتا $\frac{\pi}{٢}$ − ٢ جا $\frac{\pi}{٣}$

ع = ٠ − ٢ × $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ = − $\sqrt{٣}$ م/ث

ت = $\frac{\text{د ع}}{\text{د ن}}$ = −٩ جا ٣ ن − ٤ جتا ٢ ن

وعندما ن = $\frac{\pi}{٦}$ فإن ت = −٩ جا $\frac{\pi}{٢}$ − ٤ جتا $\frac{\pi}{٣}$

= −٩ − ٤ × $\frac{١}{٢}$

= −١١ م/ث^{٢}

تمارين (٢-٨)

١ في كل من الاقترانات التالية أوجد $\frac{د ص}{د س}$:

أ ص = ٣ جا س − ٢ جتا س

ب ص = جا^{٢}س + جتا^{٢}س

جـ ص = $\frac{٢}{٣ - ظا س}$

د ص = ٤ جتا $\left(\frac{س}{٢}\right)$

هـ ص = ظا^{٢}س − قا^{٢}س

و ص = قتا $\sqrt{\pi + س}$

ز ص = ظتا^٣(٥ − س)

ح ص = قا (جا ٣س)

٢ إذا كانت ص = ٣ + جا م ، م = ٥ + جتا ٣س فأوجد $\frac{د ص}{د س}$.

٣ إذا كانت ص = ظا س جا ٢س ، فأثبت أن $\frac{د ص}{د س}$ = ٢ جا ٢س .

٤ إذا كان جا (س ص) = ٣ س − ظتا ٢ س ، فأوجد $\frac{د ص}{د س}$.

٥ جد النقطة/ النقاط الواقعة على منحنى ق (س) = س − جتا ٢ س ، س ∈ [٠ ، ٢π]، والتي يكون المماس المرسوم للمنحنى عند كلٍ منها موازياً لمحور السينات .

٦ جد معادلة المماس المرسوم لمنحنى ص = جا (س ص) عند النقطة $\left(\frac{\pi}{٢} ، ١\right)$.

٧ إذا كان هـ (س) = قا ٣ س . فأوجد هـ″(س) .

٨ إذا كانت ص = ظا^٢ س ، فأثبت أن : $\frac{د^٢ ص}{د س^٢}$ = ٢(١+ص) (١+٣ص) .

٩ إذا كانت ص = جا س + ٢ جتا س فأثبت أن $\frac{د^٣ ص}{د س^٣} + \frac{د^٢ ص}{د س^٢} + \frac{د ص}{د س}$ + ص = صفر .

١٠ يسير جسم في خط مستقيم وفق العلاقة ف = أ جتا (ب ن + جـ) ، حيث أ ، ب ، جـ ثوابت، أثبت أن تسارع الجسم = −ب^٢ ف ، علماً بأن الإزاحة ف بالأمتار ، الزمن ن بالثواني .

تمارين عامة

١ ضع دائرة حول رمز الإجابة الصحيحة فيما يلي :

١ إذا كان متوسط تغير الاقتران ق(س) بين س = ١ ، س = ٣ يساوي ٤ وكانت ق(٣) = ٨ فإن ق(١) تساوي :

أ ١٦ ب ٢ جـ صفر د ٤

٢ إذا كان ق(س) = $\left[\frac{١}{٣}س+٥\right]$ ، فإن قَ(١٢) تساوي :

أ $\frac{١}{٣}$ ب غير موجودة جـ صفر د ٤

٣ إذا كان متوسط تغير الاقتران ق(س) في الفترة [١ ، ١٦] يساوي ٩ فإن متوسط تغير الاقتران ق($س^٢$) في الفترة [١ ، ٤] يساوي :

أ ٤٥ ب ٣ جـ ٩ د لا يمكن إيجاده

٤ $\lim_{هـ \leftarrow ٠} \frac{جتا(٢س-هـ) - جتا ٢س}{هـ}$ تساوي :

أ ٢جا٢س ب -٢جا٢س جـ جا٢س د -جا٢س

٥ إذا كان ق(س) = جاس ، هـ(س)=٢ جتاس فإن (ق ٥ هـ)َ$(\frac{\pi}{٢})$ تساوي :

أ ١ ب -١ جـ ٢ د -٢

٦ إذا كان ق(س) = ٢$س^٢$ + س - ١ ، هـ(س) = $\sqrt{س}$ فإن (ق ٥ هـ)َ$(\frac{١}{٤})$ تساوي :

أ ٣ ب $\frac{١}{٢}$ جـ -٣ د $\frac{-١}{٢}$

٧ $\lim_{هـ \leftarrow ٠} \frac{٣(١+هـ)^{٦}-٣}{٢هـ}$ تساوي :

أ غير موجودة ب ١٨ جـ ٩ د ٣

٨ إذا كان ق(س) = ظا٢س فإن $\lim_{هـ \leftarrow ٠} \frac{ق(\pi+هـ)-ق(\pi)}{هـ}$ تساوي :

أ ٢ ب -٢ جـ صفر د غير معرفة

٩ $\lim_{هـ \leftarrow ٠} \frac{جا^٣(س+٢هـ)-جا^٣س}{٣هـ}$ تساوي :

أ ٢$جا^٢$س ب $\frac{٢}{٣}$ $جتا^٢$س جـ جا س جا٢س د $جتا^٢$س

١٠ إذا كان ق(س) = هـ(س^{٢}) فإن ق َ(س) تساوي :

أ هـَ(س^{٢}) ب هـَ(٢س) جـ ٢س هـَ(س) د ٢س هـَ(س^{٢})

١١ إذا كان لمنحنيي الاقترانين ق(س) = م س^{٢}+١ ، هـ(س) = ٢س^{٢}+ ب س مماس مشترك عند س = ١ فإن قيمتي م ، ب على الترتيب هما :

أ ٣ ، ٢ ب ٣ ، ٤ جـ ٢ ، ٣ د المعلومات المعطاة لا تكفي لإيجاد الثابتين .

١٢ إذا تحرك جسم على خط مستقيم وفق العلاقة ف=ن^{٢}−٦ن ، فإن سرعة هذا الجسم وتسارعه يتساويان عددياً عندما :

أ ن = ٢ ب ن = ٣ جـ ن = ٤ د عند بدء الحركة

١٣ إذا كان ق(س)= $\begin{cases} \sqrt{س^{٢} + ٣س} & ، \quad س \geqslant ١ \\ ٥س - ٣ & ، \quad س < ١ \end{cases}$ فإن ق َ(١) تساوي :

أ ٥ ب ٨ جـ ١ د غير موجودة

١٤ إذا كان المستقيم ص = س مماساً للقطع المكافئ ص = س^{٢}+ م فإن قيمة م تساوي :

أ $\frac{١}{٢}$ ب ٢ جـ $\frac{١}{٤}$ د صفر

١٥ إذا كانت معادلة العمودي على منحنى ق(س) عند النقطة (٣ ، ٠) هي : ٢س−٣ص= ٦ فإن ق َ(٣) تساوي :

أ $\frac{٣}{٢}$ ب $\frac{٢}{٣}$ جـ $\frac{-٢}{٣}$ د $\frac{-٣}{٢}$

٢ ابحث في قابلية الاقترانين التاليين للاشتقاق عند النقطة المبينة إزاء كل منهما :

أ ق(س) = $\begin{cases} ١ + س & ، \quad س \leqslant ٠ \\ ١ - س & ، \quad س > ٠ \end{cases}$ ، س = ٠

ب اذا كان هـ(س) = $\begin{cases} \frac{|س-٢|}{س-٢} & ، \quad س \neq ٢ \\ ١ & ، \quad س = ٢ \end{cases}$ ، س = ٢

٣ أوجد $\frac{د ص}{د س}$ في كل حالة مما يلي :

أ ص = س^{٧} + ٥ س^{٢} + $\frac{١}{\pi}$

ب ص = $\frac{س^{٧} + ٥ س^{٢} + ١}{س}$ ، س ≠ ٠

جـ $\sqrt{س ص}$ = ١

د ص = جا $\sqrt{س^{٢} + ١}$

هـ ص = ظا^{٢} س − قا ^{٢} س

و ص = جتا س (١ + جا س) عند س = $\frac{\pi}{٢}$

٤ اذا كان س^{٢} + ص^{٢} = ٢٥ ، فأوجد : $\frac{\text{د}^{٢}\text{ص}}{\text{دس}^{٢}}$ عند النقطة (٣ ، −٤)

٥ اذا كان هـ(س) = $\begin{cases} \frac{\text{١}}{\text{س}-\text{١}} & \text{،}\quad \text{س} \geqslant \text{٢} \\ \text{أس}^{٢}+\text{ب} & \text{،}\quad \text{س} < \text{٢} \end{cases}$ ، قابلاً للاشتقاق عند س = ٢ فأوجد الثابتين أ، ب .

٦ إذا كان ق(س) = ٢س^{٤} − أس^{٣} ، وكانت $\underset{\text{هـ}\to \text{٠}}{\text{نهـا}}\ \frac{\text{ق}'(\text{١})-\text{ق}'(\text{١}+\text{هـ})}{\text{٢هـ}}$ = ٢١ فما قيمة أ ؟

٧ إذا كان ق(س) = $\frac{\text{ل(س)}}{\text{هـ(س)}}$ قابلاً للاشتقاق عند س = أ ، ق'(أ) = ٠ ، فأثبت أن ق(أ) = $\frac{\text{ل}'(\text{أ})}{\text{هـ}'(\text{أ})}$ ، هـ'(أ) ≠ ٠ .

٨ إذا كانت ق(٢) = ٤ ، ق'(٢) = ٦ وكان س^{٢}=ق(٢ص)، فأوجد $\frac{\text{دص}}{\text{دس}}$ عند (٢ ، ١) .

٩ إذا كانت ص = س ظاس ، فبرهن أن $\frac{\text{د}^{٢}\text{ص}}{\text{دس}^{٢}}$ = ٢(١+ص) قا^{٢}س .

١٠ إذا كان ق(س) = ل(س^{٢}+١)، ل'(٥) = ١ ، ل'(١٧) = ٨ فأوجد :

أ $\underset{\text{هـ}\to \text{٠}}{\text{نهـا}}\ \frac{\text{ق}(\text{٢}+\text{هـ})-\text{ق}(\text{٢})}{\text{هـ}}$

ب $\underset{\text{س}\to \text{٢}}{\text{نهـا}}\ \frac{\text{ق}(\text{س}^{٢})-\text{ق}(\text{٤})}{\text{س}-\text{٢}}$

١١ الجدول التالي يمثل قيم ق(س) ، هـ(س) ، ق'(س) ، هـ'(س) عند س=٠ ، س=١

س	ق(س)	هـ(س)	ق'(س)	هـ'(س)
٠	٢	١	−١	٠
١	٠	٢	−٢	−١

جد ل'(س)عند قيمة س المبينة في كل مما يلي :

أ ل(س) = ق(س) $\big($١−٢هـ(س)$\big)$ ، س = ١

ب ل(س) = $\frac{\text{ق}^{٢}(\text{س})}{\text{هـ(س)}}$ ، س = ٠

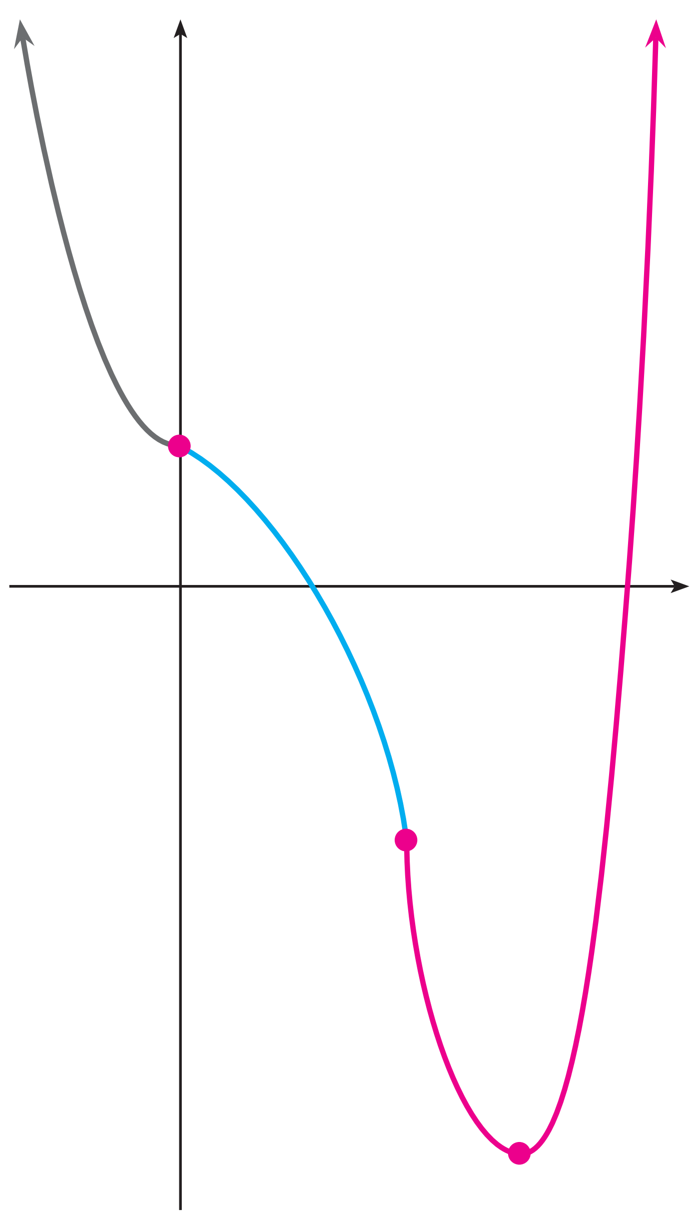
١٢ أثبت أن المماسين لمنحنى الاقتران ق(س) = س^{٢}−٥س+٦ عند نقطتي تقاطعه مع محور السينات متعامدان .

١٣ جد مساحة المنطقة المثلثية المحصورة بين محور السينات و المماس و العمودي على منحنى الاقتران ق(س) = س^{٢}−٦س+١٣ من النقطة (٤ ، ٥) الواقعة عليه .

الوحدة

٣

تطبيقات التفاضل



٣-١ نظرية القيمة المتوسطة (Mean Value Theorem)

للمشتقة استخدامات مهمة في كثير من التطبيقات الهندسية، والفيزيائية، والاقتصادية، وغيرها من العلوم والمعارف الإنسانية؛ وقد سبق أن تعرفنا بعض تلك التطبيقات في الوحدة السابقة، وستتعرف المزيد منها في هذه الوحدة مثل تزايد الاقترانات، وتناقصها، وقيمها القصوى، ورسومها البيانية، وكذلك المعدلات الزمنية المرتبطة، وسندرس أولاً نظرية لها كثير من النتائج المهمة في هذه الوحدة وفي علم التفاضل والتكامل بوجه عام وهي نظرية القيمة المتوسطة.

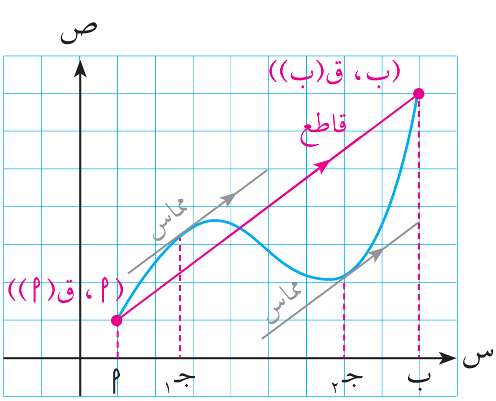
تتناول هذه النظرية العلاقة بين متوسط تغير الاقتران على فترة ما ومعدل تغير الاقتران أي المشتقة الأولى له عند نقطة في تلك الفترة.

نظرية القيمة المتوسطة:

إذا كان ق(س) اقتراناً متصلاً على [أ ، ب] وقابلاً للاشتقاق على] أ ، ب [، فإنه يوجد عدد حقيقي واحد على الأقل جـ ∈] أ ، ب [، بحيث إن $ق\,َ(جـ) = \frac{ق(ب) - ق(أ)}{ب - أ}$

تؤكد نظرية القيمة المتوسطة وجود عدد حقيقي واحد على الأقل جـ ∈] أ ، ب[بحيث إن المشتقة الأولى للاقتران عند جـ تساوي متوسط تغير الاقتران في [أ ، ب].

أي أن ميل المماس لمنحنى الاقتران عندما س = جـ يساوي ميل المستقيم القاطع لمنحنى الاقتران عند النقطتين (أ ، ق(أ)) ، (ب ، ق(ب)) وهذا يعني أن المماس المذكور والقاطع متوازيان.
يبين شكل (٣-١) المجاور منحنى الاقتران ق(س) المتصل على الفترة المغلقة [أ ، ب] والقابل للاشتقاق على الفترة المفتوحة] أ ، ب [. وفي هذا الشكل يوجد مماسان للمنحنى عند س = $جـ_١$ ، س = $جـ_٢$ يوازيان القاطع.



الشكل (٣-١)

مثال (١)

بين أن الاقتران ق(س)= س^{٢} + ٢س-٣ يحقق شروط نظرية القيمة المتوسطة على الفترة [-٢، ٢] ، ثم جد قيمة / قيم جـ التي تحددها النظرية .

الحل:

أولاً: البحث في شروط النظرية :

أ ق متصل على [-٢، ٢] لأنه كثير حدود .

ب ق قابل للاشتقاق على]-٢، ٢ [لأنه كثير حدود .

∴ ق يحقق شروط نظرية القيمة المتوسطة على الفترة [-٢، ٢]

ثانياً: إيجاد قيمة / قيم جـ:

$$\text{قَ(جـ)} = \frac{\text{ق(٢) - ق(-٢)}}{\text{٢ - (-٢)}}$$

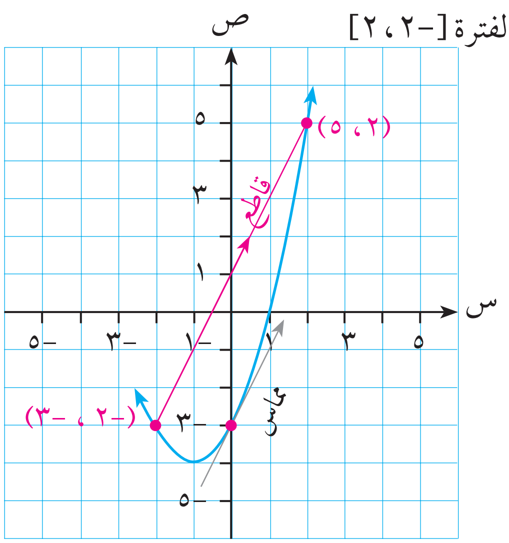
$$= \frac{\text{٥ + ٣}}{\text{٤}} = \text{٢}$$

وحيث إن قَ(س) = ٢س + ٢

∴ قَ(جـ) = ٢جـ + ٢ = ٢

ومنها جـ = ٠ ∈]-٢، ٢[

انظر الرسم في شكل (٣-٢).



الشكل (٣-٢)

مثال (٢)

هل يحقق الاقتران ق(س) = $\begin{cases} \text{س}^{٢}\text{-٢} &، \text{س} \leq ١ \\ \text{٢س-٣} &، \text{س} > ١ \end{cases}$

شروط نظرية القيمة المتوسطة على الفترة [-١، ٣] ؟

عين قيمة / قيم جـ (إن وجدت) التي تحددها النظرية .

الحل:

أولاً: البحث في شروط النظرية :

أ الاتصال على [-١، ٣]:

الاقتران ق متصل على [-١، ١[لأنه كثير حدود .

الاقتران ق متصل على]١ ، ٣] لأنه كثير حدود .

$$\lim_{س \to ١^{+}} ق(س) = \lim_{س \to ١^{+}} (٢س - ٣) = -١$$

$$\lim_{س \to ١^{-}} ق(س) = \lim_{س \to ١^{-}} (س^{٢} - ٢) = -١$$

$ق(١) = ١ - ٢ = -١$

∴ ق متصل عند $س = ١$

∴ ق متصل على [−١ ، ٣] .

ب قابلية الاشتقاق على]−١ ، ٣[:

$$ق'(س) = \begin{cases} ٢س &، \quad س < ١ \\ ٢ &، \quad س > ١ \end{cases}$$

و بما أن ق متصل عند $س = ١$ ، $ق'(١)^{+} = ٢$ ، $ق'(١)^{-} = ٢ \times ١ = ٢$

∴ $ق'(١)$ موجودة

∴ ق قابل للاشتقاق على]−١ ، ٣[.

∴ ق يحقق شروط نظرية القيمة المتوسطة على [−١ ، ٣] .

ثانياً : إيجاد قيمة / قيم ج:

$$ق'(ج) = \frac{ق(٣) - ق(-١)}{٣ - (-١)} = \frac{٣ - (-١)}{٤} = ١$$

وحيث إن $ق'(س) = ٢س$ ، $-١ < س \leq ١$

∴ $ق'(ج) = ٢ج = ١$ ، $-١ < ج \leq ١$

∴ $ج = \frac{١}{٢}$

وعندما $س > ١$ ، فإن $ق'(س) = ٢ \neq ١$

∴ لا توجد ج تحقق النظرية عندما $س > ١$

∴ $ج = \frac{١}{٢}$ هي القيمة الوحيدة في الفترة]−١ ، ٣[التي تعينها النظرية .

