

القطوع المخروطية
اعداد / أ. موسى خضر

➤ **تعريف القطوع المخروطية :** هو الشكل الهندسي الناتج من تقاطع مستوى مع مخروط ، وتُقسم القطوع إلى

- أربعة أنواع وهي : الدائرة والقطع المكافئ والقطع الناقص والقطع الزائد .
- سنقوم بدراسة القطع المكافئ والناقص والزائد في أوضاعها القياسية فقط .

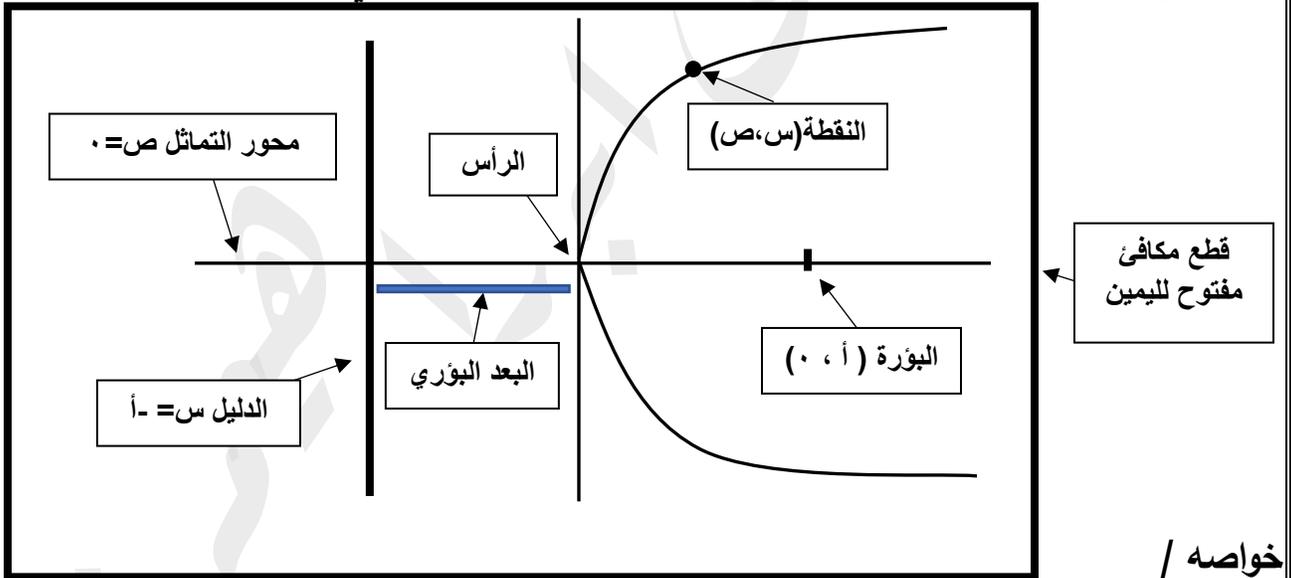
❖ أولاً / القطع المكافئ :

تعريف : هو المحل الهندسي لنقطة (س ، ص) التي تتحرك في المستوى بحيث يكون بُعدها عن نقطة ثابتة (ب) يساوي بُعدها عن مستقيم معلوم (ل) .

- النقطة الثابتة هي البؤرة ، والمستقيم المعلوم هو الدليل .

➤ **حالات القطع المكافئ :** يوجد للقطع المكافئ أربع حالات مصنفة حسب فتحة القطع وهي :

➤ **القطع المكافئ المفتوح لليمين /** تأمل الشكل المجاور ولاحظ التالي :