مثال (٣)

ليكن الاقتران ق(س) = $\begin{cases} س+٢ &، \quad -٢ \le س \le -١ \\ س^٢ &، \quad -١ < س \le ١ \end{cases}$

هل يحقق ق(س) شروط نظرية القيمة المتوسطة على الفترة [−٢ ، ١]؟

هل توجد جـ ∋]−٢ ، ١[بحيث قَ(جـ) = $\frac{ق(١) - ق(-٢)}{١ - (-٢)}$ ؟

الحل:

أولاً: البحث في شروط النظرية :

أ اتصال ق(س) على [−٢ ، ١] :

ق(س) متصل على [−٢ ، ١] (لماذا ؟) .

ب قابلية ق للاشتقاق على]−٢ ، ١[:

قَ(س) = $\begin{cases} ١ &، \quad -٢ < س < -١ \\ ٢س &، \quad -١ < س < ١ \end{cases}$

وبما أن ق متصل عند س = −١ ، قَ$(-١)^+$ = ٢ × −١ = −٢ ، قَ$(-١)^-$ = ١

∴ قَ(−١)غير موجودة .

∴ ق(س) لا يحقق شروط نظرية القيمة المتوسطة على الفترة [−٢ ، ١] .

(لاحظ أن عدم تحقق أي من شرطي النظرية يعني عدم تحقق شروط النظرية) .

ثانياً: وجود جـ:

بما أن شروط النظرية لم تتوافر فإنه لا يمكن من ذلك الجزم بعدم وجود جـ التي تحددها النظرية ، وللبحث في ذلك نعود لمشتقة الاقتران :

قَ(جـ) = $\frac{ق(١) - ق(-٢)}{١ - (-٢)} = \frac{١ - ٠}{٣} = \frac{١}{٣}$

وحيث إن قَ(س)=٢س ، −١ < س < ١

∴ قَ(جـ)=٢جـ ، −١ < جـ < ١

∴ ٢جـ = $\frac{١}{٣}$ ⇐ جـ = $\frac{١}{٦}$ ∋]−١ ، ١[

ولا توجد جـ ∋]−٢ ، −١[.

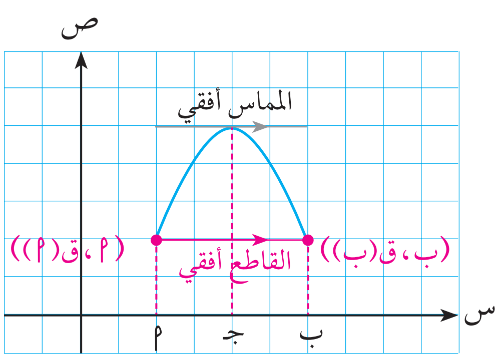
∴ جـ = $\frac{١}{٦}$ هي القيمة الوحيدة في الفترة]−٢ ، ١[التي تحقق نتيجة النظرية .

كحالة خاصة من نظرية القيمة المتوسطة نذكر فيما يلي النظرية المسماة نظرية رول باسم العالم الرياضي الفرنسي ميشيل رول الذي كان له الفضل في صياغة النظرية في عام ١٦٩١م .

نظرية رول (Rolle's Theorem):

إذا كان ق(س) اقتراناً متصلاً على [م ، ب]، وقابلاً للاشتقاق على]م ، ب [، و كان ق(م)=ق(ب)، فإنه يوجد عدد حقيقي واحد على الأقل جـ ∈]م ، ب [بحيث إن قَ(جـ) = صفر .

تؤكد النظرية أنه إذا كان ق(س) اقتراناً متصلاً على [م ، ب] و قابلاً للاشتقاق على] م ، ب [، وكان ق (م) = ق(ب) أي كان القاطع لمنحنى الاقتران عند النقطتين (م ، ق (م)) ، (ب ، ق(ب)) أفقياً، فإنه يوجد قيمة على الأقل جـ في الفترة]م ، ب[بحيث يكون المماس لمنحنى الاقتران عند النقطة (جـ ، ق(جـ)) أفقياً . انظر الشكل (٣-٣) .



الشكل (٣-٣)

مثال (٤)

بين أن الاقتران ق(س) = جاس+جتاس يحقق شروط نظرية رول على الفترة [٠ ، ٢π] . ثم أوجد قيمة / قيم جـ التي تحددها النظرية .

الحل:

أولاً : البحث في شروط النظرية :

أ ق متصل على [٠ ، ٢π] لأنه مجموع اقترانين متصلين على الفترة ذاتها .

ب ق قابل للاشتقاق على]٠ ، ٢ π [لأنه مجموع اقترانين قابلين للاشتقاق على الفترة ذاتها .

جـ ق(٠) = جا٠+جتا٠=١ ، ق(٢ π) = جا٢π +جتا٢π =١

أي أن ق(٠) = ق(٢π)

∴ ق يحقق شروط نظرية رول .

ثانياً : قَ(جـ) = صفر

وحيث إن قَ(س) = جتاس-جاس، س ∈]٠ ، ٢π[

∴ قَ(جـ) = جتاجـ - جاجـ = ٠ ، ٠ < جـ < ٢ π

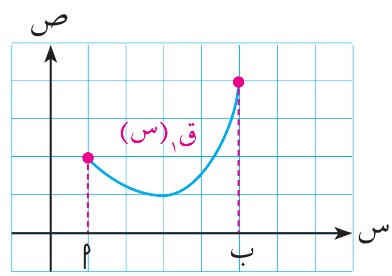
∴ جاجـ = جتاجـ

∴ ظاجـ = ١

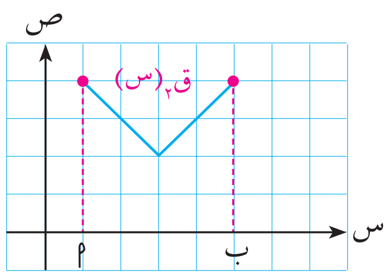
∴ جـ = $\frac{\pi}{٤}$ ، $\frac{٥}{٤}$ π ∈]٠ ، ٢π[

مثال (٥)

بين لماذا لا تتحقق شروط نظرية رول في كل من الاقترانين الممثلين في الشكل (٣-٤)، ثم عين في أي منهما توجد جـ ∈] أ ، ب [بحيث إن قَ(جـ) = صفر .



أ



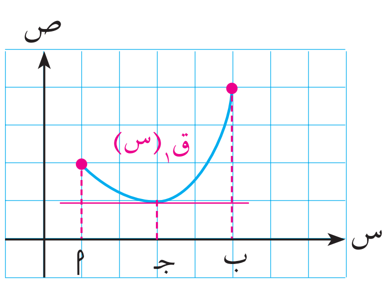
ب

الشكل (٣-٤)

الحل:

الاقتران ق١(س) لا يحقق شروط نظرية رول لأن ق(أ) ≠ ق(ب)، ومع ذلك توجد جـ ∈] أ ، ب [بحيث إن قَ(جـ) = صفر .

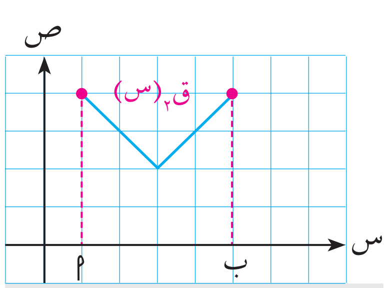
لاحظ الشكل (٣-٥).



الشكل (٣-٥)

الاقتران ق٢(س) لا يحقق شروط نظرية رول لأنه غير قابل للاشتقاق على] أ ، ب [. (لاحظ رأس الزاوية حيث لا يوجد مماس وحيد)، ولا توجد جـ ∈] أ ، ب [بحيث إن قَ(جـ) = صفر .

لاحظ الشكل (٣-٦).



الشكل (٣-٦)

مثال (٦)

أ استخدم نظرية بلزانو لإثبات أن للمعادلة :

$٦س^٥ + ١٣س + ١ = ٠$ جذراً واحداً على الأقل في ح .

ب استخدم نظرية رول لإثبات أن الجذر وحيد .

الحل:

أ ليكن ق(س) = $٦س^٥ + ١٣س + ١$ ، س ∈ ح .

ق (−١) = ٦ x $(−١)^٥$ + ١٣(−١)+١ = −١٨ ، مقدار سالب

ق(٠) = ١ ، مقدار موجب

ق(س) متصل على [−١ ، ٠] لأنه كثير حدود .

∴ تنطبق شروط نظرية بلزانو .

∴ توجد جـ ∈]−١ ، ٠[بحيث إن ق(جـ) = ٠

أي أنه يوجد للمعادلة $٦س^٥+١٣س+١ = ٠$ جذر واحد على الأقل في الفترة]−١ ، ٠[

ب لإثبات أن الجذر وحيد نفترض وجود جذرين $جـ_١$ ، $جـ_٢$ وأن $جـ_١ < جـ_٢$

∴ ق($جـ_١$) = ق($جـ_٢$) = صفر

وحيث إن ق متصل على [$جـ_١$ ، $جـ_٢$] وقابل للاشتقاق على]$جـ_١$ ، $جـ_٢$[لأنه كثير حدود

∴ تنطبق شروط نظرية رول وينتج وجود عدد واحد على الاقل د ∈]$جـ_١$ ، $جـ_٢$[.

بحيث إن قَ(د) = ٠ ، لكن قَ(س) = $٣٠س^٤ + ١٣$

∴ $٣٠ د^٤ + ١٣ = ٠$ ، ولكن هذه المعادلة ليس لها حل في مجموعة الأعداد الحقيقية لأن الطرف الأيمن موجب دائماً .

∴ لا توجد د ∈]$جـ_١$ ، $جـ_٢$[بحيث قَ(د) = ٠ ، وهذا يتناقض مع نظرية رول .

∴ الفرض بوجود جذرين $جـ_١$ ، $جـ_٢$ غير صحيح ؛ أي أن الجذر وحيد .

مثال (٧)

إذا كان ق(س) ، ك(س) اقترانين متصلين على [أ ، ب] وقابلين للاشتقاق على] أ ، ب[وكان ق(أ) = ك(أ) ، ق(ب) = ك(ب) ، فأثبت وجود عدد واحد على الأقل جـ ∈] أ ، ب[بحيث إن قَ(جـ) = كَ(جـ) .

الحل: بتعريف الاقتران هـ(س) = ق(س) − ك(س) على [أ ، ب]، يكون الاقتران هـ(س) متصلاً على [أ ، ب] لأنه فرق اقترانين متصلين، ويكون الاقتران هـ(س) قابلاً للاشتقاق على]أ ، ب[لأنه فرق اقترانين قابلين للاشتقاق .

كذلك هـ(أ) = ق(أ)−ك(أ) = صفر ، لأن ق(أ) = ك(أ)

وأيضاً هـ(ب) = ق(ب)−ك(ب) = صفر ، لأن ق(ب) = ك(ب)

∴ هـ(أ) = هـ(ب)

∴ تنطبق شروط نظرية رول على الاقتران هـ(س) في الفترة [أ ، ب]

∴ توجد جـ ∈]أ ، ب[بحيث هـَ(جـ) = ٠

∴ قَ(جـ) − كَ(جـ) = ٠

∴ قَ(جـ) = كَ(جـ) .

تمارين (٣-١)

١ بين أن كلاً من الاقترانات الآتية يحقق شروط نظرية القيمة المتوسطة على الفترة المعطاة ، ثم عين قيمة/ قيم جـ التي تعينها النظرية في كل حالة :

أ ق(س) = ٣ $\sqrt{\text{س}}$ − ٤س على الفترة [١ ، ٤]

ب ق(س) = ٢جاس − جتا٢س على الفترة [٠ ، π]

جـ ق(س) = |س^٢ − س − ٦| على الفترة [−١ ، ٢]

٢ بين أن كلاً من الاقترانات الآتية يحقق شروط نظرية رول على الفترة المعطاة ، ثم عين قيمة/ قيم جـ التي تعينها النظرية في كل حالة :

أ ق(س) = س + $\frac{١}{\text{س}}$ على الفترة [$\frac{١}{٢}$ ، ٢]

ب ق(س) = جتاس على الفترة $\left[\frac{\pi}{٢} ، \frac{٣\pi}{٢}\right]$

جـ ق(س) = $\frac{\text{س}^٢ - ١}{\text{س} - ٢}$ على الفترة [−١ ، ١]

٣ جد الثوابت أ، ب، جـ التي تجعل الاقتران ق(س) = $\begin{cases} ٣ & ، \text{س} = ٠ \\ -\text{س}^٢ + ٣\text{س} + \text{جـ} & ، ٠ < \text{س} < ١ \\ \text{أس} + \text{ب} & ، ١ \le \text{س} \le ٢ \end{cases}$

يحقق شروط نظرية القيمة المتوسطة على الفترة [٠ ، ٢].

٤ ليكن ق(س) = |٢س − ١| − ٣

أ أي من شروط نظرية رول يحققها الاقتران ق على الفترة [−١ ، ٢]؟

ب هل توجد جـ ∋]−١ ، ٢[بحيث قَ(جـ) = ٠ ؟

٥ ليكن ق(س) = { س^٢−٤س+٦ ، س > ١ ؛ ٧−٤س ، س ≤ ١ }

أ أي من شروط نظرية رول يحققها الاقتران ق في الفترة [−١ ، ٥]؟

ب هل توجد جـ ∋]−١ ، ٥[بحيث إن قَ(جـ) = ٠ ؟

جـ هل تتعارض الإجابات في (أ) ، (ب) مع نظرية رول ؟ لماذا؟

٦ أثبت أن للمعادلة : س^٣ + ٩س^٢ + ٣٣س − ٨ = ٠ جذراً حقيقياً واحداً فقط .

٧ أثبت أنه لا يمكن أن يكون للمعادلة ٦س^٤+٧س^٢−١٠٠ = ٠ أكثر من جذرين حقيقيين مختلفين .

٨ إذا كان أ ، ب عددين حقيقيين فاستخدم نظرية القيمة المتوسطة على الاقتران ق(س) = س^٣ معرفاً على [أ ، ب] لإثبات وجود عدد حقيقي واحد على الأقل جـ ∋]أ ، ب[بحيث أ^٢ + أب + ب^٢ = ٣جـ^٢

٩ إذا كان ق(س) اقتراناً كثير حدود، وكان ق(أ) = ق(ب) = ق(جـ) حيث أ < جـ < ب فأثبت وجود عدد حقيقي واحد على الأقل د ∋]أ ، ب[بحيث قً(د) = ٠ .

١٠ ق(س) اقتران كثير حدود يمر منحناه بالنقاط (١ ، ٣) ، (٢ ، ٥) ، (٣ ، ١).

أ أثبت وجود عدد واحد على الأقل جـ$_١$ ∋ الفترة]١ ، ٢[بحيث قَ(جـ$_١$) > ٠

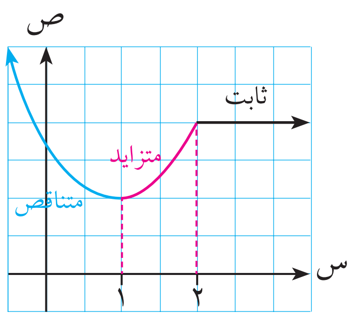
ب أثبت وجود عدد واحد على الأقل جـ$_٢$ ∋ الفترة]٢ ، ٣[بحيث قَ(جـ$_٢$) < ٠

جـ أثبت وجود عدد واحد على الأقل جـ ∋ الفترة]١ ، ٣[بحيث قَ(جـ) = ٠

٣-٢ الاقترانات المتزايدة والمتناقصة (Increasing and Decreasing Functions)

سوف نستخدم كلمات متزايد، ومتناقص، وثابت، لوصف سلوك منحنى الاقتران ق(س) على مجاله عندما تتحرك نقطة على منحناه من اليسار إلى اليمين، فمثلاً الاقتران ق(س) الممثل بيانياً بالشكل (٣-٧) يقال إنه متناقص على الفترة]-∞، ١]، ومتزايد على الفترة [١، ٢] وثابت على [٢، ∞[.

التعريف التالي يصف رياضياً معنى التزايد والتناقص للاقتران ق(س).



الشكل (٣-٧)

تعريف:

يقال إن الاقتران ق(س) المعرف على الفترة ف :

١ متزايد على ف إذا تحقق الشرط التالي :

لجميع $س_١$، $س_٢$ ∈ ف ، إذا كان $س_٢$ > $س_١$ فإن ق($س_٢$) > ق($س_١$)

٢ متناقص على ف إذا تحقق الشرط التالي :

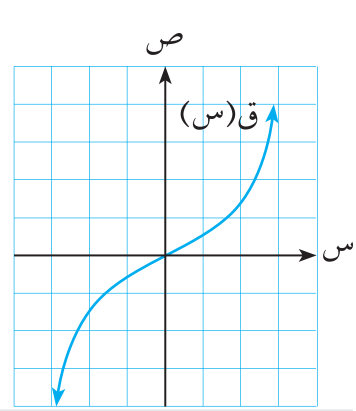
لجميع $س_١$، $س_٢$ ∈ ف ، إذا كان $س_٢$ > $س_١$ فإن ق($س_٢$) < ق($س_١$)

٣ ثابت على ف إذا تحقق الشرط التالي :

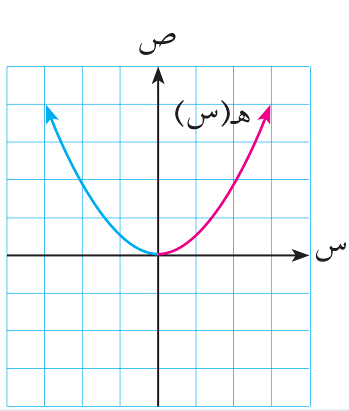
لجميع $س_١$، $س_٢$ ∈ ف ، ق($س_٢$) = ق($س_١$)

مثال (١)

حدد مجالات التزايد والتناقص للاقترانين الممثلين بيانياً في الشكلين (٣-٨)، (٣-٩) :



الشكل (٣-٨)



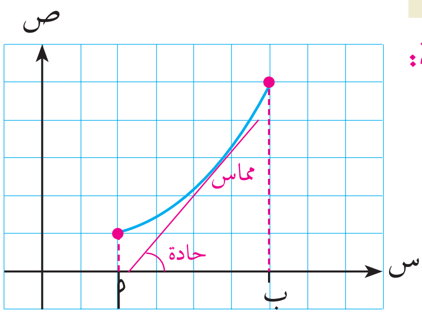
الشكل (٣-٩)

الحل: من التمثيل البياني لكل من الاقترانين ق(س) ، هـ(س) نلاحظ أن :

أ الاقتران ق(س) متزايد على ح .

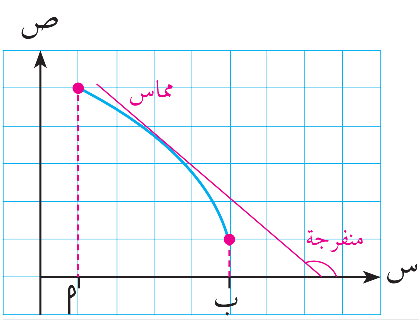
ب الاقتران هـ(س) متناقص على الفترة]−∞ ، ٠] ومتزايد على الفترة [٠ ، ∞[.

اختبار المشتقة الأولى للاقترانات المتزايدة والمتناقصة:



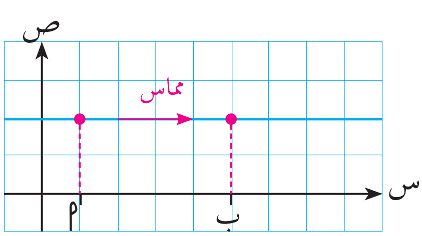
الشكل (٣-١٠)

نلاحظ في الشكل (٣-١٠) اقتراناً متزايداً على [ﻫ ، ب]، وأن المماس للمنحنى عند أية نقطة ∈]ﻫ ، ب[يصنع زاوية حادة مع الاتجاه الموجب لمحور السينات، أي أن ميل المماس يكون موجباً .



الشكل (٣-١١)

ونلاحظ في الشكل (٣-١١) اقتراناً متناقصاً على الفترة [ﻫ ، ب]، وأن المماس للمنحنى عند أية نقطة ∈]ﻫ ، ب[يصنع زاوية منفرجة مع الاتجاه الموجب لمحور السينات، أي أن ميل المماس يكون سالباً .



الشكل (٣-١٢)

بينما نلاحظ في الشكل (٣-١٢) اقتراناً ثابتاً على الفترة [ﻫ ، ب]، وأن المماس للمنحنى عند أية نقطة ∈]ﻫ ، ب[يكون أفقياً، أي أن قَ(س) = ٠ .

وهذا يعني أن إشارة المشتقة الأولى للاقتران تحدد طبيعة هذا الاقتران متزايداً أو متناقصاً أو ثابتاً، وهذا هو مضمون النظرية التالية :

نظرية:

إذا كان ق(س) اقتراناً متصلاً على [ﻫ ، ب] وقابلاً للاشتقاق على]ﻫ ، ب[فإنه :

١ إذا كانت قَ(س) > ٠ لجميع س ∈]ﻫ ، ب[فإن ق(س) اقتران متزايد على [ﻫ ، ب] .

٢ إذا كانت قَ(س) < ٠ لجميع س ∈]ﻫ ، ب[فإن ق(س) اقتران متناقص على [ﻫ ، ب] .