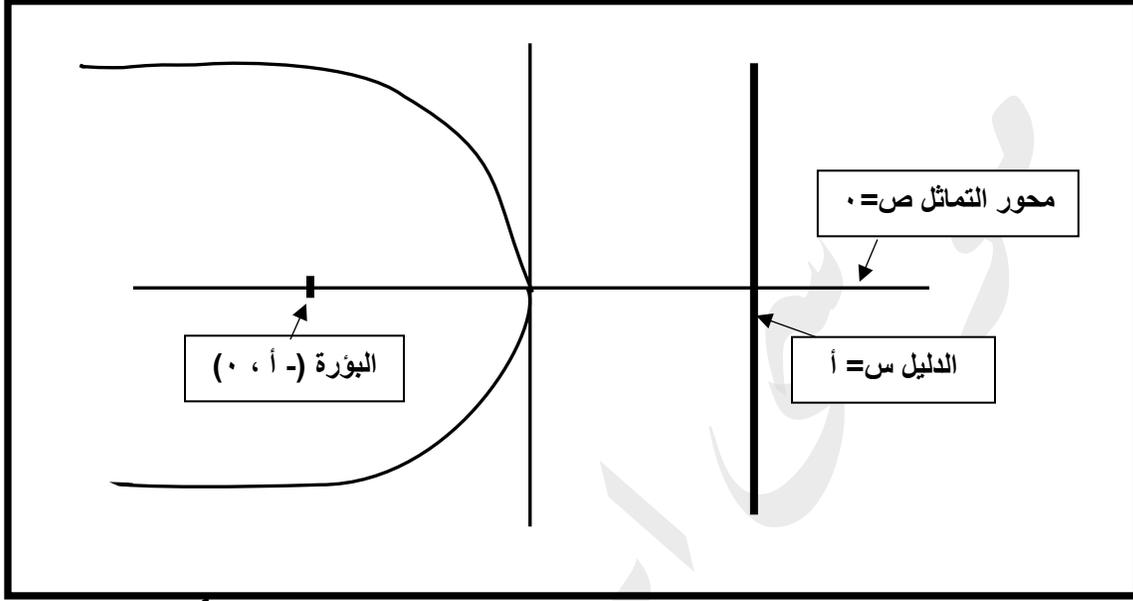
خواصه /

١. تكون فتحته بإتجاه محور السينات الموجب .
٢. رأسه نقطة الأصل (٠ ، ٠) .
٣. البؤرة تقع على محور السينات الموجب واحداثياتها هي $ب = (٠ ، ا)$ حيث $ا$ عدد موجب .
٤. دليله هو خط رأسي يقطع محور السينات السالب ومعادلته هي $س = -ا$.
٥. محور تماثله (هو الخط الذي يقسم الشكل الهندسي إلى جزئين متطابقين) وهنا يكون محور التماثل هو محور السينات ، ومعادلته $ص = ٠$.

٦. البعد البؤري : هو البعد بين البؤرة والرأس ويساوي البعد بين الرأس والدليل ويساوي a .

٧. معادلة القطع المكافئ المفتوح لليمين هي : $v^2 = 4as$

➤ القطع المكافئ المفتوح لليساار / تأمل الشكل المجاور ولاحظ التالي :



قطع مكافئ
مفتوح لليساار

خواصه /

١. تكون فتحته بإتجاه محور السينات السالب

٢. رأسه نقطة الأصل $(0, 0)$.

٣. البؤرة تقع على محور السينات السالب واحداثياتها هي $b = (-a, 0)$ حيث a عدد موجب .

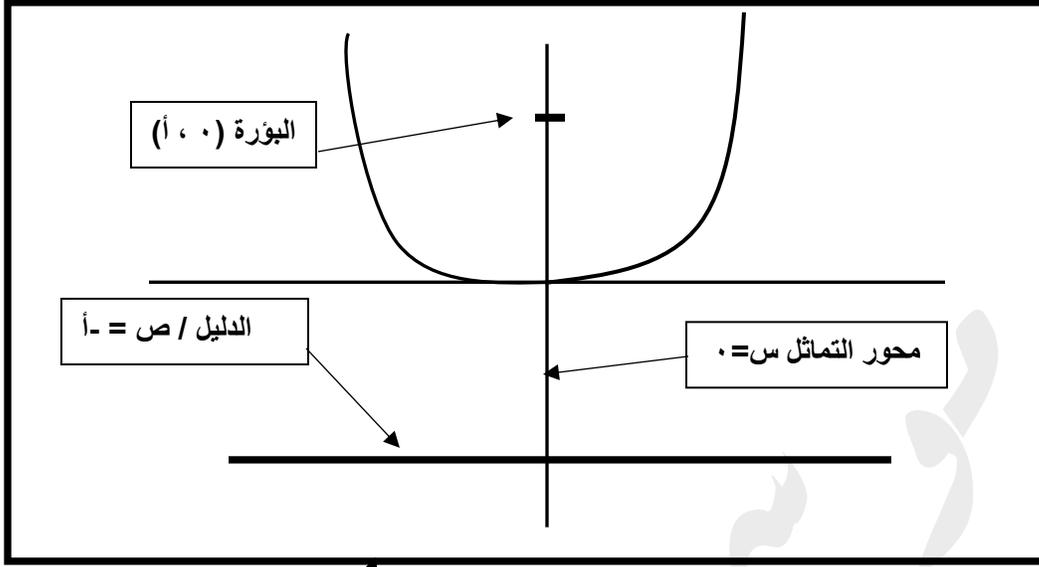
٤. دليله هو خط رأسي يقطع محور السينات الموجب ومعادلته هي $s = a$

٥. محور تماثله : هو محور السينات ، ومعادلته $v = 0$

٦. البعد البؤري : يساوي a .

٧. معادلة القطع المكافئ المفتوح لليساار هي : $v^2 = -4as$

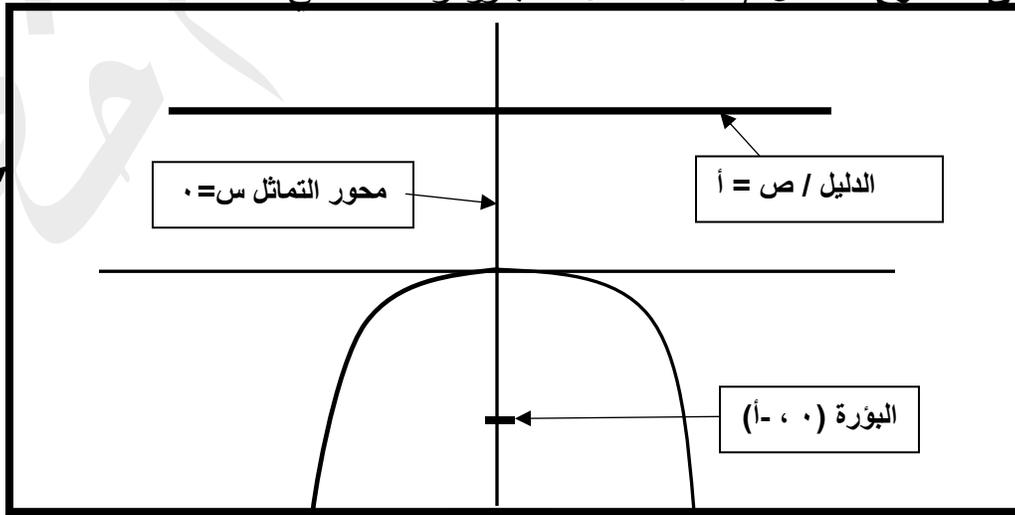
➤ القطع المكافئ المفتوح للأعلى / تأمل الشكل المجاور ولاحظ التالي :



خواصه /

١. تكون فتحته بإتجاه محور الصادات الموجب .
٢. رأسه نقطة الأصل (٠، ٠) .
٣. البؤرة تقع على محور الصادات الموجب واحداثياتها هي $b = (a, 0)$ حيث a عدد موجب .
٤. دليله هو خط أفقي يقطع محور الصادات السالب ومعادلته هي $v = -a$.
٥. محور تماثله : هو محور الصادات ، ومعادلته $s = 0$.
٦. البعد البؤري : يساوي a .
٧. معادلة القطع المكافئ المفتوح للأعلى هي : $s^2 = 4av$.