٣ إذا كانت قَ(س) = ٠ لجميع س ∈]ﻫ ، ب[فإن ق(س) اقتران ثابت على [ﻫ ، ب] .

مثال (٢)

عين فترات التزايد والتناقص للاقتران ق(س) = س^٣ − ٣س + ٢ ، س ∈ ح

الحل:

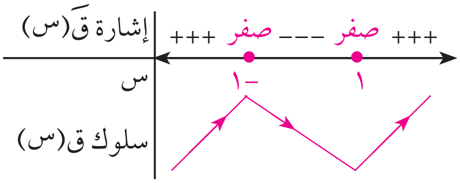
ق(س) اقتران كثير حدود فهو متصل وقابل للاشتقاق على ح

قَ(س) = ٣س^٢ − ٣

نبحث في إشارة قَ(س) :

قَ(س) = ٣س^٢ − ٣ = ٠   عندما س=١ ، −١

الشكل (٣-١٣) يبين إشارة قَ(س)



الشكل (٣-١٣)

بما أن قَ(س) موجبة عندما س > ١ أو س < −١

∴ ق(س) متزايد على الفترة [١ ، ∞[

وكذلك على الفترة]−∞ ، −١]

وبما أن قَ(س)سالبة عندما −١ < س < ١

∴ ق(س) متناقص على الفترة [−١ ، ١] .

مثال (٣)

عين فترات التزايد والتناقص للاقتران ق(س) = $\frac{\text{س}}{\text{س}^2 + 1}$ على مجاله .

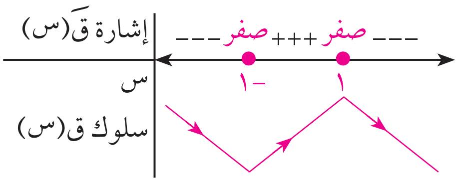
الحل:

ق(س) اقتران نسبي مقامه موجب دائماً فهو متصل على ح

قَ(س) = $\frac{(\text{س}^2 + 1) - \text{س}(2\text{س})}{(\text{س}^2 + 1)^2}$

= $\frac{1 - \text{س}^2}{(\text{س}^2 + 1)^2}$

الشكل (٣-١٤) يبين إشارة قَ(س)



الشكل (٣-١٤)

قَ(س) < ٠ في الفترة]−∞ ، −١[

وكذلك على الفترة]١ ، ∞[

∴ ق(س) متناقص على الفترة]−∞ ، −١] وكذلك على الفترة [١ ، ∞[

قَ(س) > ٠ في الفترة]−١ ، ١[

∴ ق(س) متزايد على الفترة [−١ ، ١] .

مثال (٤)

بين أن الاقتران ق(س) = س+جاس متزايد على الفترة [٠ ، ٢π] .

الحل:

ق(س) متصل على [٠ ، ٢π] لأنه مجموع اقترانين متصلين .

ق(س) قابل للاشتقاق على]٠ ، ٢π[لأنه مجموع اقترانين قابلين للاشتقاق

قَ(س) = ١ + جتاس

نبحث في إشارة قَ(س) :

قَ(س) = ٠ عندما ١ + جتاس = ٠

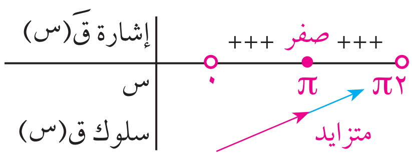
عندما جتاس = -١ أي عندما س = π

بما أن -١ < جتاس < ١ لكل س ∈]٠ ، π[

فإنه بإضافة ١ لحدود المتباينة تصبح : ٠ < ١ + جتاس < ٢

أي أن قَ(س) يكون موجباً في]٠ ، π[

الشكل (٣-١٥) يبين إشارة قَ(س)



الشكل (٣-١٥)

∴ ق(س) متزايد على [٠ ، π] .

وبالمثل قَ(س) يكون موجباً في الفترة]π ، ٢π[،

∴ ق(س) متزايد على [π ، ٢π] .

وحيث إن ق(س) متصل عند س = π فإن ق(س) متزايد على [٠ ، ٢π] .

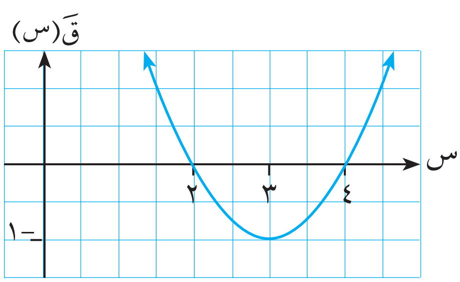
مثال (٥)

يمثل الشكل (٣-١٦) منحنى قَ(س)

لاقتران ق(س) كثير حدود :

أ عين فترات التزايد و التناقص للاقتران ق(س)

ب أوجد مجموعة حل المتباينة قً(س) < ٠

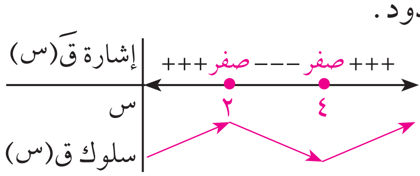


الشكل (٣-١٦)

الحل:

ق(س) متصل وقابل للاشتقاق على ح لأنه كثير حدود .

يبين الشكل (٣-١٧) إشارة قَ(س) على ح



الشكل (٣-١٧)

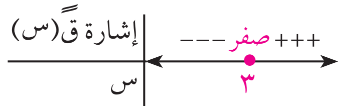
أ من الشكل نلاحظ أن قَ(س) > ٠

عندما س > ٢   أو   س < ٤

∴   ق(س) متزايد على الفترة]−∞ ، ٢] و كذلك على الفترة [٤ ، ∞[

كذلك نلاحظ من الشكل أن قَ(س) > ٠   عندما ٢ > س > ٤

∴   ق(س) متناقص على الفترة [٢ ، ٤]



الشكل (٣-١٨)

ب يبين الشكل (٣-١٨) إشارة قً(س) على ح

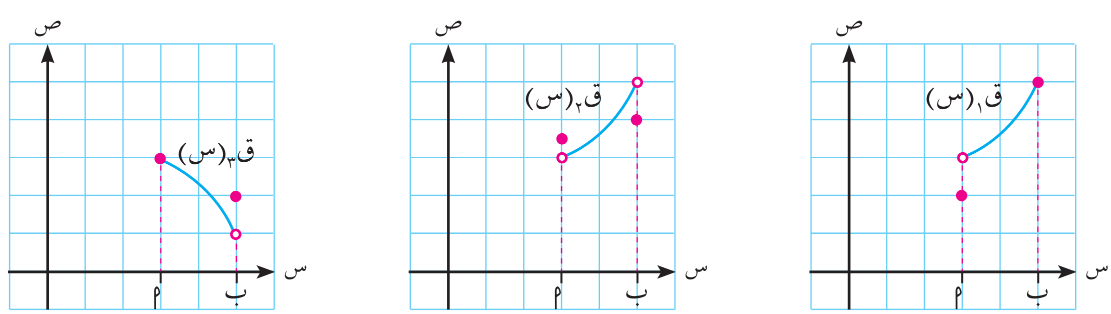
قً(س) > ٠   عندما س > ٣ لأن قَ متناقص في هذه الفترة .

∴   مجموعة حل المتباينة قً(س) > ٠ هي]−∞ ، ٣[.

ملاحظة:

إذا لم يكن الاقتران ق(س) متصلاً عند أحد طرفي الفترة [أ ، ب] أو كليهما ، وكانت قَ(س) > ٠ مثلاً في الفترة]أ ، ب[، فإن ق(س) يكون متزايداً على]أ ، ب[؛ أما إذا كانت قَ(س) < ٠ في الفترة]أ ، ب [فإنّ ق(س) يكون متناقصاً في]أ ، ب[.

وفيما يتعلق باشتمال مجالات التزايد أو التناقص للاقتران ق(س) على أحد الطرفين أو كليهما فإنه يمكن العودة للتعريف والتمثيل البياني لمنحنى الاقتران ق(س)، لاحظ الشكل (٣-١٩) .



ق١(س) متزايد على [أ ، ب [ق٢(س) متزايد على]أ ، ب]   ق٣(س) متناقص على [أ ، ب]

الشكل (٣-١٩)

مثال (٦)

إذا كان ق(س) = $\begin{cases} \text{س}^{٢} - ٢|\text{س}| & ، \quad -١ \le \text{س} < ١ \\ \text{صفر} & ، \quad \text{س} = ١ \end{cases}$

فعين فترات التزايد والتناقص للاقتران ق(س) على مجاله .

الحل:

نعيد تعريف الاقتران كما يلي :

ق(س) = $\begin{cases} \text{س}^{٢} + ٢\text{س} & ، \quad -١ \le \text{س} < ٠ \\ \text{س}^{٢} - ٢\text{س} & ، \quad ٠ \le \text{س} < ١ \\ \text{صفر} & ، \quad \text{س} = ١ \end{cases}$

الاقتران ق(س) متصل عند س = صفر (لماذا؟)

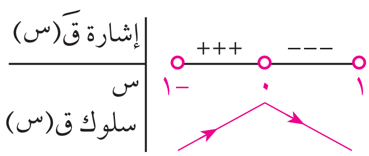
قَ(س) = $\begin{cases} ٢\text{س} + ٢ & ، \quad -١ < \text{س} < ٠ \\ ٢\text{س} - ٢ & ، \quad ٠ < \text{س} < ١ \end{cases}$

قَ(٠)$^{+}$ = −٢ ، قَ(٠)$^{-}$ = ٢

∴ قَ(٠) غير موجودة

إشارة قَ(س) :

الشكل (٣-٢٠) يبين إشارة قَ(س)



الشكل (٣-٢٠)

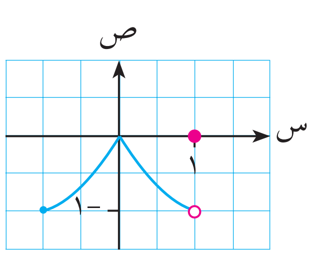
قَ(س) > ٠ في الفترة]−١ ، ٠[

∴ ق(س) متزايد في الفترة [−١ ، ٠]

قَ(س) < ٠ في الفترة]٠ ، ١[

∴ ق(س) متناقص في الفترة [٠ ، ١[

لاحظ أن ق(س) غير متصل عند النقطة الطرفية حيث س = ١ ، لذا نعتمد التمثيل البياني لمنحنى الاقتران كما هو في الشكل (٣-٢١)، ونلاحظ أن س = ١ لا تضاف إلى فترة التناقص [٠ ، ١[.



الشكل (٣-٢١)

تمارين (٣-٢)

١ عين فترات التزايد و التناقص لكلٍ من الاقترانات الآتية :

أ ق(س)=س^٣^–٣س^٢^+٦

ب ق(س)=|س^٢^–٤|

جـ ق(س)=جتا^٢^س ، س ∈ [٠ ، π]

٢ إذا كان ق(س) ، ك(س) اقترانين بحيث قَ(س) > كَ(س) لجميع س ∈ح .
فبين أن الاقتران ق(س) – ك(س) متزايد على ح .

٣ إذا كان ق(س) ، ك(س) اقترانين بحيث قَ(س) = كَ(س) لجميع س ∈ح .
فبين أن ق(س) = ك(س) + جـ ، حيث جـ ثابت .

٤ ق(س)، هـ(س) كثيرا حدود معرفان على [١ ، ٦] حيث هـ(س) ≠ ٠ لجميع قيم س ∈ [١ ، ٦] ، إذا كان منحنيا ق(س)، هـ(س) يقعان في الربع الأول، وكان ق(س) متزايداً في مجاله وكان هـ(س) متناقصاً في مجاله ، فأثبت أن $(\frac{ق}{هـ})$(س) متزايد في [١ ، ٦] .

٥ أثبت أن الاقتران ق(س) = ظاس–س متزايد على الفترة [٠ ، $\frac{\pi}{٤}$] .
من ذلك أثبت أن ظاس ≥ س على الفترة [٠ ، $\frac{\pi}{٤}$] .

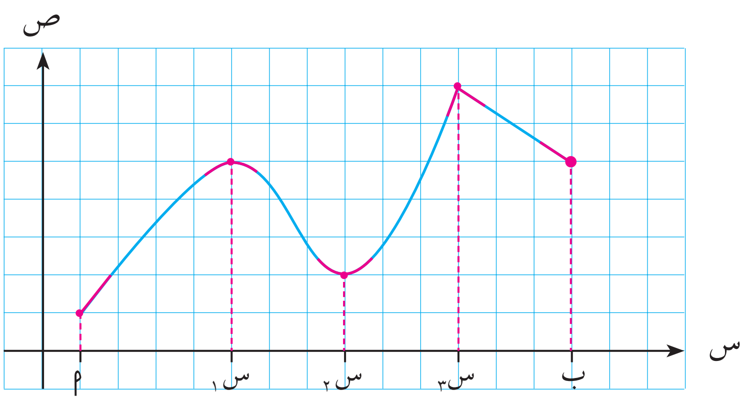
٦ عين مجالات التزايد والتناقص للاقتران :

$$ق(س) = \begin{cases} س^٢ & ،\quad -١ \leq س \leq ٠ \\ س - [س] & ،\quad ٠ \leq س \leq ١ \end{cases}$$

٣-٣ القيـــم القصـوى (Extreme Values)

درسنا في البند السابق تزايد الاقترانات وتناقصها، وسنجد في هذا البند أن النقاط الواقعة على منحنى الاقتران، والتي يغير عندها المنحنى سلوكه من متزايد إلى متناقص، أو بالعكس من متناقص إلى متزايد، هي نقاط أساسية تساعد كثيراً في رسم الشكل العام لمنحنى الاقتران، وتعرف خصائصه؛ كما أنها نقاط يتخذ الاقتران عندها على وجه العموم قيماً عظمى أو صغرى؛ وبالتالي فهي ذات أهمية خاصة في كثير من التطبيقات العملية كما سنرى لاحقاً.

القيم القصوى المحلية والمطلقة:



الشكل (٣-٢٢)

يبين الشكل (٣-٢٢) المرسوم في أعلاه منحنى الاقتران ق(س) المعرف على الفترة [ﺃ، ب]. نلاحظ أن قيمة الاقتران عند $س_١$ أكبر من أي قيمة أخرى للاقتران لجميع قيم س المجاورة لِـ$س_١$ والقريبة قرباً كافياً منها، لذلك نقول إن للاقتران ق(س) قيمة عظمى محلية عند $س_١$ هي ق($س_١$)؛ بالمثل يكون للاقتران ق(س) قيمة عظمى محلية عند س = $س_٣$، وبما أن القيمة العظمى المحلية ق($س_٣$) أكبر من قيمة الاقتران لجميع قيم س في مجال الاقتران فإنها تسمى أيضاً قيمة عظمى مطلقة للاقتران.

ويبين الشكل أيضاً أن قيمة الاقتران عند $س_٢$ أصغر من أي قيمة أخرى للاقتران لجميع قيم س المجاورة لِـ$س_٢$ والقريبة قرباً كافياً منها، ولذلك نقول إن للاقتران ق(س) قيمة صغرى محلية عند س = $س_٢$ هي ق($س_٢$).

بالمثل يكون للاقتران قيمتان صغريان محليتان عند كلٍ من س = ﺃ ، س = ب هما ق(ﺃ) ، ق(ب) على الترتيب، وحيث إن القيمة الصغرى المحلية ق(ﺃ) هي أصغر قيمة للاقتران لجميع قيم س في مجاله فإنها تسمى قيمة صغرى مطلقة للاقتران.

تعريف:

ليكن ق(س) اقتراناً معرفاً على المجال ع، ولتكن جـ ∈ ع . يقال إنه :

١ يوجد للاقتران ق(س) قيمة عظمى محلية عند س = جـ هي ق(جـ) إذا وجدت فترة مفتوحة ف تحتوي على جـ ، بحيث إن ق(جـ) ≤ ق(س) لجميع س ∈ (ف ∩ ع) .

٢ يوجد للاقتران قيمة صغرى محلية عند س = جـ هي ق(جـ) إذا وجدت فترة مفتوحة ف تحتوي على جـ ، بحيث إن ق(جـ) ≥ ق(س) لجميع س ∈ (ف ∩ ع) .

٣ يوجد للاقتران قيمة عظمى مطلقة عند س = جـ هي ق(جـ) إذا كانت ق(جـ) ≤ ق(س) لجميع س ∈ ع .

٤ يوجد للاقتران قيمة صغرى مطلقة عند س = جـ هي ق(جـ) إذا كانت ق(جـ) ≥ ق(س) لجميع س ∈ ع .

تسمى كل من القيم العظمى والقيم الصغرى محلية كانت أو مطلقة للاقتران قيماً قصوى له .

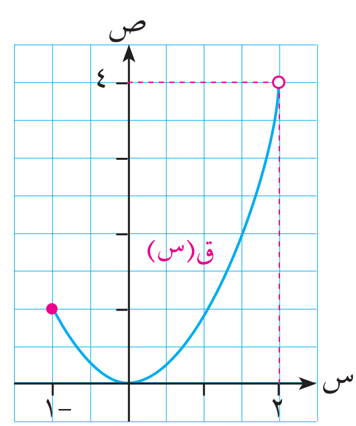
ومن الملاحظ أن كل قيمة قصوى مطلقة هي قيمة قصوى محلية، ولكن العكس غير صحيح .

مثال (١)

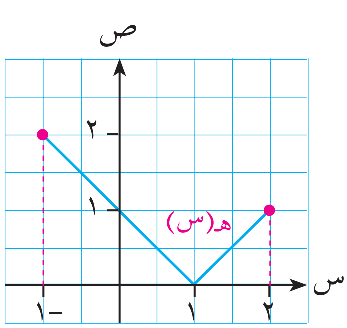
ليكن ق(س) = س^{٢} ، −١ ≤ س < ٢

هـ(س) = |س − ١| ، −١ ≤ س ≤ ٢

استخدم التمثيل البياني لكلٍ من الاقترانين في إيجاد القيم القصوى المحلية والمطلقة لهما (إن وجدت). ثم عين المشتقة الأولى عند نقطة / نقط القيمة القصوى (إن وجدت) .



الشكل (٣−٢٣)



الشكل (٣−٢٤)

الحل:

أولاً: الاقتران ق(س): لاحظ الشكل (٣-٢٣)

للاقتران ق(س) قيمة عظمى محلية عند س = -١ ، وهي ق(-١) = ١

قَ(-١) غير موجودة لأن س = -١ تمثل نقطة طرفية؛ ولا يوجد للاقتران ق(س) قيمة عظمى مطلقة.

للاقتران ق(س) قيمة صغرى محلية ومطلقة عند س = ٠ ، وهي ق(٠) = ٠

قَ(٠) = ٠ (تحقق من ذلك).

ثانياً: الاقتران هـ(س): لاحظ الشكل (٣-٢٤)

للاقتران هـ(س) قيمتان عظميان محليتان عند س = -١ ، س = ٢ هما هـ(-١) = ٢ ، هـ(٢) = ١ ، المشتقة عند كلٍ منهما غير موجودة لأنهما تمثلان نقطتين طرفيتين، والقيمة العظمى المحلية هـ(-١) = ٢ هي قيمة عظمى مطلقة أيضاً.

للاقتران هـ(س) قيمة صغرى محلية ومطلقة عند س = ١ ، وهي هـ(١) = ٠

حيث هـَ(١) غير موجودة. (تحقق من ذلك).

استخدام المشتقة الأولى في تعيين القيم القصوى المحلية:

إن التمثيل البياني لأي اقتران على مجاله يساعد في تحديد نقط القيم القصوى المحلية للاقتران، ولكن ماذا عن المشتقة؟

لاحظنا مما سبق أن القيم القصوى توجد عند نقط داخلية حيث المشتقة عندها تساوي صفراً أو تكون غير موجودة، أو عند طرفي فترة تعريف الاقتران حيث المشتقة غير موجودة. تسمى أمثال هذه النقط نقطاً حرجة.

تعريف:

تسمى النقطة (جـ ، ق(جـ))، حيث جـ تنتمي إلى مجال ق(س)، نقطة حرجة للاقتران ق(س) إذا كانت قَ(جـ) = ٠ ، أو قَ(جـ) غير موجودة.

مثال (٢)

عين جميع النقط الحرجة للاقتران ق(س) = $\frac{١}{٣}$ س^{٣}−٣س^{٢}+٨س+٢ ، س ∈ ح .

الحل:

حيث إن ق(س) اقتران كثير حدود معرف على ح فإن النقط الحرجة هي النقط حيث المشتقة الأولى = صفراً .

قَ(س) = س^{٢} − ٦س + ٨

قَ(س) = ٠ ⟸ س^{٢}−٦س + ٨ = ٠

⟸ س = ٢ ، ٤

النقطتان الحرجتان هما : (٢ ، ق(٢)) ، (٤ ، ق(٤))، أي (٢ ، $\frac{٢٦}{٣}$) ، (٤ ، $\frac{٢٢}{٣}$)

مثال (٣)

ليكن ق(س) = س^{٣} ، −٢ ≤ س ≤ ٢

أ عين جميع النقط الحرجة للاقتران ق(س) .

ب ارسم منحنى ق(س)، ومن الرسم عين نوع كل نقطة من النقط الحرجة التي وجدتها في القسم أ من حيث كونها قيماً قصوى أو غير ذلك .

الحل:

قَ(س) = ٣س^{٢}

قَ(س) = ٠ ⟸ ٣س^{٢} = ٠ ⟸ س = ٠

قَ(س) غير موجودة عند طرفي المجال أي عند س = −٢ ، ٢

النقط الحرجة هي : (−٢ ، ق(−٢)) ، (٠ ، ق(٠)) ، (٢ ، ق(٢))

من الشكل (٣−٢٥) نلاحظ أنه :

عند النقطة الحرجة (−٢ ، ق(−٢)) = (−٢ ، −٨)

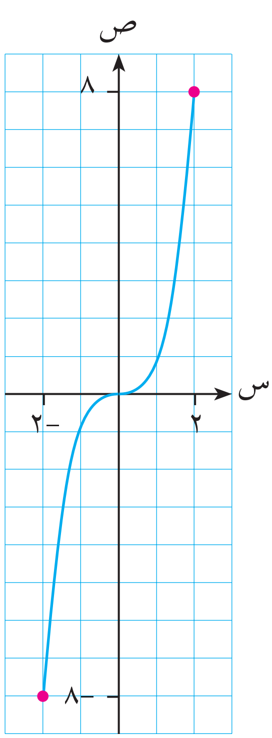
يوجد قيمة صغرى محلية وهي مطلقة أيضاً .

وعند النقطة الحرجة (٢ ، ق(٢)) = (٢ ، ٨)

يوجد قيمة عظمى محلية وهي مطلقة أيضاً .

بينما لا يوجد للاقتران أية قيمة قصوى

عند النقطة الحرجة (٠ ، ق(٠)) = (٠ ، ٠)



الشكل (٣−٢٥)

اختبار المشتقة الأولى لتعيين القيم القصوى المحلية

وجدنا في الأمثلة السابقة أن القيم القصوى المحلية لا توجد إلا عند النقط الحرجة للاقتران؛ ولكن لم تكن كل نقطة حرجة نقطة قيمة قصوى، راجع مثال (٣)؛ فمتى إذن تكون النقطة الحرجة للاقتران نقطة قيمة قصوى له؟ الاختبار الآتي هو إحدى طرق الإجابة عن هذا السؤال.

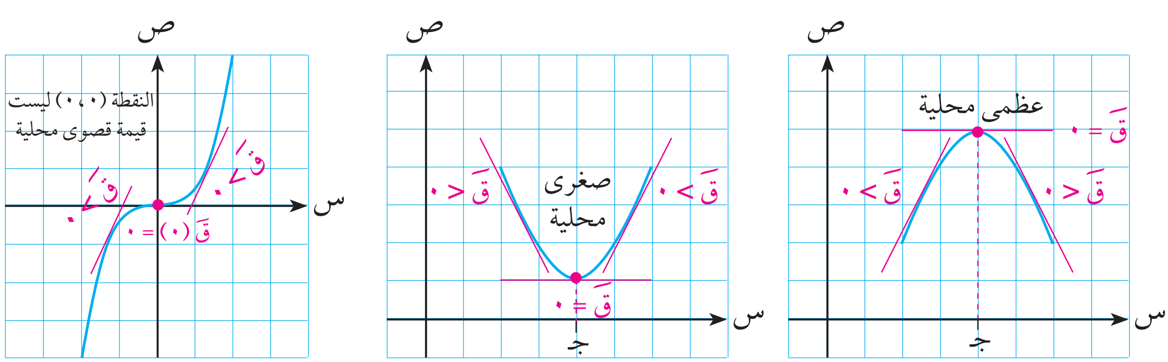
نظرية (اختبار المشتقة الأولى):

إذا كانت (جـ ، ق(جـ)) نقطة حرجة داخلية للاقتران ق(س) المتصل عند جـ ، ووجدت فترة مفتوحة حول جـ بحيث:

١ قَ(س) > ٠ عندما س < جـ ، قَ(س) < ٠ عندما س > جـ ، فإن ق(جـ) قيمة عظمى محلية.

٢ قَ(س) < ٠ عندما س < جـ ، قَ(س) > ٠ عندما س > جـ ، فإن ق(جـ) قيمة صغرى محلية.

لاحظ أنه إذا لم يحدث تغير في إشارة المشتقة الأولى على جانبي جـ فإنه لا يوجد للاقتران ق(س) قيمة قصوى محلية عند جـ. انظر الشكل (٣-٢٦).



(أ) (ب) (جـ)

الشكل (٣-٢٦)

مثال (٤)

إذا كان ق(س) = س^{٣} – ١٢س – ٥ ، س ∈ ح فعين القيمة / القيم القصوى المحلية للاقتران ق(س) مستخدماً اختبار المشتقة الأولى.

الحل:

أولاً: النقط الحرجة: قَ(س) = ٠ ⟸ ٣س^{٢} – ١٢ = ٠

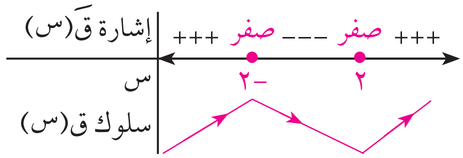
⟸ س = ٢ أو –٢

∴ لدينا نقطتان حرجتان هما : (٢ ، ق(٢)) ، (-٢ ، ق(-٢))

أي (٢ ، -٢١) ، (-٢ ، ١١)

ثانياً : إشارة قَ(س) :

الشكل (٣-٢٧) يبين إشارة قَ(س)



الشكل (٣-٢٧)

ثالثاً : اختبار المشتقة الأولى :

أ ق(س) متصل عند س = -٢ لأنه كثير حدود

وفي جوار س = -٢ تتغير إشارة قَ(س) من موجبة قبل س = -٢ إلى سالبة بعد س = -٢

∴ ق(-٢) = ١١ قيمة عظمى محلية .

ب ق(س) متصل عند س = ٢ لأنه كثير حدود

وفي جوار س = ٢ تتغير إشارة قَ(س) من سالبة قبل س = ٢ إلى موجبة بعد س = ٢

∴ ق(٢) = -٢١ قيمة صغرى محلية .

مثال (٥)

إذا كان ق(س) = |$س^٢$-١| ، س ∈ ح فعين القيمة/ القيم القصوى المحلية للاقتران وذلك باستخدام اختبار المشتقة الأولى .

الحل:

أولاً : النقط الحرجة :

$$ق(س) = \begin{cases} س^٢-١ &، س \leq -١ \\ ١-س^٢ &، -١ \leq س \leq ١ \\ س^٢-١ &، س \geq ١ \end{cases}$$

$$\Leftarrow \quad قَ(س) = \begin{cases} ٢س &، س < -١ \\ -٢س &، -١ < س < ١ \\ ٢س &، س > ١ \\ \text{غير موجودة} &، س = \mp ١ \text{ (لماذا؟)} \end{cases}$$

قَ(س)=٠ ⇐ -٢س = ٠ ، -١ < س < ١

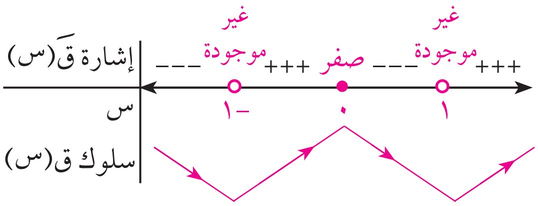
⇐ س = ٠

قَ(س) غير موجودة عند س = ∓١

∴ النقط الحرجة هي النقاط حيث س = −١ ، ٠ ، ١

ثانياً : إشارة المشتقة الأولى :

الشكل (٣−٢٨) يبين إشارة قَ(س)



الشكل (٣−٢٨)

ثالثاً : اختبار المشتقة الأولى :

أ النقطة الحرجة حيث س = −١

الاقتران ق متصل عند س = −١

وتغيرت إشارة قَ(س) من سالبة إلى موجبة

∴ ق(−١) = ٠ قيمة صغرى محلية .

ب النقطة الحرجة حيث س = صفر

الاقتران ق متصل عند س = ٠

وتغيرت إشارة قَ(س) من موجبة إلى سالبة

∴ ق(٠) = ١ قيمة عظمى محلية .

جـ النقطة الحرجة عند س = ١

الاقتران ق متصل عند س = ١

وتغيرت إشارة قَ(س) من سالبة إلى موجبة

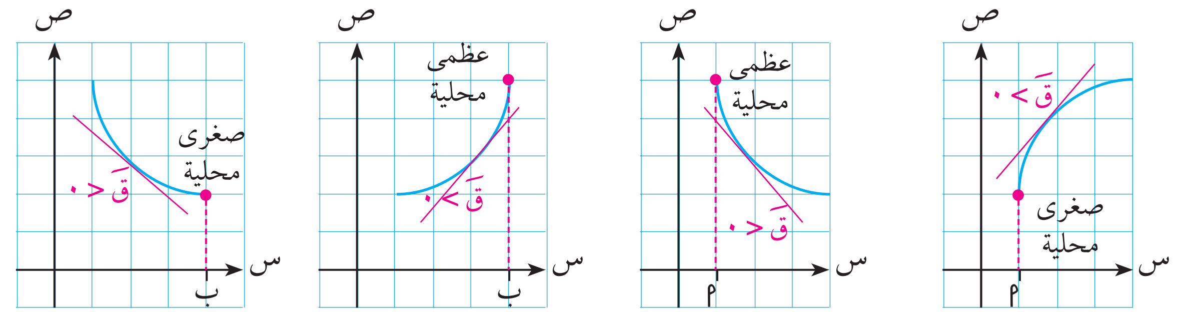
∴ ق(١) = ٠ قيمة صغرى محلية .

ملاحظة:

في حالة النقط الحرجة الطرفية ، إذا كانت (ﺃ ، ق(ﺃ)) نقطة طرفية (يسرى مثلاً) وكان الاقتران ق(س) متصلاً من اليمين عندها ، وكانت إشارة قَ(س) موجبة لجميع قيم س القريبة من ﺃ وعلى يمينها ، فإن ق(ﺃ) تكون قيمة صغرى محلية ؛ أما إذا كانت قَ(س) سالبة فإن ق(ﺃ) قيمة عظمى محلية . انظر الشكل (٣−٢٩ : أ ، ب) .

وبطريقة مماثلة تختبر النقطة الطرفية اليمنى ب ، انظر الشكل (٣−٢٩ : جـ ، د) .

أما إذا كان ق(س) غير متصل عند نقطة حرجة طرفية ، فإنه يمكننا استخدام الرسم البياني لمنحنى الاقتران للبحث في القيم القصوى .



(د)	(جـ)	(ب)	(أ)

الشكل (٣-٢٩)

مثال (٦)

ليكن ق(س) = { س^{٢} ، −١ ≤ س < ٢ ؛ ٢ ، س = ٢ }

عين القيمة/ القيم القصوى المحلية للاقتران ق(س) على مجاله .

الحل:

أولاً: النقط الحرجة:

قَ(س) = ٢س ، −١ < س < ٢

قَ(س) = ٠ عندما ٢س = ٠ ومنها س = ٠

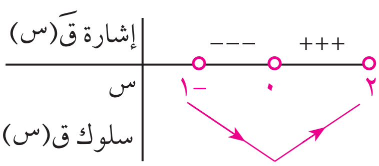
قَ(س) غير موجودة عند النقطتين الطرفيتين حيث س = −١ ، ٢

∴ النقط الحرجة هي النقط الواقعة على منحنى ق(س)

حيث س = −١ ، ٠ ، ٢

ثانياً: إشارة قَ(س):

الشكل (٣-٣٠) يبين إشارة قَ(س)



الشكل (٣-٣٠)

ثالثاً: اختبار المشتقة الأولى:

أ النقطة الحرجة حيث س = −١

ق متصل من جهة اليمين عند النقطة الطرفية حيث س = −١

قَ(س) < ٠ على يمين س = −١

∴ (−١ ، ق(−١)) = (−١ ، ١) نقطة قيمة عظمى محلية .

ب النقطة الحرجة حيث س = ٠

ق متصل عند س = ٠ ، وتتغير إشارة قَ(س) من سالبة إلى موجبة

∴ (٠ ، ق(٠)) = (٠ ، ٠) نقطة قيمة صغرى محلية .

جـ النقطة الحرجة حيث س = ٢

ق غير متصل عند س = ٢

∴ لا يمكن الجزم باستخدام المشتقة الأولى

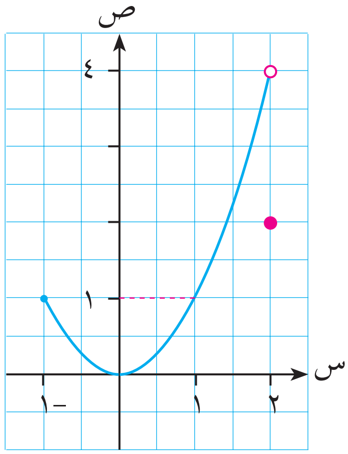
بوجود قيمة قصوى عند س = ٢

وبالرجوع إلى التمثيل البياني لمنحنى ق(س)

كما هو في الشكل (٣-٣١)، نلاحظ أن :

النقطة الحرجة (٢ ، ق(٢)) = (٢ ، ٢)

هي نقطة قيمة صغرى محلية .



الشكل (٣-٣١)

للاتصال على فترة مغلقة [أ ، ب] أهمية خاصة في دراسة القيم القصوى المطلقة للاقترانات والنظرية التالية توضح ذلك :

نظرية القيم القصوى المطلقة:

إذا كان ق(س) اقتراناً متصلاً على الفترة المغلقة [أ ، ب] فإن ق(س) يتخذ قيمة عظمى مطلقة وقيمة صغرى مطلقة على [أ ، ب] .

في هذه الحالة، أي عندما يكون الاقتران متصلاً على فترة مغلقة، يكفي لتعيين القيم القصوى المطلقة أن نعين جميع النقط الحرجة أولاً، ثم نقارن قيم الاقتران عندها ؛ فتكون أكبرها هي القيمة العظمى المطلقة، وتكون أصغرها هي القيمة الصغرى المطلقة .

مثال (٧)

عين القيم القصوى المطلقة للاقتران ق(س) = س^{٢} - ٦س + ٩ حيث ٠ ≤ س ≤ ٥

الحل:

ق(س) اقتران كثير حدود فهو متصل على الفترة المغلقة [٠ ، ٥]

∴ ق(س) يتخذ قيمة عظمى مطلقة وقيمة صغرى مطلقة على هذه الفترة .

النقط الحرجة :

$$\bar{ق}(س) = \begin{cases} ٢س - ٦ & ، \quad ٠ < س < ٥ \\ \text{غير موجودة} & ، \quad س = ٠ ، ٥ \end{cases}$$

$\bar{ق}(س) = ٠$ عندما ٢س−٦ = ٠ أي عندما س = ٣ ∈]٠، ٥[

$\bar{ق}(س)$ غير موجودة عند س = ٠ ، ٥ (نقطتان طرفيتان)

∴ النقط الحرجة هي عندما س= ٠ ، ٣ ، ٥

ق(٠) = ٩ ، ق(٣) = ٩ − ١٨ + ٩ = صفر ، ق(٥) = ٢٥ − ٣٠ + ٩ = ٤

وبمقارنة القيم الثلاث نستنتج أن :

ق(٣) = ٠ ، هي القيمة الصغرى المطلقة للاقتران .

ق(٠) = ٩ ، هي القيمة العظمى المطلقة للاقتران .

مثال (٨)

إذا كان ق(س) $= \begin{cases} ٤−٢س & ، \quad ٠ \leq س < ١ \\ س+١ & ، \quad ١ \leq س \leq ٢ \end{cases}$

فعين القيم القصوى المطلقة للاقتران ق(إن وجدت)

الحل:

ق(س) متصل على [٠ ، ٢] (تحقق من ذلك)

ق(س) يتخذ قيمة عظمى مطلقة وقيمة صغرى مطلقة على [٠ ، ٢] .

النقط الحرجة :

$$\bar{ق}(س) = \begin{cases} -٢ & ، \quad ٠ < س < ١ \\ ١ & ، \quad ١ < س < ٢ \\ \text{غير موجودة} & ، \quad س = ٠ ، ١ ، ٢ \quad \text{(لماذا؟)} \end{cases}$$

∴ النقط الحرجة حيث س = ٠ ، ١ ، ٢

ق(٠) = ٤ ، ق(١) = ٢ ، ق(٢) = ٣

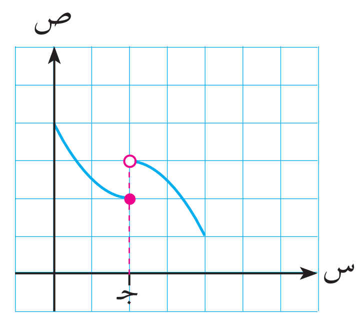
وبمقارنة القيم الثلاث نستنتج أن :

ق(١) = ٢ هي القيمة الصغرى المطلقة للاقتران .

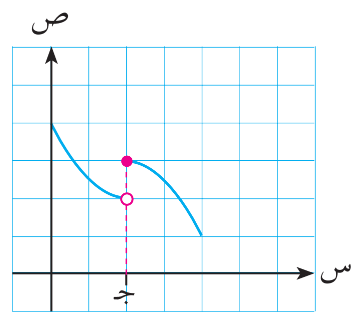
ق(٠) = ٤ هي القيمة العظمى المطلقة للاقتران .

تمارين (٣-٣)

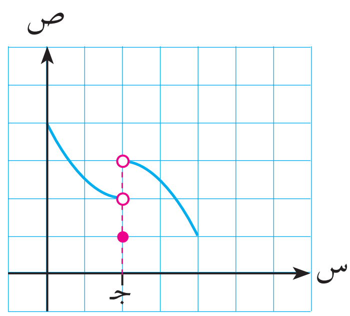
١ أي الاقترانات في كل من الأشكال الآتية يتخذ قيمة قصوى محلية عند س = جـ؟ وما نوع هذه القيمة (إن وجدت)؟



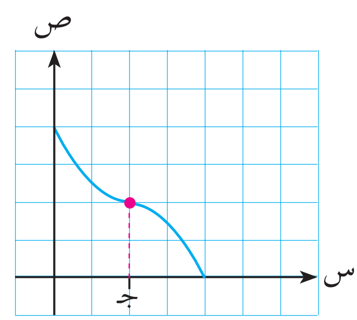
(أ)



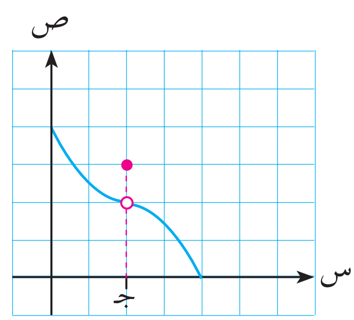
(ب)



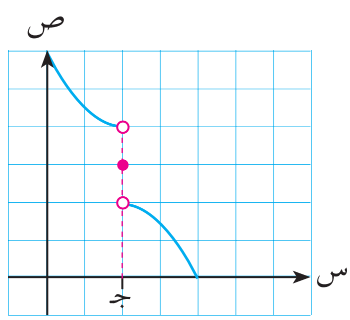
(جـ)



(د)



(هـ)



(و)

٢ عين جميع النقط الحرجة لكل من الاقترانات الآتية :

أ ق(س) = $\frac{\text{٢س} - ٣}{\text{س}^{٢} - ٩}$ ب هـ(س) = ⟦س⟧ . جـ ك(س) = $\sqrt{\text{س}}$ في الفترة [٠ ، ٤] .

٣ استخدم اختبار المشتقة الأولى في تعيين القيمة / القيم القصوى المحلية (إن وجدت) لكل من الاقترانات الآتية :

أ ق(س) = س^{٣}+٣س^{٢}+٣س−٢

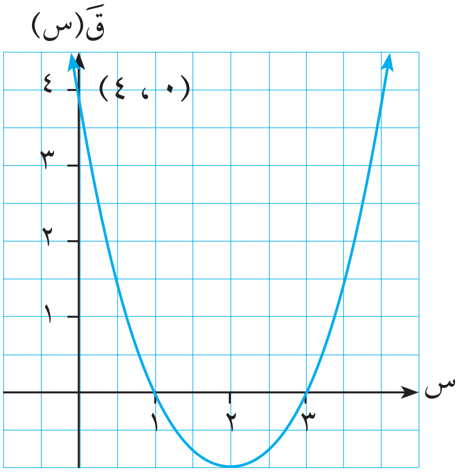
ب ق(س) = $\begin{cases} -\text{٢س} &، \text{س} < ١ \\ \text{س} - ٣ &، ١ \leq \text{س} \leq ٤ \\ ٥ - \text{س} &، \text{س} > ٤ \end{cases}$

جـ ق(س) = س^{٢}−٢|س|+٢ ، س ∈ $\left[-\frac{١}{٢} ، \frac{٣}{٢}\right]$

د ق(س) = جا^{٢}س ، س ∈]٠ ، ٢π[

٤ أوجدالقيمة/ القيم القصوى المحلية والمطلقة للاقتران ص = جاس + جتاس على الفترة [٠ ، ٢π] .

٥ يبين الرسم المجاور منحنى المشتقة الأولى قَ(س) للاقتران ق(س) :



أ عين النقط الحرجة للاقتران ق(س) .

ب عين مجالات التزايد والتناقص للاقتران ق(س) .

جـ عين القيم القصوى المحلية للاقتران ق(س) .