➤ القطع المكافئ المفتوح للأسفل / تأمل الشكل المجاور ولاحظ التالي :



قطع مكافئ
مفتوح للأسفل

خواصه /

١. تكون فتحته بإتجاه محور الصادات السالب .
٢. رأسه نقطة الأصل (٠، ٠) .
٣. البؤرة تقع على محور الصادات السالب واحداثياتها هي $b = (٠, -١)$ حيث a عدد موجب .
٤. دليله هو خط أفقي يقطع محور الصادات الموجب ومعادلته هي $v = ١$
٥. محور تماثله : هو محور الصادات ، ومعادلته $s = ٠$
٦. البعد البؤري : يساوي a .
٧. معادلة القطع المكافئ المفتوح للأعلى هي : $s^2 = -٤av$

+ تدريبات على القطع المكافئ :

١. أوجد إحداثيات الرأس والبؤرة والبعد البؤري ومعادلة محور التماثل ومعادلة الدليل ثم ارسم شكلاً تقريبياً للقطع المخروطية التالية :

$$(أ) \quad s^2 = ٢٠v$$

$$(ب) \quad v = ٢s^2$$

$$(ج) \quad s^2 = ٢ - v$$

$$(د) \quad \frac{١}{٤} - s = \frac{٢}{٤}v$$

$$(هـ) \quad \frac{٢}{٢}v = s^2$$

$$(و) \quad \frac{٢}{٢} - v = s^2$$

٢. أوجد معادلة القطع التالية في الحالات التالية :

$$(أ) \quad \text{بؤرته } (-٢, ٠)$$

$$(ب) \quad \text{بؤرته } (٠, ٣)$$

$$(ت) \quad \text{معادلة دليله } s = ٣$$

$$(ث) \quad \text{معادلة دليله } ٢v + ٤ = ٠$$

$$(ج) \quad \text{دليله يوازي محور السينات ويمر بالنقطة } (٤, ٢)$$

ح) مفتوح لليمين ويمر بالنقطة (٤،١)

خ) قطع مكافئ يمر بالنقطة (٢،٢)

د) يمر بالنقطتين (٤،٢) ، (٤،٢)

ذ) يمر بالنقطتين (٢،١) ، (٢،١)

٣. ما هي معادلة المحل الهندسي للنقطة تتحرك في المستوى حيث أن $s = جتا ه$ ، $ص = ١ + جتا ٢ ه$ ؟

٤. ما هي معادلة المحل الهندسي لنقطة تتحرك في المستوى حيث أن إحداثها السيني $s = \frac{٤}{١ + (٢ ه)^٢}$ ،

وإحداثها الصادي $ص = ١ - ٢ جتا ه$ ؟

٥. قطع مكافئ مفتوح لليمين ، فإذا كان القطع يمر بالنقطة (٦ ، ١) ، وكانت تبعد هذه النقطة مسافة ١٠ وحدات عن بؤرته ، جد معادلة القطع .
(يوجد معادلتان)

٦. ما هي معادلة المحل الهندسي لنقطة تتحرك في المستوى حيث أن إحداثها السيني $s = جتا ٢ ه - ١$ ، وإحداثها الصادي يساوي $ص = جتا ه$ ؟

مؤسسة فيناغورس لتدريس الرياضيات

إدارة / أ.موسى إبراهيم خضر

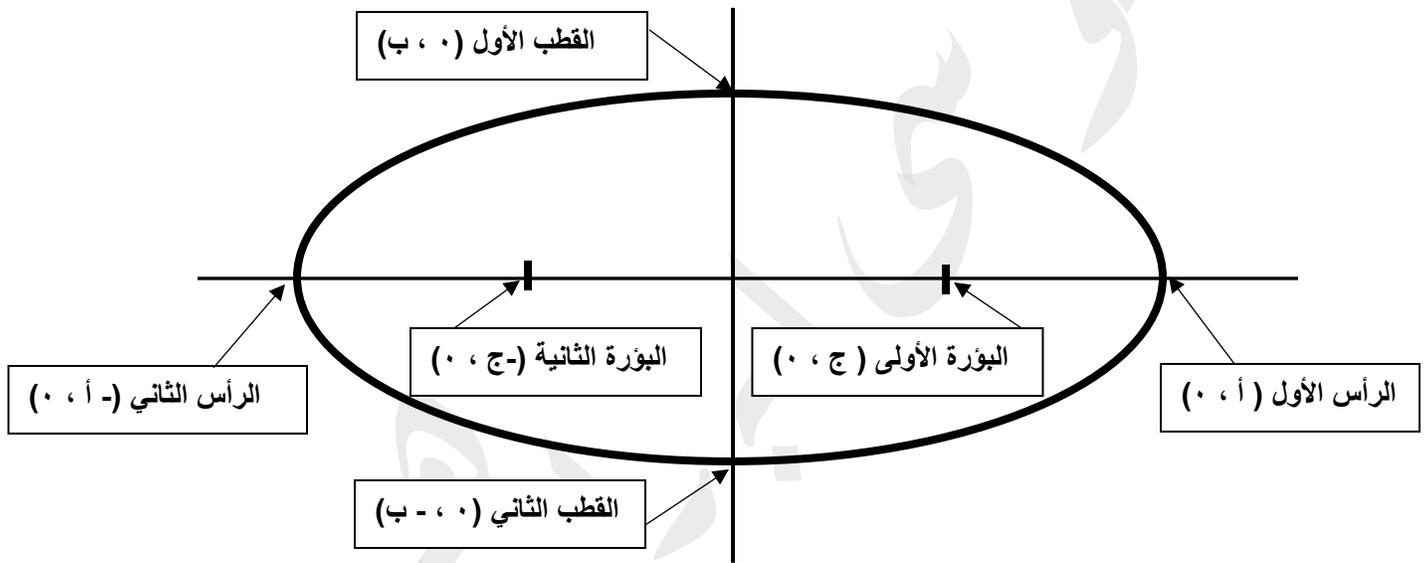
هوال / ٥٩٧٠٧٢٣٢٨

❖ نانيا / (القطع الناقص) :

تعريف : هو المحل الهندسي لنقطة (س،ص) التي تتحرك في المستوى بحيث يكون مجموع بُعديها عن نقطتين ثابتتين (البؤرتين) يساوي مقداراً ثابتاً (أ٢) أكبر من من البُعد بينهما .

➤ حالات القطع الناقص: يقسم إلى نوعين /

➤ القطع الناقص السيني / تأمل الشكل المجاور ولاحظ التالي :



خواصه /

١. له بؤرتان تقعان على محور السينات ، بؤرته الأولى ب_١ تقع على المحور السيني الموجب و احداثياتها هي (ج ، ٠) ، وبؤرته الثانية ب_٢ تقع على المحور السيني السالب و احداثياتها هي (- ج ، ٠)
٢. له رأسان يقعان على محور السينات ، رأسه الأول م_١ يقع على المحور السيني الموجب و احداثياته هي (أ ، ٠) ، ورأسه الثاني م_٢ يقع على المحور السيني السالب و احداثياته هي (- أ ، ٠)
٣. له محوران تماثل هما محوره الأكبر ، ومحوره الأصغر .
٤. طول محوره الأكبر : حيث أن المحور الأكبر هو القطعة الواصلة بين الرأسين وطوله يساوي ٢أ .
٥. طول محوره الأصغر : حيث أن المحور الأصغر هو القطعة الواصلة بين القطبين وطوله يساوي ٢ب .
٦. مركزه : هو نقطة الأصل (٠ ، ٠)
٧. البعد البؤري : هو طول القطعة الواصلة بين البؤرتين وطولها يساوي ٢ج .

٨. الاختلاف المركزي : هو النسبة بين البعد البؤري إلى طول المحور الأكبر ، ويرمز له بالرمز (هـ) ، حيث أن : $هـ = \frac{ج٢}{١٢} = \frac{ج}{١}$ ، وقيمته دائماً أقل من واحد ، ويشير إلى مدى تفلطح القطع الناقص .

٩. معادلة القطع الناقص السيني : $١ = \frac{ص٢}{٢ب} + \frac{س٢}{٢١}$ ، وهنا يجب أن تكون $٢١ < ٢ب$ حتى يكون سينياً .
 • ملاحظة / حتى نستطيع إيجاد المعلومات حول القطع الناقص ، يجب إيجاد قيم ١ ، $ب$ ، $ج$ وذلك من خلال العلاقة التالية التي تخص القطع الناقص فقط ، والعلاقة هي : $ج٢ = ٢١ - ٢ب$.