٦ أوجد الثوابت ٲ ، ب ، جـ ، د بحيث يحقق منحنى الاقتران

ق(س) = ٲ س^{٣}+ب س^{٢}+جـ س+ د الشروط التالية معاً :

أ يمر بنقطة الأصل   ب له نقطة حرجة عند س = ٤

جـ معادلة المماس للمنحنى عند النقطة (١ ، ق(١)) عليه هي : ٩س − ص + ٧ = ٠

٧ ق(س) اقتران كثير حدود معرف على ح ، وله قيمة عظمى محلية عند س = ٲ ، وقيمة صغرى محلية عند س = ب . بتطبيق نظرية رول على الاقتران قَ(س)، أثبت وجود عدد واحد على الأقل جـ ∈]ٲ ، ب[بحيث قً(جـ) = ٠ .

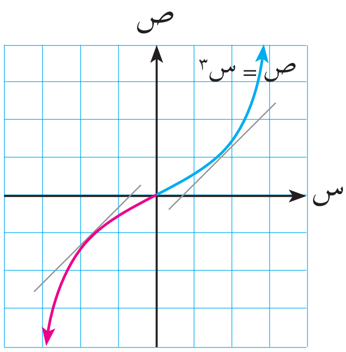
٨ عين القيم القصوى المطلقة (إن وجدت) لكل من الاقترانات الآتية :

أ ق(س) = $\frac{س^{٣}}{٣}$ − $\frac{٥}{٢}$ س^{٢}+٦س+١٠ ، س ∈ [١ ، ٤]

ب ق(س) = $\sqrt[٣]{س}$ ، −١ ≤ س ≤ ٨

جـ ق(س) = { س ، ٠ ≤ س < ١
            |س − ٢| ، ١ ≤ س ≤ ٣

٣-٤ التقعر ونقط الانعطاف (Concavity & Points of Inflection)



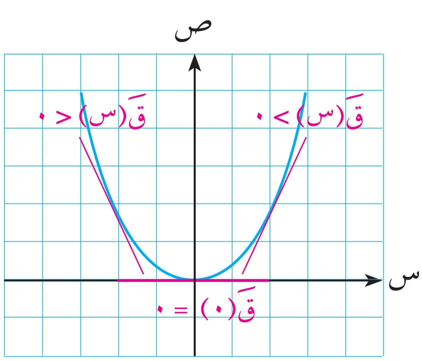
الشكل (٣-٣٢)

يوضح شكل (٣-٣٢) المجاور أن الاقتران ق(س) = س^٣ اقتران متزايد على ح؛ ولكن يلاحظ أن اتجاه تقوس المنحنى قبل س = ٠ يختلف عن اتجاه تقوسه بعد س = ٠ .

في الحالة الأولى أي عندما س < ٠ ، نلاحظ أن المنحنى يقع تحت جميع مماساته في هذا الجزء؛ أما في الحالة الثانية، أي عندما س > ٠ ، فإن المنحنى يقع فوق جميع مماساته في هذا الجزء .

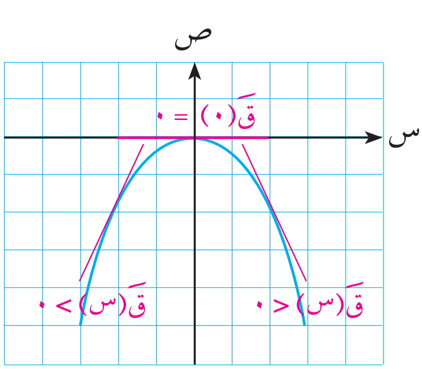
تعريف:

يقال لمنحنى اقتران ق(س) إنه مقعر للأعلى في فترة من مجاله إذا كان واقعاً فوق جميع مماساته في هذه الفترة، وإنه مقعر للأسفل في فترة من مجاله إذا كان واقعاً تحت جميع مماساته في هذه الفترة .



الشكل (٣-٣٣)

فمثلاً منحنى الاقتران ق(س) = س^٢ ، كما في الشكل (٣-٣٣) منحنى مقعر للأعلى على مجاله ح. نلاحظ في هذه الحالة أن ميل المماس يتزايد بازدياد س، أي أن قَ(س) اقتران متزايد؛ وبالتالي فإن قً(س) موجبة .



الشكل (٣-٣٤)

وبالعكس، فإن منحنى ق(س) = -س^٢ ، كما في الشكل (٣-٣٤) مقعر للأسفل على ح. نلاحظ في هذه الحالة أن ميل المماس يتناقص بازدياد س، أي أن قَ(س) اقتران متناقص على ح؛ وبالتالي فإن قً(س) سالبة .

نظرية: (اختبار التقعر باستخدام المشتقة الثانية)

إذا كان ق(س) اقتراناً متصلاً على [أ ، ب] وكانت قَ(س) ، قً(س) معرفتين على] أ ، ب [فإنه :

١ إذا كانت قً(س) > ٠ لجميع س ∈] أ ، ب [فإن منحنى ق(س) يكون مقعراً للأعلى في الفترة [أ ، ب]

٢ إذا كانت قً(س) < ٠ لجميع س ∈] أ ، ب [فإن منحنى ق(س) يكون مقعراً للأسفل في الفترة [أ ، ب]

مثال (١)

ليكن ق(س) = $س^{٣}$ + ٦$س^{٢}$ − ٢س − ٥ . عين الفترات التي يكون فيها منحنى الاقتران ق(س) مقعراً للأعلى ، والفترات التي يكون فيها مقعراً للأسفل .

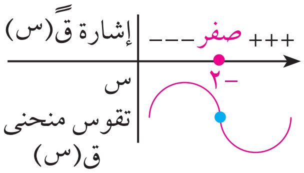
الحل:

ق(س) = $س^{٣}$ + ٦$س^{٢}$ − ٢س − ٥

قَ(س) = ٣$س^{٢}$ + ١٢س − ٢

قً(س) = ٦س + ١٢

إشارة قً(س) كما هو مبين بالشكل (٣-٣٥)



الشكل (٣-٣٥)

قً(س) < ٠ عندما س < −٢

∴ منحنى ق(س) مقعر للأسفل في الفترة]−∞ ، −٢]

كذلك نلاحظ أن قً(س) > ٠ عندما س > −٢

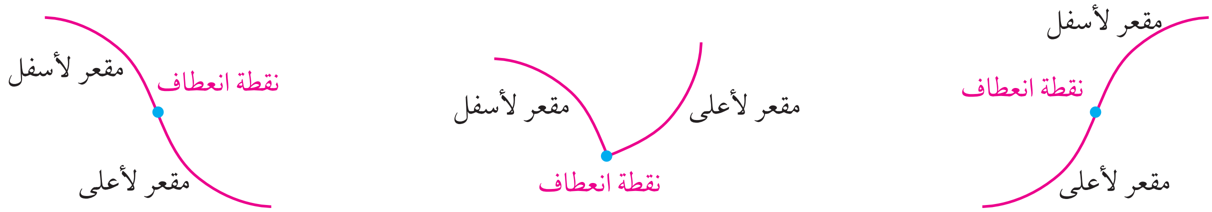
∴ منحنى ق(س) مقعر للأعلى في الفترة [−٢ ، ∞[

أما النقطة (−٢ ، ق(−٢)) أي النقطة (−٢ ، ١٥) التي يغير المنحنى عندها اتجاه تقعره فتسمى نقطة انعطاف لمنحنى الاقتران .

تعريف: (نقطة الانعطاف)

ليكن ق(س) اقتراناً متصلاً عند س = جـ ؛ تسمى النقطة (جـ، ق(جـ)) نقطة انعطاف لمنحنى الاقتران إذا غيَّر منحنى الاقتران ق(س) اتجاه تقعره عند النقطة جـ ؛ من أعلى إلى أسفل أو بالعكس .

الشكل (٣-٣٦) يوضح نقطة الانعطاف لاقترانات مختلفة.



الشكل (٣-٣٦)

ملاحظة:

عند نقطة الانعطاف(جـ، ق(جـ)) تكون قً(جـ) = صفراً أو غير موجودة؛ إلا أن هذا ليس شرطاً كافياً لوجود نقطة انعطاف، فالاقتران ق(س) = س^٤، على سبيل المثال، يحقق الشرط قً(٠) = ٠ ولكن النقطة (٠، ق(٠)) ليست نقطة انعطاف لمنحنى الاقتران = س^٤ لأنه مقعر للأعلى دائماً، (تحقق من ذلك).

مثال (٢)

إذا كان ق(س) = س − جاس، س ∈ [٠ ، ٢π] فأوجد فترة / فترات التقعر للأعلى والأسفل لمنحنى ق، وعين نقطة/ نقط الانعطاف (إن وجدت).

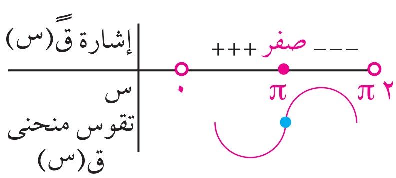
الحل:

ق(س) = س − جاس ، س ∈ [٠ ، ٢π]

قَ(س) = ١ − جتاس

قً(س) = جاس

إشارة قً(س) كما هو مبين في الشكل (٣-٣٧)



الشكل (٣-٣٧)

قً(س) > ٠ عندما س ∈] ٠ ، π [

∴ منحنى ق مقعر للأعلى في الفترة [٠ ، π]

قً(س) < ٠ عندما س ∈] π ، ٢π [

∴ منحنى ق مقعر للأسفل في الفترة [π ، ٢π]

وبما أن الاقتران ق متصل عند س = π

ويغير اتجاه تقعره في جوارها

∴ النقطة (π، ق(π)) = (π، π) نقطة انعطاف.

مثال (٣)

إذا كان ق(س) = |س^{٢} − ٩|، فعين مجالات التقعر للأعلى والأسفل لمنحنى ق(س) ونقطة الانعطاف (إن وجدت).

الحل:

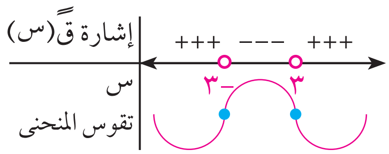
$$\text{ق}(\text{س}) = |\text{س}^{٢} - ٩|$$

$$= \begin{cases} \text{س}^{٢} - ٩ & ، \quad \text{س} \leq -٣ \\ -\text{س}^{٢} + ٩ & ، \quad -٣ < \text{س} < ٣ \\ \text{س}^{٢} - ٩ & ، \quad \text{س} \geq ٣ \end{cases}$$

$$\text{قَ}(\text{س}) = \begin{cases} ٢\text{س} & ، \quad \text{س} < -٣ \\ -٢\text{س} & ، \quad -٣ < \text{س} < ٣ \\ ٢\text{س} & ، \quad \text{س} > ٣ \\ \text{غير موجودة} & ، \quad \text{س} = \mp ٣ \end{cases}$$

$$\text{قً}(\text{س}) = \begin{cases} ٢ & ، \quad \text{س} < -٣ \\ -٢ & ، \quad -٣ < \text{س} < ٣ \\ ٢ & ، \quad \text{س} > ٣ \\ \text{غير موجودة} & ، \quad \text{س} = \mp ٣ \end{cases}$$

إشارة قً(س) كما هو مبين بالشكل (٣-٣٨)



الشكل (٣-٣٨)

قً(س) < ٠ عندما −٣ < س < ٣

∴ منحنى ق(س) مقعر للأسفل في الفترة [−٣، ٣]

قً(س) > ٠ عندما س < −٣ ، وكذلك س > ٣

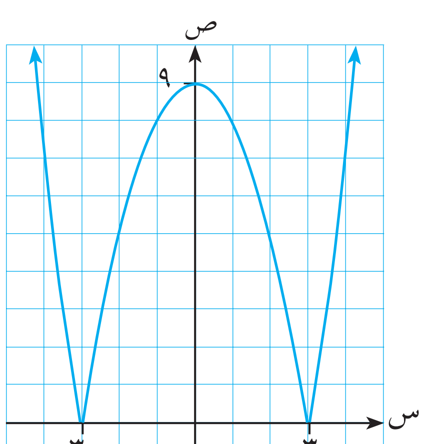
∴ منحنى ق(س) مقعر للأعلى في الفترة]−∞، −٣[.

وكذلك في الفترة]٣، ∞[

النقطة (−٣، ق(−٣)) = (−٣، ٠) نقطة انعطاف،

لأن ق(س) متصل عند س = −٣، ويغير المنحنى اتجاه تقعره حولها، وكذلك النقطة (٣، ق(٣)) = (٣، ٠) نقطة انعطاف ثانية للسبب ذاته.

انظر الشكل (٣-٣٩) الذي يمثل منحنى ق(س).



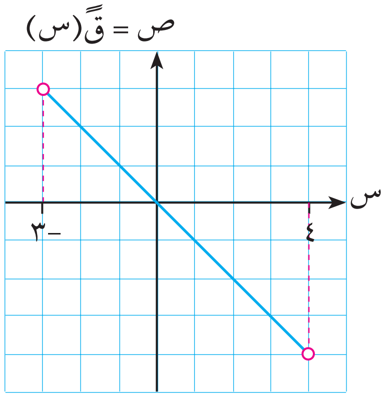
الشكل (٣-٣٩)

مثال (٤)

يمثل الشكل (٣-٤٠) منحنى قً(س) للاقتران المتصل ق(س) على الفترة [-٣ ، ٤] .

أ عين مجالات التقعر للأعلى وللأسفل لمنحنى ق(س) .

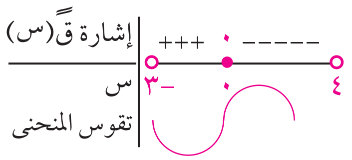
ب عين نقطة / نقط الانعطاف(إن وجدت) .



الشكل (٣-٤٠)

الحل:

الشكل (٣-٤١) يوضح إشارة قً(س)



الشكل (٣-٤١)

أ قً(س) > ٠ على الفترة]-٣ ، ٠[

∴ منحنى ق(س) مقعر للأعلى على الفترة [-٣ ، ٠]

قً(س) < ٠ على الفترة]٠ ، ٤[

∴ منحنى ق(س) مقعر للأسفل على الفترة [٠ ، ٤]

ب النقطة (٠ ، ق(٠)) نقطة انعطاف لأن ق متصل عند س = ٠

ويغير المنحنى اتجاه تقعره عندها .

مثال (٥)

إذا كان ق(س) = س + $\frac{١}{س}$ ، س ≠ ٠ ، فأوجد :

أ فترات التقعر للأعلى و للأسفل لمنحنى ق .

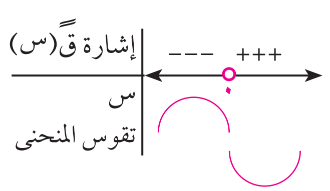
ب نقطة / نقط الانعطاف إن وجدت .

الحل:

قَ(س) = ١ - $\frac{١}{س^٢}$ = ١ - س$^{-٢}$

قً(س) = ٢س$^{-٣}$ = $\frac{٢}{س^٣}$

إشارة قً(س) كما هو مبين في الشكل (٣-٤٢)



الشكل (٣-٤٢)

قً(س) > ٠ على الفترة]٠ ، ∞[

∴ منحنى ق مقعر للأعلى على الفترة]٠ ، ∞[

قً(س) < ٠ عندما على الفترة]-∞ ، ٠[

∴ منحنى ق(س) مقعر للأسفل على الفترة]-∞ ، ٠[

المنحنى يغير تقعره في جوار س = ٠ ، ولكن الاقتران غير متصل عند س = ٠ لأنه ليس معرفاً عندها ؛ فلا توجد إذن أية نقطة انعطاف لمنحنى الاقتران .

اختبار المشتقة الثانية في تعيين القيم القصوى (Second Derivative Test)

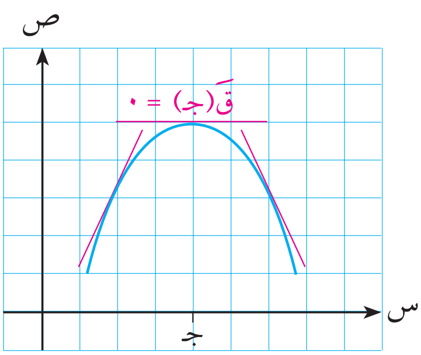
كنا قد استخدمنا سابقاً المشتقة الأولى لتعيين القيم القصوى للاقترانات ؛ ومن الممكن استخدام المشتقة الثانية للغاية ذاتها عند النقطة الحرجة حيث المشتقة الأولى عندها تساوي صفراً .

نظرية:

إذا كان ق(س) اقتراناً قابلاً للاشتقاق على فترة مفتوحة تحوي جـ ، وكان قَ(جـ) = ٠ فإنه :

١ إذا كان قً(جـ) < ٠ فإن ق(جـ) قيمة عظمى محلية .

٢ إذا كان قً(جـ) > ٠ فإن ق(جـ) قيمة صغرى محلية .



الشكل (٣-٤٣)

يوضح الشكل (٣-٤٣) منحنى الاقتران ق(س) حيث قَ(جـ) = ٠ ، أي أن المماس عند جـ أفقي، قً(جـ) < ٠ أي أن المماسات في جوار جـ تقع فوق المنحنى مما يعني أن ق(جـ) قيمة عظمى محلية .
وبالمثل يمكن توضيح الحالة الثانية .

مثال (٦)

استخدم المشتقة الثانية في تعيين القيم القصوى للاقتران :

ق(س) = س^{٣} – ٢٧س + ٤٨ ، س ∈ ح

الحل:

ق(س) = س^{٣} – ٢٧س + ٤٨

قَ(س) = ٣س^{٢} – ٢٧

قً(س) = ٦س

النقط الحرجة حيث قَ(س) = ٠

٣س^{٢} – ٢٧ = ٠

ومنها س = ∓ ٣

أ اختبار المشتقة الثانية للنقطة الحرجة حيث س = ٣

قً(٣) = ٦ × ٣ = ١٨ > ٠

∴ (٣ ، ق(٣)) = (٣ ، −٦) نقطة قيمة صغرى محلية

ب اختبار المشتقة الثانية للنقطة الحرجة حيث س = − ٣

قً(−٣) = ٦ × −٣ = −١٨ < ٠

∴ (−٣ ، ق(−٣)) = (−٣ ، ١٠٢) نقطة قيمة عظمى محلية

ملاحظة:

إذا كانت قً(جـ) = ٠ ، أو غير موجودة، فإن اختبار المشتقة الثانية يفشل ؛ وعندئذ نعود إلى اختبار المشتقة الأولى .

مثال (٧)

ليكن ق(س) = س^{٤} ، س ∈ ح أوجد القيم القصوى المحلية للاقتران .

الحل:

قَ(س) = ٤ س^{٣}

قَ(س) = ٠ ⟸ س = ٠

∴ للاقتران ق(س) نقطة حرجة واحدة عند س = ٠

قً(س) = ١٢ س^{٢}

∴ قً(٠) = ٠ ⟸ اختبار المشتقة الثانية يفشل، ولذا نعود لاختبار المشتقة الأولى، ومن الواضح أن المشتقة الأولى تغير إشارتها من سالبة إلى موجبة بازدياد قيم س في جوار س = ٠

∴ للاقتران ق(س) قيمة صغرى محلية عند س = ٠ وتساوي ق(٠) = ٠

تمارين (٣-٤)

١ عين فترة/ فترات التقعر للأعلى وللأسفل ونقطة/ نقط الانعطاف إن وجدت لكل من الاقترانات الآتية :

أ ق(س) = $\frac{١}{٤}$ س^{٤} − $\frac{١}{٢}$ س^{٢}

ب ق(س) = $\frac{١}{س}$

جـ ق(س) = جاس + جتاس ، س ∈ [٠ ، ٢π]

د ق(س) = ظاس−٢ ، س ∈] $\frac{-π}{٢}$ ، $\frac{π}{٢}$ [

٢ استخدم اختبار المشتقة الثانية لتعيين القيم القصوى لكل من الاقترانين الآتيين :

أ ق(س) = ٨س^{٢} − ٢س^{٤}

ب ق(س) = س^{٢} − $\frac{٢٧}{س}$

٣ إذا كانت النقطة (١ ، ق(١)) نقطة انعطاف للاقتران $ق(س) = أ س^{٢} + س^{-٢}$ ، فما قيمة أ ؟

٤ إذا كان $ق(س) = س^{٣} + أ س^{٢} + ب س + ٥$ فأوجد الثابتين أ ، ب في كل من الحالتين الآتيتين:

أ للاقتران ق(س) قيمة عظمى محلية عند س = −١ ، وقيمة صغرى محلية عند س = ٣ .

ب للاقتران ق(س) قيمة صغرى محلية عند س = ٤ ، ونقطة انعطاف عند س = ١ .

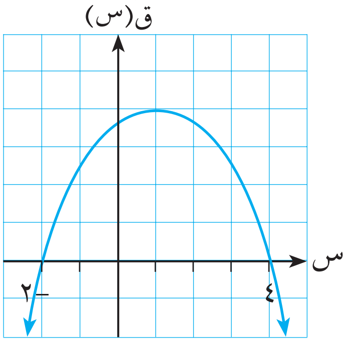
٥ الشكل المجاور يمثل منحنى قً(س) . إذا علمت أن:

النقاط الحرجة للاقتران ق(س) هي عند س = −١ ، ٦ فأوجد:

أ فترات التقعر للأعلى وللأسفل للاقتران ق(س)

ب نقط القيم القصوى المحلية للاقتران ق(س)

جـ نقطة/ نقط الانعطاف للاقتران ق(س)



٦ أثبت أن قياس زاوية ميل المماس عند نقطة الانعطاف للاقتران $ق(س) = \frac{س}{س^{٢} - ١}$ يساوي ١٣٥° .

٧ إذا كان ق(س) اقتراناً معرفاً على ح بحيث $قَ(س) = \frac{س}{س^{٢} + ٩}$ فأوجد نقطة/ نقط الانعطاف لمنحنى ق(س) .

٨ إذا كان ك(س) كثير حدود متزايداً على [أ ، ب]، ولا يتخذ القيمة صفراً في هذه الفترة، وكان الاقتران ق(س) قابلاً للاشتقاق على الفترة]أ ، ب[بحيث إن $قَ(س) = \frac{٧}{ك(س)} - ٥س$ ، فأثبت أن منحنى الاقتران ق(س) مقعر للاسفل في]أ ، ب[.

٩ إذا كان لمنحنى الاقتران $ق(س) = أ س^{٣} + ب س^{٢} + جـ س + د$ قيمة عظمى محلية عند $س_{١}$ وقيمة صغرى محلية عند $س_{٢}$ فأثبت أن للاقتران ق(س) نقطة انعطاف عند $\frac{س_{١} + س_{٢}}{٢}$.

١٠ يمثل الشكل المجاور منحنى قَ(س) . اعتمد على الشكل في إيجاد:

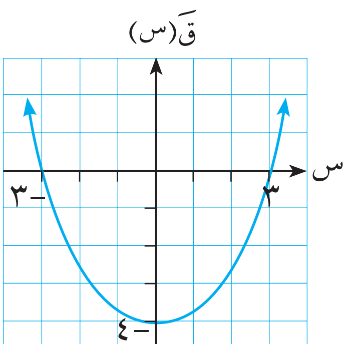
أ قيم س التي يوجد عندها نقط حرجة للاقتران ق(س)

ب مجالات التزايد والتناقص للاقتران ق(س) .

جـ نقط القيم القصوى للاقتران ق(س) .

د مجالات التقعر للأعلى وللأسفل لمنحنى ق(س) .

هـ نقطة / نقط الانعطاف للاقتران ق(س) .



٣-٥ رسم المنحنيات (Curve Sketching)

من بين التطبيقات المهمة للمشتقة الأولى قَ(س) والمشتقة الثانية قً(س) استخدامهما في رسم الشكل العام لمنحنى الاقتران ص = ق(س).

وبوجه عام، يمكننا اتباع الخطوات الأساسية الآتية عند رسم الشكل العام لمنحنى اقتران ما:

أ نعين مجال الاقتران ثم نجد قَ(س)، قً(س).

ب نعين فترات التزايد والتناقص ونقط القيم القصوى (إن وجدت).

جـ نعين فترات التقعر ونقط الانعطاف (إن وجدت).

د نعين النقاط السابقة في المستوى الديكارتي، ونقطاً أخرى مناسبة حولها (إن لزم الأمر)، ونقط التقاطع مع المحورين الإحداثيين (إن أمكن).

هـ نصل بين النقاط السابقة بخط ممهد، ونكمل المنحنى مع مراعاة مجال الاقتران.

مثال (١)

ارسم الشكل العام لمنحنى الاقتران ق(س) = س^{٤} − ٤س^{٣} + ٥.

الحل:

ق(س) اقتران كثير حدود مجاله ح

أ قَ(س) = ٤س^{٣} − ١٢س^{٢} = ٤س^{٢} (س−٣)

قً(س) = ١٢س^{٢} − ٢٤س = ١٢س(س−٢)

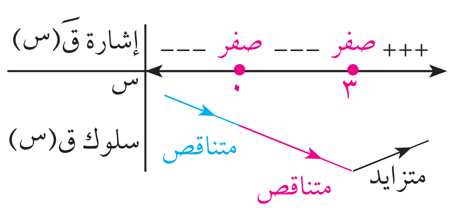
ب التزايد والتناقص والقيم القصوى:

النقط الحرجة:

قَ(س) = ٠ ⟸ ٤س^{٢}(س−٣)$ = ٠

⟸ س = ٠، ٣

إشارة قَ(س) كما هو مبين في الشكل (٣-٤٤)



الشكل (٣-٤٤)

قَ(س) > ٠ عندما س > ٣

∴ ق(س) متزايد على [٣، ∞[

قَ(س) < ٠ عندما س < ٠ ، وكذلك عندما س ∈]٠، ٣[

وحيث إن ق(س) متصل عند س = ٠ لأنه كثير حدود

∴ ق(س) متناقص على]−∞، ٣]

ق(٠) ليست قيمة قصوى لأن قَ(س) لا تغير اشارتها حول س = ٠

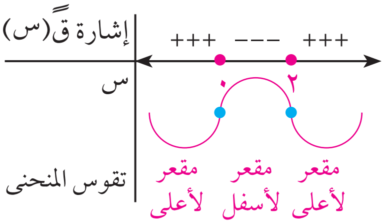
أما (٣، ق(٣)) = (٣، –٢٢) فهي نقطة قيمة صغرى محلية

لأن قَ(س) تغير اشارتها من سالبة قبل س = ٣ إلى موجبة بعد س = ٣

جـ التقعر ونقط الانعطاف

قً(س) = ٠ ⇐ س = ٠ ، ٢

إشارة قً(س) كما هو مبين في الشكل (٣–٤٥)



الشكل (٣–٤٥)

قً(س) > ٠ عندما ٠ > س > ٢

∴ منحنى ق مقعر للأسفل على [٠، ٢]

قً(س) > ٠ عندما س < ٢ ، وكذلك عندما س > ٠

∴ منحنى ق(س) مقعر للأعلى على الفترة [٢، ∞[وكذلك]–∞، ٠]

∴ النقطتان (٠، ق(٠)) = (٠، ٥)، (٢، ق(٢)) = (٢، –١١) هما نقطتا انعطاف لاتصال ق(س) عندهما وتغير اتجاه التقعر حول كلٍ منهما .

د نقاط أخرى على المنحنى :

نقط التقاطع مع المحورين :

عندما س = ٠ تكون ص = ٥

عندما ص = ٠ يكون س^{٤} – ٤س^{٣} + ٥ = ٠

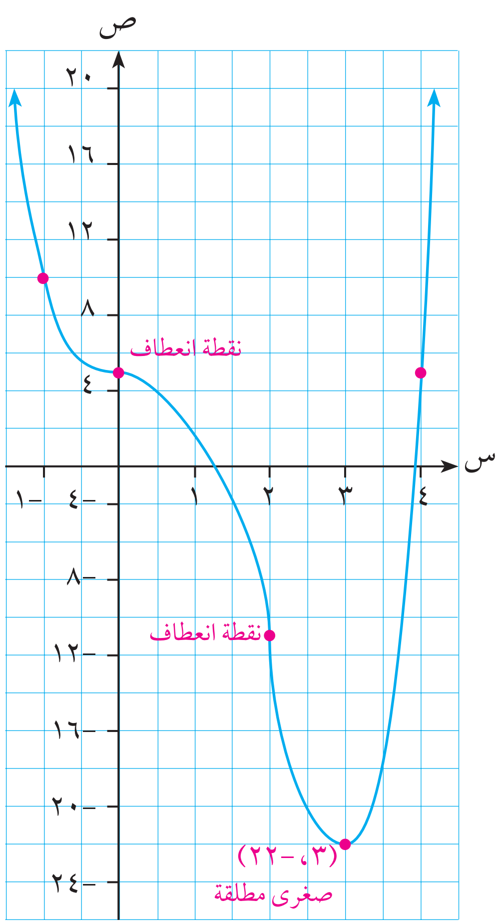
(وليس من السهل حل هذه المعادلة فنتركها)

نقط أخرى : عندما س = ٤ تكون ص = ٥

وعندما س = –١ تكون ص = ١٠

هـ نعين النقاط السابقة على المستوى الديكارتي ونصل بينها بخط ممهد مع مراعاة سلوك الاقتران على الفترات المختلفة .

لاحظ الشكل (٣–٤٦).



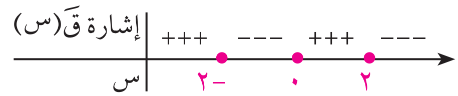
الشكل (٣–٤٦)

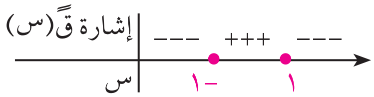
تمارين (٣-٥)

١ ارسم منحنى تقريبياً للاقتران ص = ق(س) المتصل عند س = ٠ ، وبحيث :
قَ(س) < ٠ عندما س < ٠ ، قَ(س) > ٠ عندما س > ٠

٢ ارسم منحنى تقريبياً للاقتران ص = ق(س) المتصل عند س = ٠ ، وبحيث :
قً(س) < ٠ عندما س < ٠ ، قً(س) > ٠ عندما س > ٠

٣ ارسم الشكل العام لمنحنى الاقتران ص = ق(س)، الذي يمر بالنقط :
(-٢، ٢) ، (-١، ١) ، (٠، ٠) ، (١، ١) ، (٢، ٢)
وإشارة المشتقة الأولى قَ(س) والثانية قً(س) للاقتران كما يلي :





٤ ارسم منحنى كلٍ من الاقترانين الآتيين :
أ ق(س) = $س^{٣}$ + ٣$س^{٢}$
ب ق(س) = $س^{٤}$ - ٣٢س + ٤٨

٥ ق(س) اقتران معرف على الفترة [-٣، ٣] ويحقق ما يلي :

س	-٣ < س < -٢	-٢	-٢ < س < ١	١	١ < س < ٣
قَ(س)	سالبة	صفر	موجبة	صفر	سالبة

س	-٣ < س < $-\frac{١}{٢}$	$-\frac{١}{٢}$	$-\frac{١}{٢}$ < س < ٣
قً(س)	موجبة	صفر	سالبة

اعتمد على هذه المعلومات للإجابة عن الأسئلة الآتية :
أ ما قيمة س التي يكون للاقتران ق(س) عندها قيمة صغرى؟
ب ما مجالات التناقص للاقتران ق(س)؟
جـ ما قيمة س التي يكون للاقتران عندها نقطة انعطاف؟
د إذا كان ق(-٣) = ١ فارسم شكلاً تقريباً لمنحنى الاقتران مبيناً عليه نقط القيم العظمى والصغرى والانعطاف.

٣-٦ تطبيقات عملية على القيم القصوى

من المسائل الأساسية في الهندسة والصناعة والتجارة وغيرها من المجالات العلمية والعملية، مسألة تصغير الجهد والتكلفة والمواد في مدخلات العمليات، وتعظيم الربح والانتاج في مخرجات تلك العمليات.

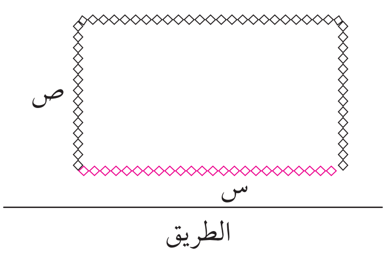
ومن الممكن الاستفادة من أفكار التفاضل وإجراءاته في حساب القيم القصوى للاقتران الذي نحن بصدده في مثل هذه التطبيقات كما يتضح من الأمثلة التالية:

مثال (١)

يريد مزارع عمل حديقة مستطيلة الشكل يحيطها بسياج. إذا كانت المساحة المطلوبة للحديقة ٨٠٠ م^{٢}، وكانت تكلفة السياج من جهة الطريق ٦ دنانير لكل متر (انظر الشكل (٣-٥٣)). ومن الجهات الأخرى دينارين لكل متر، فجد بعدي الحديقة اللذين يجعلان التكاليف أقل ما يمكن، وكم تبلغ قيمة هذه التكاليف؟

الحل:

نفرض بعدي الحديقة س، ص كما في الشكل (٣-٤٧)



الشكل (٣-٤٧)

ونفرض أن التكاليف الكلية ت

المساحة س ص = ٨٠٠ م^{٢}

$$\text{ت} = ٦\text{س} + ٢\text{س} + ٢\text{ص} + ٢\text{ص}$$

$$= ٨\text{س} + ٤\text{ص}$$

$$\text{لكن ص} = \frac{٨٠٠}{\text{س}}$$

$$\therefore \quad \text{ت} = ٨\text{س} + ٤ \times \frac{٨٠٠}{\text{س}}$$

$$= ٨\text{س} + \frac{٣٢٠٠}{\text{س}}$$

لإيجاد القيمة الصغرى للتكاليف نعين النقاط الحرجة:

$$\text{تَ(س)} = ٨ - \frac{٣٢٠٠}{\text{س}^{٢}}$$

$$\text{تَ(س)} = ٠ \quad \Leftarrow \quad ٨ - \frac{٣٢٠٠}{\text{س}^{٢}} = ٠$$

$$٨\text{س}^{٢} = ٣٢٠٠$$

$$\text{س}^{٢} = ٤٠٠$$

∴ $س = \mp ٢٠$. نهمل $س = -٢٠$ (لماذا؟)

$$تً(س) = \frac{٦٤٠٠}{س^{٣}}$$

$$تً(٢٠) = \frac{٦٤٠٠}{٢٠^{٣}} > ٠$$

∴ عند $س = ٢٠$ تكون التكاليف أصغر ما يمكن .

$$وتكون\ ص = \frac{٨٠٠}{س} = \frac{٨٠٠}{٢٠} = ٤٠م$$

أي أن التكاليف تأخذ قيمة صغرى عند $س = ٢٠$م ، $ص = ٤٠$م

وتبلغ التكاليف عندئذ $٨(٢٠) + ٤(٤٠) = ٣٢٠$ ديناراً .

يمكننا تلخيص الخطوات التي اتبعناها في المثال السابق للاستفادة منها في حل المسائل المتعلقة بالتطبيقات العملية كما يلي :

- ندرس المسألة ، ونعين المعطيات والمطلوب فيها ، ونكتب متغيراتها برموز مناسبة .
- نرسم شكلاً توضيحياً للمسألة (إذا كان ذلك مناسباً) .
- نعبر عن المتغير الذي يراد تعيين قيمته القصوى في صيغة اقتران بمتغير واحد .
- نعين النقط الحرجة للاقتران ونختبر أياً منها يحقق القيمة القصوى المطلوبة .

مثال (٢)

جد أقرب نقطة واقعة على المنحنى $ص = \sqrt{س - ١}$ إلى النقطة أ(٢ ، ٠) .

الحل:

نفرض أن النقطة هـ(س ، ص) نقطة ما على المنحنى كما في الشكل (٣-٤٨) .

المسافة أ هـ = ف = $\sqrt{(س-٢)^{٢} + ص^{٢}}$

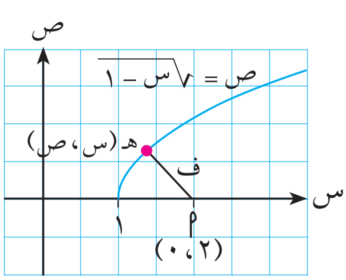
لكن $ص = \sqrt{س - ١}$

∴ $ص^{٢} = س - ١$

وبالتعويض عن ص بدلالة س ينتج أن :

$$ف = \sqrt{(س-٢)^{٢} + س - ١}$$

$$ف = \sqrt{س^{٢} - ٣س + ٣}$$



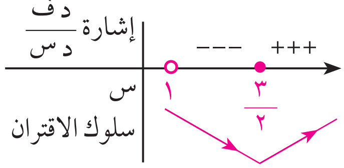
الشكل (٣-٤٨)

$$\frac{\text{د ف}}{\text{د س}} = \frac{\text{٢س} - \text{٣}}{\text{٢}\sqrt{\text{س}^{\text{٢}} - \text{٣ س} + \text{٣}}}$$

النقاط الحرجة : $\frac{\text{د ف}}{\text{د س}} = \text{٠} \Leftarrow \text{٢س} - \text{٣} = \text{٠}$ ومنها $\text{س} = \frac{\text{٣}}{\text{٢}}$

$\frac{\text{د ف}}{\text{د س}}$ غير موجودة عند س = ١ (نقطة طرفية)

إشارة المشتقة $\frac{\text{د ف}}{\text{د س}}$ كما هو مبين في الشكل (٣-٤٩)



الشكل (٣-٤٩)

∴ عند $\text{س} = \frac{\text{٣}}{\text{٢}}$ توجد قيمة صغرى محلية (وهي مطلقة).

∴ أقرب نقطة على المنحنى للنقطة (٢ ، ٠) هي النقطة $\left(\frac{\text{٣}}{\text{٢}} \text{ ، ق}\left(\frac{\text{٣}}{\text{٢}}\right)\right) = \left(\frac{\text{٣}}{\text{٢}} \text{ ، } \frac{\text{١}}{\sqrt{\text{٢}}}\right)$

مثال (٣)

لاحظت شركة طيران أنه حين يكون سعر التذكرة ٢٠٠ دينار فإنها تبيع ٣٠٠ تذكرة يومياً، وأنه لكل تخفيض مقداره دينار واحد في سعر التذكرة يزداد عدد التذاكر المبيعة ٣ تذاكر يومياً. جد سعر التذكرة الذي يجعل دخل الشركة أكبر ما يمكن، وما مقدار ذلك الدخل؟

الحل:

نفرض أن مقدار التخفيض في سعر التذكرة س دينار

فيصبح سعر التذكرة (٢٠٠ − س) ديناراً

ويكون عدد التذاكر المبيعة (٣٠٠ + ٣س)

الدخل ص = (٢٠٠ − س) (٣٠٠ + ٣س)

$\text{ص}' = (\text{٢٠٠} - \text{س}) \times \text{٣} + (\text{٣٠٠} + \text{٣س}) \times -\text{١} = \text{٣٠٠} - \text{٦س}$

$\text{ص}' = \text{٠}$ عندما $\text{س} = \text{٥٠}$

$\text{ص}'' = -\text{٦} < \text{٠}$

∴ عندما س = ٥٠ يوجد قيمة عظمى وهي مطلقة

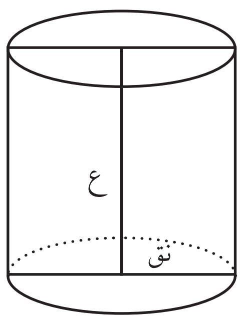
أي أن سعر التذكرة = ٢٠٠ − ٥٠ = ١٥٠ ديناراً هو الذي يحقق أكبر دخل للشركة وتبلغ قيمة هذا الدخل ١٥٠ x ٤٥٠ = ٦٧٥٠٠ دينار.

مثال (٤)

يراد صنع وعاء معدني في هيئة اسطوانة دائرية قائمة مفتوحة من أعلى وسعتها ٨١ π د سم^{٣} . فإذا كانت تكلفة المواد المستعملة ٣ دنانير لكل د سم^{٢} من قاعدة الاسطوانة ، وديناراً واحداً لكل دسم^{٢} من سطحها الجانبي فجد أبعاد الاسطوانة التي تجعل التكاليف أقل ما يمكن .

الحل:

نفرض أن نصف قطر قاعدة الاسطوانة نق وارتفاعها ع كما في الشكل (٣-٥٠) .



الشكل (٣-٥٠)

التكاليف الكلية ت = ٣(π نق^{٢}) +(٢ π نق ع) × ١

= ٣ π نق^{٢}+٢π نق ع

لكن سعة الاسطوانة = π نق^{٢}ع = ٨١ π

$$\therefore \quad \text{ع} = \frac{٨١}{\text{نق}^{٢}}$$

بالتعويض عن ع تكون ت = π (٣نق^{٢} + ٢نق × $\frac{٨١}{\text{نق}^{٢}}$)

$$= \pi\,(\text{٣نق}^{٢} + \frac{١٦٢}{\text{نق}})$$

$$\frac{\text{د ت}}{\text{د نق}} = \pi\,(\text{٦نق} - \frac{١٦٢}{\text{نق}^{٢}})$$

$$\frac{\text{د ت}}{\text{د نق}} = ٠ \Leftarrow \text{٦نق} - \frac{١٦٢}{\text{نق}^{٢}} = ٠$$

$\therefore$ نق = ٣ دسم

$$\frac{\text{د}^{٢}\text{ت}}{\text{د نق}^{٢}} = ٦ + \frac{١٦٢ \times ٢}{\text{نق}^{٣}}$$

$$\left.\frac{\text{د}^{٢}\text{ت}}{\text{د نق}^{٢}}\right|_{\text{نق} = ٣} = ٦ + \frac{١٦٢ \times ٢}{٢٧} > ٠$$

$\therefore$ تكون التكاليف قيمة صغرى عند نق = ٣ د سم

بالتعويض نجد ع = ٩دسم

تمارين (٣-٦)

١ ثني سلك طوله ١٢ سم ليكون مثلثاً متساوي الساقين . أوجد أطوال أضلاع المثلث إذا كانت مساحته أكبر ما يمكن .

٢ جد مساحة أكبر مستطيل يمكن رسمه داخل دائرة طول نصف قطرها ٢٠سم .

٣ يراد صنع صندوق في هيئة متوازي مستطيلات مفتوح من أعلى ، وذلك بقطع أربعة مربعات صغيرة متطابقة من زوايا صفيحة معدنية مربعة الشكل طول ضلعها ١٢دسم، ثم ثني الحواف إلى أعلى . ما طول ضلع كل من هذه المربعات إذا كانت سعة الصندوق أكبر ما يمكن؟

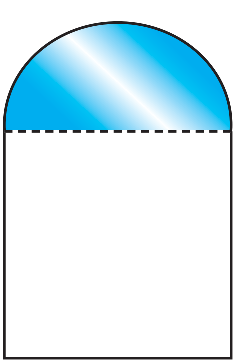
٤ تتحرك نقطة مادية على خط مستقيم بحيث يكون بعدها (ف) بالامتار عن نقطة ثابتة (و) على هذا الخط معطى بالعلاقة : ف = ٢ن^{٣} – ٩ن^{٢} + ١٢ن ، ن الزمن بالثواني . جد الزمن الذي تكون فيه السرعة أصغر ما يمكن .

٥ برهن باستخدام التفاضل أن العمود النازل من النقطة (٢ ، ٣) على محور السينات هو أقصر القطع المستقيمة التي تصل بين النقطة (٢ ، ٣) ومحور السينات .

٦ أوجد أقصر مسافة بين النقطة (٠ ، ٦) والمنحنى س^{٢} – ص^{٢} = ١٦ .

٧ إذا باع مصنع للدراجات ١٠٠ دراجة كان مكسبه في الدراجة الواحدة ٢٠ ديناراً، وإذا زاد عدد الدراجات المبيعة عن ١٠٠ فإن المكسب في الدراجة الواحدة من الدراجات المبيعة يقل بمقدار ١ ,٠ دينار عن كل دراجة زيادة . كم عدد الدراجات التي تعطي للمصنع أكبر ربح؟

٨ جد معادلة المستقيم الذي يمر بالنقطة (٣ ، ٤) ويصنع مع المحورين الإحداثيين في الربع الأول مثلثاً مساحته أصغر مايمكن .

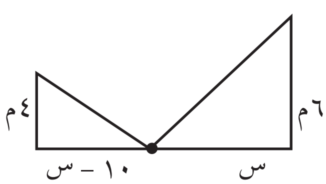


٩ نافذة في هيئة مستطيل يعلوه نصف دائرة . فإذا كان زجاج نصف الدائرة يسمح بدخول نصف ما يسمح به زجاج المستطيل من الضوء لكل وحدة مربعة ، وإذا علمت أن المحيط الكلي للنافذة يساوي ٦م، فجد أبعاد النافذة التي تسمح بمرور أكبر قدر من الضوء .

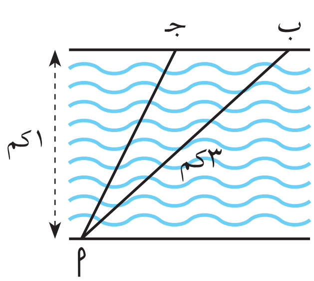
١٠ تقف سفينتان أ ، ب في عُرض البحر بحيث تقع أ جنوب ب على بعد ٢٠ كم منها . انطلقت السفينتان بحيث سارت الأولى أ بسرعة منتظمة ١٠ كم/ ساعة شرقاً وسارت الثانية بسرعة منتظمة ٥ كم/ س جنوباً . جد الزمن الذي يكون فيه البعد بين السفينتين أصغر ما يمكن ، وكم يكون هذا البعد آنذاك؟

١١ يراد تصميم ملصق مستطيل الشكل بحيث يحتوي على ٥٠٠سم٢ من المادة المطبوعة وبحيث يكون عرض كل من الهامشين العلوي والسفلي ١٠سم، وكل من الهامشين الجانبيين ٥سم . ما بعدا الملصق اللذان يجعلان مساحته أصغر ما يمكن؟

١٢ عمودان طولاهما ٤م، ٦م والبعد بينهما ١٠م . يراد تثبيتهما بسلكين متصلين بوتد في مستوى الأرض كما في الشكل . أين يقع هذا الوتد بحيث يكون مجموع طولي السلكين أصغر ما يمكن؟



١٣ يصل أنبوب نفط نقطتين أ ، ب البعد بينهما ٣كم وعلى جانبين مختلفين من نهر عرضه ١كم ، فإذا كان جزء من الأنبوب تحت الماء بين أ و جـ (انظر الشكل)، والجزء الآخر مكشوفاً على الشاطئ، من جـ إلى ب، وكانت تكلفة الكيلومتر من الأنبوب تحت الماء ثلاثة أضعاف تكلفة الكيلومتر في الجزء الواقع على الشاطئ فجد موقع جـ الذي يجعل التكاليف أقل ما يمكن .



١٤ جد أبعاد المستطيل ذي المساحة الكبرى والواقع في الربع الأول بحيث تنطبق قاعدته على محور السينات ويقع رأساه الآخران على منحنى الاقتران ق(س) = –٥ + ٦س – س٢ .

٣-٧ المعدلات الزمنية المرتبطة (Related Rates)

إذا كان ص اقتراناً في الزمن (ن) فإن المشتقة $\frac{دص}{دن}$ تسمى المعدل الزمني للمتغير ص، وقد تعرفنا في دروس سابقة بعض المعدلات الزمنية مثل السرعة والتسارع، فالسرعة = $\frac{دف}{دن}$ ، والتسارع = $\frac{دع}{دن}$ ؛ ولا تقتصر المعدلات الزمنية على السرعة والتسارع، بل تشتمل على تطبيقات أخرى كثيرة، مثل: تمدد الأجسام بالحرارة، وتدفق الموائع إلى الأوعية ومنها، وتدفق الكهرباء في الأسلاك، وغير ذلك.

وإذا كان متغيران (أو أكثر) من المتغيرات المعتمدة على الزمن، مرتبطين بمعادلة، فإن من الممكن تطبيق الاشتقاق الضمني على طرفي هذه المعادلة بالنسبة للزمن، ومن ثم الربط بين المعدلين الزمنيين لهذين المتغيرين كما يتضح في الأمثلة التالية:

مثال (١)

إذا كان المتغيران س، ص اقترانين في الزمن ن، بحيث يرتبطان بالمعادلة:

$س^٢+٥ص^٢=٢١$ ، وكان $\frac{دس}{دن}=٢$ عند س = ١ ، ص = ٢ ؛ فجد $\frac{دص}{دن}$

الحل:

نشتق طرفي المعادلة بالنسبة إلى ن:

$$٢س \frac{دس}{دن} + ١٠ص \frac{دص}{دن} = ٠$$

نعوض بالقيم المعطاة فيكون:

$$٢ \times ١ \times ٢ + ١٠ \times ٢ \frac{دص}{دن} = ٠ \Leftarrow \frac{دص}{دن} = -٠,٢$$

وفي المسائل العملية، كثيراً ما يستلزم الأمر تكوين المعادلة التي تربط بين المتغيرين اللذين تدرس المسألة معدليهما الزمنيين المرتبطين؛ ومن الممكن اتباع الخطوات الآتية في حل مثل هذه المسائل:

- نرسم شكلاً تخطيطياً (إن كان ذلك مناسباً) مع وضع القيم والتسميات المناسبة عليه.
- نكتب جميع متغيرات المسألة بالصورة الرمزية.
- نكتب المعادلة العامة التي تربط متغيرات المسألة.
- نشتق طرفي المعادلة بالنسبة للزمن، من أجل الحصول على علاقة عامة تربط بين المعدلات الزمنية.
- نعوض بالقيم المعطاة في المسألة، ونجد المعدل الزمني المطلوب.

مثال (٢)

يتناقص طول مستطيل بمعدل ٢ سم/ ث ، ويتزايد عرضه بمعدل ٢ سم/ ث . جد :

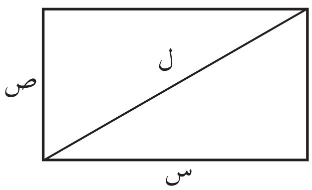
أ المعدل الزمني لتغير مساحة المستطيل .

ب المعدل الزمني لتغير طول قطر المستطيل .

وذلك عندما يكون طول المستطيل ١٢ سم وعرضه ٥ سم .

الحل:

نفرض أن طول المستطيل س سم ، وعرضه ص سم ، كما في الشكل (٣-٥١) .



الشكل (٣-٥١)

$\frac{\text{د س}}{\text{د ن}} = \text{−٢سم/ ث ،} \quad \frac{\text{د ص}}{\text{د ن}} = \text{٢ سم / ث}$

المطلوب : ايجاد كل من : أ $\frac{\text{د م}}{\text{د ن}}$ ، ب $\frac{\text{د ل}}{\text{د ن}}$

حيث م مساحة المستطيل ، ل طول أحد قطريه .

أ $\text{م} = \text{س ص}$

$\frac{\text{د م}}{\text{د ن}} = \text{س} \, \frac{\text{د ص}}{\text{د ن}} + \text{ص} \, \frac{\text{د س}}{\text{د ن}}$

وعندما س = ٢ سم ، ص = ٥ سم ، يكون :

$\frac{\text{د م}}{\text{د ن}} = \text{١٢ × ٢ + ٥ × −٢ = ١٤ سم}^{\text{٢}}\text{/ ث}$

أي أن المساحة تتزايد عندئذ بمعدل ١٤ سم$^{\text{٢}}$/ ث

ب باستخدام نظرية فيثاغورس يكون : ل$^{\text{٢}}$ = س$^{\text{٢}}$ + ص$^{\text{٢}}$

$\text{٢ل} \, \frac{\text{د ل}}{\text{د ن}} = \text{٢س} \, \frac{\text{د س}}{\text{د ن}} + \text{٢ص} \, \frac{\text{د ص}}{\text{د ن}}$

بالقسمة على ٢ للطرفين :

$\text{ل} \, \frac{\text{د ل}}{\text{د ن}} = \text{س} \, \frac{\text{د س}}{\text{د ن}} + \text{ص} \, \frac{\text{د ص}}{\text{د ن}}$

عند س = ١٢ ، ص = ٥ يكون ل$^{\text{٢}}$ = (١٢)$^{\text{٢}}$+(٥)$^{\text{٢}}$ $\Leftarrow$ ل = ١٣ سم

بالتعويض في المعادلة السابقة :

$\text{١٣ ×} \frac{\text{د ل}}{\text{د ن}} = \text{١٢ × −٢ + ٥ × ٢}$

$\text{١٣ ×} \frac{\text{د ل}}{\text{د ن}} = \text{−١٤}$

$\frac{\text{د ل}}{\text{د ن}} = -\frac{\text{١٤}}{\text{١٣}} \text{ سم/ ث}$

أي أن طول القطر يتناقص عندئذ بمعدل $\frac{\text{١٤}}{\text{١٣}}$ سم/ ث

مثال (٣)

بالون كروي يضخ فيه الغاز بمعدل ٢٥ لتراً/ الدقيقة. جد معدل تزايد مساحة سطح البالون عندما يكون طول نصف قطره ٥٠سم.

الحل:

نفرض أن حجم البالون ح، ومساحة سطحه م، وطول نصف قطره نق،

$\frac{\text{د ح}}{\text{د ن}} = \text{٢٥}$ لتراً/ دقيقة، المطلوب $\frac{\text{د م}}{\text{د ن}}$ عندما نق = ٥٠سم.

$$\text{ح} = \frac{\text{٤}}{\text{٣}}\,\pi\,\text{نق}^{\text{٣}}$$

$$\frac{\text{د ح}}{\text{د ن}} = \frac{\text{٤}}{\text{٣}} \times \pi \times \text{٣نق}^{\text{٢}} \times \frac{\text{د نق}}{\text{د ن}}$$

$$\text{٢٥٠٠٠} = \text{٤}\pi \times \text{٥٠} \times \text{٥٠} \times \frac{\text{د نق}}{\text{د ن}}$$

$$\frac{\text{د نق}}{\text{د ن}} = \frac{\text{٥}}{\text{٢}\,\pi}\ \text{سم / دقيقة}$$

$$\text{م} = \text{٤}\,\pi\,\text{نق}^{\text{٢}}$$

$$\frac{\text{د م}}{\text{د ن}} = \text{٤}\,\pi \times \text{٢ نق} \times \frac{\text{د نق}}{\text{د ن}}$$

$$= \text{٤}\,\pi \times \text{٢} \times \text{٥٠} \times \frac{\text{٥}}{\text{٢}\,\pi} = \text{١٠٠٠سم}^{\text{٢}}\text{/ دقيقة}$$

مثال (٤)

في الساعة الثانية عشرة ظهراً، كانت السفينة (أ) تقع على بعد ٨٠ كم إلى الجنوب تماماً من السفينة (ب). فإذا تحركت السفينة (أ) عندئذ بسرعة ٤٠ كم/ ساعة في اتجاه الغرب، وتحركت السفينة (ب) بعد تحرك (أ) بساعة واحدة، بسرعة ٢٠ كم/ ساعة في اتجاه الجنوب، فجد معدل تغير المسافة بين السفينتين عند الساعة الثانية بعد الظهر.

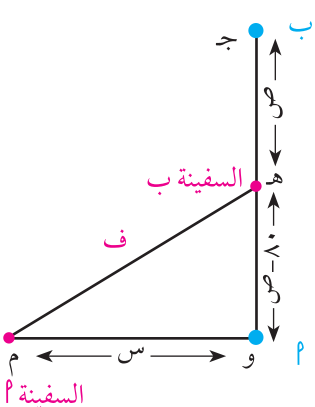
الحل:

نفرض أن السفينتين أ، ب كانتا في تمام الساعة الثانية عشرة ظهراً، عند النقطتين و، جـ على الترتيب، وأنهما بعد ن ساعة كانتا عند النقطتين م، هـ على الترتيب.

لاحظ الشكل (٣-٥٢).

سرعة أ أي $\frac{\text{د س}}{\text{د ن}} = \text{٤٠}$ كم/ ساعة.

سرعة ب أي $\frac{\text{د ص}}{\text{د ن}} = \text{٢٠}$ كم/ ساعة.



الشكل (٣-٥٢)

ف تمثل المسافة بين السفينتين عند أية لحظة

المطلوب:

$\frac{د ف}{د ن}$ عند ن = ٢

باستخدام نظرية فيثاغورس:

$ف^٢ = س^٢ + (٨٠ - ص)^٢$

$٢ف \frac{د ف}{د ن} = ٢س \frac{د س}{د ن} + ٢(٨٠ - ص) \times - \frac{د ص}{د ن}$

$ف \frac{د ف}{د ن} = س \frac{د س}{د ن} + (٨٠ - ص) \times - \frac{د ص}{د ن}$ .... (١)

عند ن = ٢، تكون س = ٢ × ٤٠ = ٨٠ كم ، ص = ١ × ٢٠ = ٢٠ كم.

$ف^٢ = (٨٠)^٢ + (٨٠ - ٢٠)^٢$

ف = ١٠٠كم

بالتعويض في المعادلة (١):

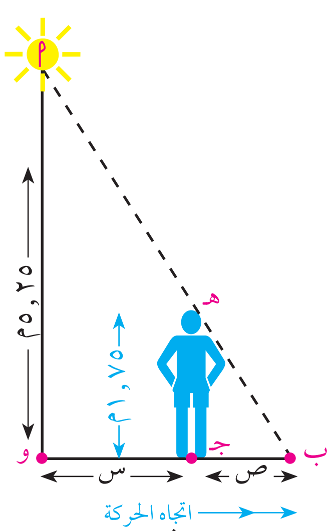
$١٠٠ \times \frac{د ف}{د ن} = ٨٠ \times ٤٠ + (٦٠) \times -٢٠$

$\frac{د ف}{د ن} = \frac{٢٠٠٠}{١٠٠} = ٢٠$ كم/ ساعة معدل تغير المسافة بين السفينتين عند الساعة الثانية بعد الظهر.

مثال (٥)

مصباح صغير في قمة عمود ارتفاعه ٥,٢٥م. تحرك شخص طوله ١,٧٥م مبتعداً عن المصباح بمعدل ١٢سم/ث. جد معدل زيادة طول ظله، وكذلك المعدل الذي يتحرك به رأس ظله عندما يكون هذا الشخص على بعد ٤ أمتار من العمود.

الحل:



الشكل (٣-٥٣)

نفرض أن بعد الشخص عن العمود عند أية لحظة ن = س متراً،

وأن طول ظله عندئذ = ص متراً. لاحظ الشكل (٣-٥٣).

$\frac{د س}{د ن} = ١٢$ سم/ ث

أ من تشابه المثلثين ب جـ هـ ، ب و م:

$\frac{ص}{١,٧٥} = \frac{س + ص}{٥,٢٥}$

٣ص = س + ص

٢ص = س

$٢ \frac{د ص}{د ن} = \frac{د س}{د ن}$

$\frac{د ص}{د ن} = \frac{1}{2} \times \frac{د س}{د ن} = \frac{1}{2} \times 12 = 6$ سم/ ث

أي أن طول ظل الشخص يتزايد بمعدل ٦ سم/ ث

ب معدل تحرك رأس الظل = $\frac{د ف}{د ن}$

ف = س + ص

$\frac{د ف}{د ن} = \frac{د س}{د ن} + \frac{د ص}{د ن}$

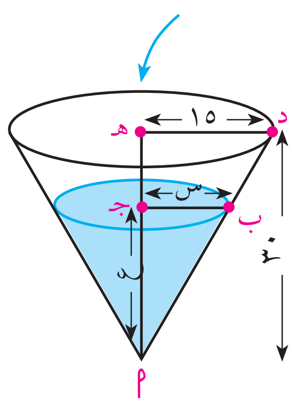
$12 + 6 = 18$ سم/ ث

مثال (٦)

يصب الماء في مخروط دائري قائم بمعدل ٢٤٣ د سم^3/ دقيقة ؛ فإذا كان رأس المخروط إلى أسفل، وارتفاعه ٣٠ دسم ، ونصف قطر قاعدته ١٥ د سم، فما سرعة ارتفاع الماء عندما يكون ارتفاع الماء فيه ١٨ دسم؟

الحل:

نفرض أن ارتفاع الماء عند أية لحظة ع، ونصف قطر السطح العلوي للماء س، وحجم الماء ح . لاحظ الشكل (٣-٥٤).



الشكل (٣-٥٤)

$\frac{د ح}{د ن} = 243$ د سم^3/ دقيقة

والمطلوب: $\frac{د ع}{د ن}$ عند ع = ١٨ د سم

$ح = \frac{1}{3} \pi س^2 ع$ .... (١)

للتخلص من المتغير س، نشابه المثلثين م ب جـ، م د هـ:

$\frac{ع}{30} = \frac{س}{15} \quad \Leftarrow \quad س = \frac{1}{2} ع$

بالتعويض عن س في (١)

$ح = \frac{1}{3} \pi \times \frac{1}{4} ع^2 \times ع$

$ح = \frac{\pi}{12} ع^3$ .... (٢)

نشتق طرفي المعادلة (٢) بالنسبة إلى ن:

$\frac{د ح}{د ن} = \frac{\pi}{12} \times 3 ع^2 \times \frac{د ع}{د ن} = \frac{\pi}{4} ع^2 \frac{د ع}{د ن}$

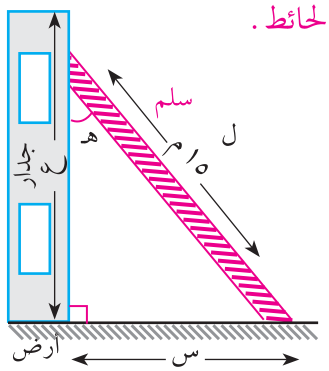
$243 = \frac{\pi}{4} \times 18 \times 18 \times \frac{د ع}{د ن}$ ومنها $\frac{د ع}{د ن} = \frac{\pi}{3}$ د سم/ دقيقة

مثال (٧)

سلم طوله ١٥ م يرتكز على جدار رأسي وأرض أفقية . فإذا انزلق السلم مبتعداً عن الحائط بمعدل ١ متر / دقيقة فجد :

أ معدل هبوط قمة السلم عندما يكون السلم على بعد ٩م من الحائط .

ب معدل تزايد الزاوية هـ عندئذ . انظر الشكل (٣-٥٥) .



الشكل (٣-٥٥)

الحل:

نفرض أن بعد قاعدة السلم عن الجدار عند أية لحظة = س ،

وأن ارتفاع قمة السلم عن الأرض = ع .

$$\frac{\text{د س}}{\text{د ن}} = \text{١ متر / دقيقة}$$

أ المطلوب إيجاد : $\frac{\text{د ع}}{\text{د ن}}$ عند س = ٩م

باستخدام نظرية فيثاغورس :

$$\text{س}^{٢} + \text{ع}^{٢} = ٢٢٥ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (١)$$

$$٢\text{س} \frac{\text{د س}}{\text{د ن}} + ٢\text{ع} \frac{\text{د ع}}{\text{د ن}} = ٠$$

$$\text{س} \frac{\text{د س}}{\text{د ن}} + \text{ع} \frac{\text{د ع}}{\text{د ن}} = ٠ = ٠ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (٢)$$

عند س= ٩م ، نجد ع بالتعويض في المعادلة (١)

$$٨١ + \text{ع}^{٢} = ٢٢٥ \quad \text{ومنها} \quad \text{ع} = ١٢ \text{ م}$$

بالتعويض عن س، $\frac{\text{د س}}{\text{د ن}}$ ، ع في المعادلة (٢)

$$٩ \times ١ + ١٢ \times \frac{\text{د ع}}{\text{د ن}} = ٠$$

$\frac{\text{د ع}}{\text{د ن}} = -\frac{٣}{٤}$ م/ دقيقة ، أي أن قمة السلم تهبط بمعدل $\frac{٣}{٤}$ م/ دقيقة في تلك اللحظة .

ب معدل تغير الزاوية هـ: جا هـ = $\frac{\text{س}}{١٥}$

$$\text{جتا هـ} \times \frac{\text{د هـ}}{\text{دن}} = \frac{١}{١٥} \times \frac{\text{د س}}{\text{دن}}$$

في اللحظة المعطاة جتا هـ = $\frac{\text{ع}}{١٥} = \frac{١٢}{١٥} = \frac{٤}{٥}$

$$\therefore \quad \frac{٤}{٥} \times \frac{\text{د هـ}}{\text{دن}} = \frac{١}{١٥} \times ١$$

$\frac{\text{د هـ}}{\text{دن}} = \frac{١}{١٢}$ زاوية نصف قطرية/ دقيقة .

أي أن الزاوية هـ تتزايد بمعدل $\frac{١}{١٢}$ زاوية نصف قطرية/ دقيقة عند تلك اللحظة .

تمارين (٣-٧)

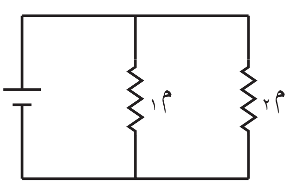
١ بفرض أن جميع المتغيرات فيما يأتي هي اقترانات في الزمن (ن)، أجب عما يلي :

أ إذا كان $\text{س}^{٣} - ٣\text{ص}^{٢}\text{س} = -٢$ ، $\frac{\text{د س}}{\text{د ن}} = ٥$ عند س = ١ ، ص = ١ ، فجد $\frac{\text{د ص}}{\text{د ن}}$.

ب إذا كان طا هـ = $\frac{\text{س}}{٢٠٠}$ ، $\frac{\text{د هـ}}{\text{د ن}} = ٦\pi$ عند س = −٢٠٠ ، فجد $\frac{\text{د س}}{\text{د ن}}$.

٢ أطلق صاروخ رأسياً إلى أعلى بسرعة ٢كم/ ث ، كم يبلغ المعدل الزمني لتغير المسافة بينه وبين محطة المراقبة الواقعة على بعد ٣ كيلو مترات من منصة إطلاق الصاروخ عندما يبلغ ارتفاعه ٤ كيلو مترات عن سطح الأرض؟

٣ عند وصل مقاومتين $\text{م}_{١}$ ، $\text{م}_{٢}$ على التوازي (انظر الشكل) تعطى المقاومة الكلية م بالمعادلة $\frac{١}{\text{م}} = \frac{١}{\text{م}_{١}} + \frac{١}{\text{م}_{٢}}$. إذا كانت $\text{م}_{١}$ ، $\text{م}_{٢}$ تزدادان بالمعدلين ٠,٠٢ أوم/ ث و ٠,٠٣ أوم/ ث على الترتيب، فما معدل تغير م عندما تكون $\text{م}_{١}$=٢٠ أوماً، $\text{م}_{٢}$=٥٠ أوماً؟



٤ تتحرك سفينتان مبتعدتين عن نقطة م في طريقين يصنعان زاوية قياسها ١٢٠°، فإذا كانت سرعة الأولى ١٤ ميلاً / الساعة، وسرعة الثانية ٢١ ميلاً / الساعة، فما معدل تغير المسافة بين السفينتين عندما يكون بعداهما عن م يساويان ٥ أميال، ٣ أميال على التوالي؟

٥ يحرك طفل طائرة ورقية بحيث كان طرف الخيط الذي يمسكه على ارتفاع ١٥٠سم، وكان معدل تزايد طول الخيط ٦٠سم/ ث والطائرة الورقية تتحرك أفقياً على ارتفاع ٣١,٥ م. إذا بقي الخيط مشدوداً في أثناء حركة الطائرة، فجد سرعة الطائرة عندما يكون طول الخيط ٥٠ متراً.

٦ يزداد نصف القطر والزاوية المركزية لقطاع دائري بمعدل ٢سم/ ث ، $\frac{١}{٢}^{\text{د}}$/ ث على الترتيب، فإذا كان معدل زيادة مساحة القطاع في لحظة معينة هو ١٢سم^{٢}/ ث، وكانت زاويته المركزية عندئذ تساوي $١^{\text{د}}$ ، فجد مساحة القطاع عندئذ.

٧ طائرة عمودية لمراقبة السيارات، تقف ثابتة رأسياً على ارتفاع $\frac{١}{٤}$ كيلومتر من نقطة معينة في الشارع، فإذا لاحظ رادار الطائرة سيارة على بعد نصف كيلو متر من الطائرة، متباعدة عنها بمعدل ٥٧كم/ ساعة، فهل تجاوزت السيارة السرعة المحددة لها وهي ٦٠كم / ساعة؟

٨ تطير طائرة على ارتفاع ٣٠٠٠م بسرعة ثابتة في خط مستقيم يمر بالنقطة الواقعة رأسياً فوق شخص يرصدها من سطح الأرض. وعند لحظة ما وجد الراصد أن زاوية ارتفاع الطائرة ٦٠° وأنها تتزايد بمعدل ٠,٠٢ زاوية نصف قطرية/ ث. كم كانت سرعة الطائرة؟

٩ ينزل مسحوق البن من قمع مخروطي إلى إناء أسطواني بمعدل ١٠٠ سم^{٣}/ دقيقة. فإذا كان نصف قطر قاعدة الاسطوانة = ١٥ سم، ونصف قطر قاعدة المخروط = ١٠ سم، وارتفاعه ٢٠ سم، فجد معدل ارتفاع البن في الإناء عندما يكون ارتفاع البن في القمع ١٠ سم. وما معدل انخفاض البن في القمع آنذاك؟

١٠ أثبت أنه إذا تزايدت مساحة دائرة بمعدل ثابت فإن محيطها يتزايد بمعدل يتناسب عكسياً مع نصف القطر.

١١ يرتفع مصباح عن الأرض ١٢م، فإذا سقط حجر من الارتفاع نفسه وعلى بعد ٣ أمتار من المصباح، فجد سرعة ظل الحجر على الأرض بعد ثانية واحدة من بدء حركته، إذا علمت أن المسافة بالأمتار التي يقطعها الحجر في ن ثانية تعطى بالقاعدة ف = ٤,٩ ن^{٢}.

تمارين عامة

١ اختر الإجابة الصحيحة لكلٍ من الأسئلة الآتية :

١ إذا كان ق(س) = س |س| فإن :

أ قَ(٠) غير موجودة   ب ق(٠) قيمة عظمى محلية

جـ ق(٠) قيمة صغرى محلية   د (٠ ، ق(٠)) نقطة انعطاف

٢ قيمة حـ التي نحصل عليها من تطبيق نظرية القيمة المتوسطة على الاقتران

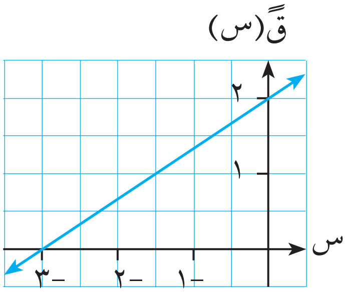
ق(س) = { ٢س ، ٠ ≤ س ≤ ١ ؛ س^{٢} + ١ ، ١ < س ≤ ٢ }   في الفترة [٠ ، ٢] هي :

أ $\frac{٤}{٥}$ ب $\frac{٢}{٣}$ جـ $\frac{٣}{٢}$ د $\frac{٥}{٤}$

٣ إذا كان ق(س) اقتراناً معرفاً على الفترة [٠ ، ٣] وقابلاً للاشتقاق على الفترة]٠ ، ٣[

بحيث قَ(س) = $\frac{\text{س} - ٢}{\text{س} + ١}$ فإن عدد النقاط الحرجة للاقتران ق يساوي :

أ ٢   ب ٣   جـ ٤   د ٥

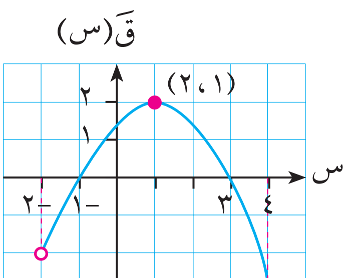


٤ يمثل الشكل المجاور منحنى قً(س) للاقتران ق(س) .

ما إحداثيا نقطة انعطاف منحنى ق(س)؟

أ (٠ ، ٢)   ب (-٣ ، ٠)

جـ (٠ ، ق(٠))   د (-٣ ، ق(-٣))



◆ يمثل الشكل المجاور منحنى قَ(س) على الفترة]-٢ ، ٤[.

إذا علمت أن ق(س) معرف على [-٢ ، ٤]

فاعتمد على ذلك في الإجابة عن الأسئلة ٥ ، ٦ ، ٧ التالية :

٥ مجال تزايد الاقتران ق(س) هو :

أ [-٢ ، ١]   ب [-١ ، ١]

جـ [-١ ، ٣]   د [١ ، ٤]

٦ باستثناء الطرفين يكون للاقتران ق(س) قيمة صغرى محلية عند النقطة :

أ (-١ ، ٠)   ب (٣ ، ٠)   جـ (١ ، ٢)   د (-١ ، ق(-١))

٧ نقطة انعطاف منحنى ق(س) هي :

أ (٣ ، ٠) ب (−١ ، ٠) جـ (١ ، ٢) د (١ ، ق(١))

٨ تتحرك نقطة على منحنى الاقتران ق(س) = س^٣ بحيث إن $\frac{د س}{د ن}$ = ٢سم/ ث ، أوجد المعدل الزمني لتغير ميل المماس للاقتران ق(س) عندما س = ١ .

أ ٣ ب ٦ جـ ١٢ د ٢٤

٩ الاقتران ق(س) متصل على [١ ، ٥]، قَ(س) > ٠ لجميع قيم س ∋]١ ، ٥[.
إحدى العبارات التالية صحيحة دائماً :

أ للاقتران ق(س) قيمة عظمى عند س = ٥ ب ق(س) متناقص على [١ ، ٥]

جـ الاقتران هـ (س) = س ق(س) متناقص على [١ ، ٥]

د لا يوجد للاقتران ق نقطة انعطاف في]١ ، ٥[.

١٠ قيمة جـ التي تحددها نظرية رول على الاقتران ق(س) = جاس + جتاس في الفترة [٠ ، $\frac{\pi}{٢}$] هي :

أ ٠ ب $\frac{\pi}{٦}$ جـ $\frac{\pi}{٤}$ د $\frac{\pi}{٣}$

◆ إذا كان ق(س) = $\frac{٢}{٣}$ س^٣ + $\frac{٣}{٢}$ س^٢ + س − ٥ فاعتمد على ذلك في الإجابة عن السؤالين ١١ ، ١٢ التاليين :

١١ الاقتران ق(س) متناقص في الفترة :

أ [$\frac{١}{٢}$ ، ١] ب [−١ ، −$\frac{١}{٢}$]

جـ [−∞ ، −$\frac{٢}{٤}$] د]−∞ ، −١] وكذلك [−$\frac{١}{٢}$ ، ∞[.

١٢ منحنى الاقتران ق(س) مقعر للأعلى في الفترة :

أ [−١ ، −$\frac{١}{٢}$] ب]−∞ ، −١] وكذلك [−١ ، ∞[

جـ]−∞ ، −$\frac{٣}{٤}$[د [−$\frac{٣}{٤}$ ، ∞[

١٣ إذا كان ق(س) = |س − ٢| − ٥ ، س ∋ [−٢ ، ٢] فإن القيمة العظمى المطلقة للاقتران ق هي :

أ ٢ ب −٢ جـ ١ د −١

١٤ إذا كان ق(س) اقتراناً بحيث قَ(س) متزايد على [−١ ، ٠] ، قَ(س) متناقص على [٠ ، ١]، فإن إحدى العبارات التالية صحيحة دائماً :

أ ق(س) متناقص على الفترة [٠ ، ١] ب ق(س) متزايد على الفترة [٠ ، ١]

جـ عند س = ٠ نقطة حرجة للاقتران ق(س) د (٠ ، ق(٠)) نقطة انعطاف لمنحنى ق(س)

١٥ إذا كان ق(س) اقتراناً بحيث قَ(س) = (س − ٣)^{٢} (س−١)^{٣} (س−٥)^{٤} فما مجموعة جميع قيم س التي يوجد عند كل منها قيمة صغرى محلية للاقتران ق(س)؟

أ {٥}   ب {٣ ، ٥}   جـ {١ ، ٣}   د {١}

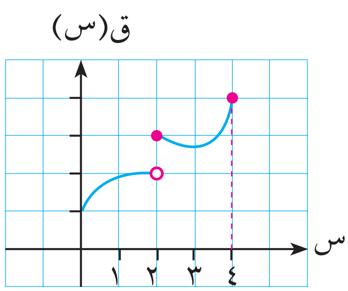
١٦ ق(س) ، هـ(س) اقترانان كثيرا حدود متزايدان على ح . الاقتران (ق ∘ هـ) (س) يكون :

أ متزايداً على ح   ب متناقصاً على ح

جـ له قيمة عظمى محلية عند س = ٠   د له قيمة عظمى مطلقة

١٧ الشكل المجاور يمثل منحنى الاقتران ق(س) المعرف على الفترة [٠ ، ٤]

النقطة (٢ ، ق(٢)) هي :



أ نقطة انعطاف لمنحنى ق(س) .   ب نقطة قيمة عظمى مطلقة .

جـ نقطة قيمة صغرى مطلقة .   د نقطة قيمة عظمى محلية .

١٨ إذا كان ق(س) = س^{٤} − ٣٢س + ٢ ، س ∈ ح فإن :

أ للاقتران ق(س) نقطة انعطاف عند س = ٠

ب للاقتران ق(س) قيمة عظمى محلية عند النقطة (٢ ، ق(٢)) .

جـ للاقتران ق(س) قيمة صغرى محلية عند النقطة (٢ ، ق(٢)) .

د منحنى الاقتران ق(س) مقعر للأسفل دائماً .

١٩ ق(س) اقتران معرف على الفترة [−١ ، ١] ، قً موجودة ، وعند حـ = ٠ نقطة انعطاف لمنحنى ق .

إحدى العبارات التالية صحيحة دائماً :

أ منحنى ق(س) مقعر للأسفل في الفترة [−١ ، ٠]

ب منحنى ق(س) مقعر للأعلى في الفترة [٠ ، ١]

جـ قَ(س) لها نقطة حرجة في الفترة]−١ ، ١[

د قً(س) لها نقطة حرجة في الفترة =]−١ ، ١[

٢٠ إذا كان ق(س) = $\begin{cases} س^{٢} - س & ، \quad ٠ \le س \le ١ \\ س - ١ & ، \quad ١ < س \le ٣ \end{cases}$

فإن مجموعة جميع قيم س التي يكون عند كل منها نقطة حرجة للاقتران ق(س) في الفترة [٠ ، ٣] هي :

أ {٠ ، ١ ، ٣}   ب {٠ ، ٣}   جـ {٠ ، $\frac{١}{٢}$ ، ٣}   د {٠ ، $\frac{١}{٢}$ ، ١ ، ٣}

٢ إذا علمت أن $\text{ق(س)} = \begin{cases} \text{٣س} - \text{س}^{٢} & \text{،} \quad \text{س} \leq ١ \\ \text{٢س}^{٢} + \text{أس} + \text{ب} & \text{،} \quad \text{س} > ١ \end{cases}$ ، فأوجد ما يلي :

أ الثابتين أ ، ب اللذين يجعلان الاقتران ق(س) قابلاً للاشتقاق على ح .

ب الفترة / الفترات التي يكون فيها ق(س) متزايداً .

جـ نقطة / نقط الانعطاف لمنحنى ق(س) .

٣ أثبت أن للاقتران $\text{ق(س)} = \text{س} + \text{جا}^{٢}\frac{\text{س}}{٣} - ٨$ صفراً وحيداً على ح .

٤ ق(س) اقتران كثير حدود من الدرجة الثانية يمر منحناه بنقطة الأصل ويحقق الاقتران شروط نظرية رول على الفترة [٠ ، ٤] . إذا كانت القيمة الصغرى للاقتران في هذه الفترة تساوي −٤ فأوجد قاعدة الاقتران ق(س) .

٥ ق(س) اقتران كثير حدود بحيث $\text{ق}'(٢) = \text{ق}'(٦) = ٠$ وكان $\text{ق}'(\text{س})$ متزايداً على الفترة]−∞ ، −١[وكذلك على الفترة]٤ ، ∞[وكان $\text{ق}'(\text{س})$ متناقصاً على [١ ، ٤] أوجد :

أ نقط القيم القصوى المحلية للاقتران ق(س) .

ب مجالات التزايد والتناقص للاقتران ق(س) .

٦ أ ب جـ مثلث قائم الزاوية في جـ ومتساوي الساقين وطول أ ب = ٦سم ، ما مساحة أكبر مستطيل يمكن رسمه داخل المثلث بحيث ينطبق أحد أضلاعه على الوتر أ ب ، ويقع الرأسان الآخران على ضلعي القائمة؟

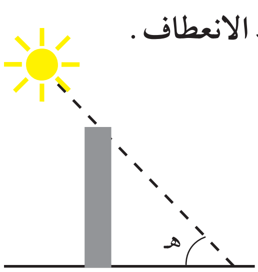
٧ ابحث في توفر شروط نظرية رول للاقتران $\text{ق(س)} = \frac{\sqrt{١ - \text{س}^{٢}}}{\text{س}^{٢} + ٣}$ على الفترة [−١ ، ١] ثم عين قيمة/ قيم جـ التي تحددها النظرية (إن وجدت) .

٨ أوجد القيم القصوى للاقترانات التالية على مجالاتها :

أ $\text{ق(س)} = \text{س} - \text{جا س}$ على الفترة [٠ ، ٢π] ب $\text{ق(س)} = |\text{س}^{٢} + \text{٥س} + ٦|$

٩ إذا كان $\text{ق(س)} = ٢ + \text{جتا}^{٢}\text{س} - \text{جتا ٢س}$ ، س ∈ [٠ ، $\frac{\pi}{٢}$] فأوجد :

أ مجالات التقعر للأعلى وللأسفل للمنحنى ق(س) . ب نقطة/ نقط الانعطاف .



١٠ في لحظة ما ، كان طول ظل مبنى ارتفاعه ٣٠م يساوي ٢٠م ، وكانت زاوية ارتفاع الشمس هـ تتزايد بمعدل ٠,٢٥ درجة/ دقيقة . جد معدل تغير ظل المبنى آنذاك .

المراجع

1- Thomas Calculus, 10th Edition, Addison Wisely, 2000
2- Calculus with Analytic Geometry, Edwards & Penny, 4th Edition, Prentice hall 1994
3- Calculus, Howard Anton, 6th Edition, John Wiley, 1999
4- Calculus, One & Several Variables, S.L.Salas, Einar hille, 4th Edition, 1982,
5- http:// archives.math.utk.edu
6- http:// www.mathrefrence.com

أسماء المشاركين في إقرار الكتاب

– نبيل الجولاني	– أحمد حرز الله	– هناء الشرباتي	– حسني مدارسة
– خالد جبران	– رانية ونان	– يوسف الحروب	– قيس شبانة
– خالد أبو غنام	– رائد ملاك	– خضر ذياب	– أحمد عواودة
– ميسون أبو طير	– ازدهار الحضيري	– أسعد نجاجرة	– محمد عبية
– محمد ذياب	– ابتسام بعباع	– نسرين الأطرش	– باسم يامين
– سناء الأشهب	– عبد الحكيم سالم	– سارة أبو محميد	– عادل توفيق
– ميرفت أبو غزالة	– محمد نظام صالح	– أيوب حمامرة	– ناصر عبد الكريم
– منى أبو الحلاوة	– عبد الحافظ سلامة	– جوني مصلح	– أمل صوفان
– أمين عديلة	– نصر الله أبوحجلة	– ياسمينة ثوابته	– محمد دراوشة
– عبيدة الأجرب	– سهيلة بدر	– عماد صلاح	– إبراهيم أبو عبية
– خدوج الأشهب	– أحلام صلاح	– عماد قاسم	– طاهر رحال
– أسعد الترهي	– خليل محيسن	– رائدة عويس	– معزوز أبو شهاب
– إيناس زهران	– عادل الفوارعة	– عدنان مرعي	– ابتسام الملاح
– انتصار أبو عرة	– محمد علي حمدان	– عبد الرحمن زيود	– نداء عرفات
– محمد السراحنة	– فايز الطيطي	– رياض زيدان	– محمود كميل
– إبراهيم متولي	– عبد الحافظ الخطيب	–محمد نور	– عبد الرحمن عزام
– جوهر الجمل	– عائشة صباح	– ايناس أبو عمرة	– منتهى عبدالله
– ناصر حمامدة	– تهاني عمرو	– جمال ثابت	– محمد العليات
– أيمن أبو زيّاد	– سوسن الدويك	ختام حنو	– بسام قديح
– حسن أبو يونس	– خولة أبو سنينة	– عبد الباسط خليل	– على أبو حلوة
– نهى يعقوب	– جعفر الكركي	– عدنان عاصي