✚ تدريبات على القطع الناقص السيني :

١. تتحرك نقطة في مستوى حيث يكون مجموع بعديها عن النقطتين الثابتتين $(٠ ، ٤ ±)$ يساوي ١٠ ، أوجد :

- اكتب معادلة المحل الهندسي .
- مثل هذا القطع محددًا جميع عناصره .
- أوجد طولاً محوريه واختلافه المركزي .

٢. قطع ناقص احداثيات رأسيه $(٠ ، ١٠ ±)$ ، واحداثيات بؤرتيه $(٠ ، ٨ ±)$ ، أوجد :

- معادلة القطع
- طولاً محوريه وبعده البؤري
- اختلافه المركزي

٣. قطع مخروطي معادلته $١٠٠ - ٤س٢ - ٢٥ص٢ = ٠$ ، أوجد :

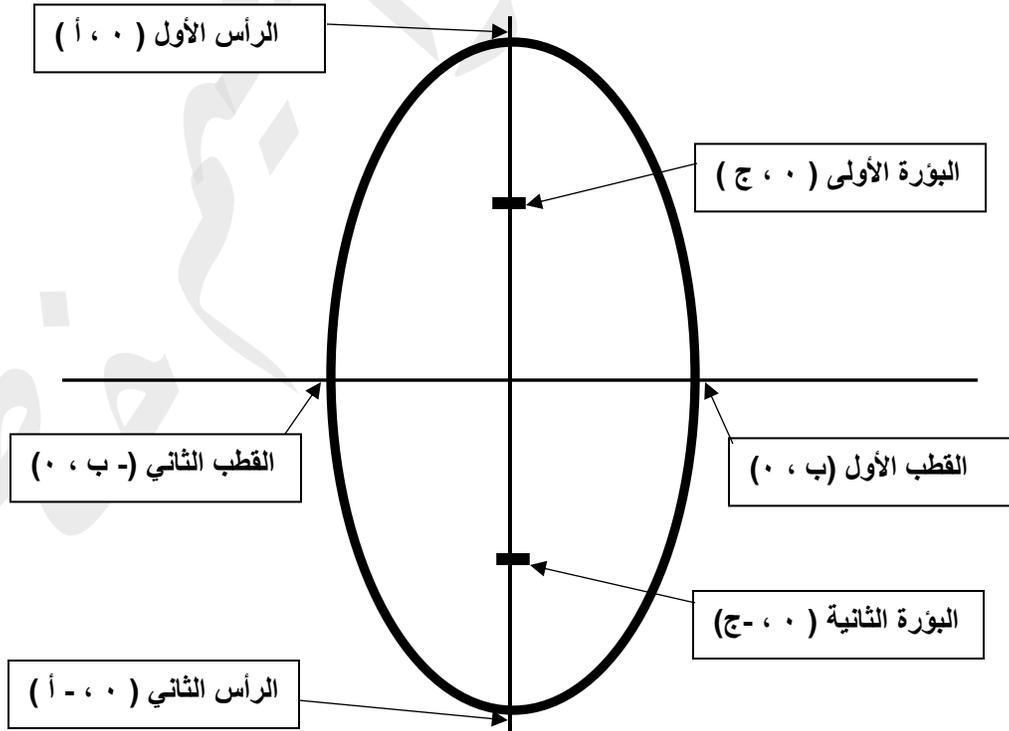
- نوع القطع
- احداثيات بؤرتيه ورأسيه
- اختلافه المركزي

٤. قطع مخروطي معادلته $٩س٢ + ٦٤ص٢ = ١$ ، أوجد :

- نوع القطع
- احداثيات رأسيه وبؤرتيه
- بعده البؤري

٥. قطع ناقص سيني ، البُعد بين إحدى بؤرتيه والرأس القريب منها يساوي ٤ ، والبعد بينها وبين الرأس البعيد منها يساوي ١٦ ، أوجد معادلة هذا القطع .
٦. أوجد معادلة القطع الناقص السيني المار بالنقطتين (٢ ، ٦) ، (٣ ، ٤) .
٧. جد معادلة القطع الناقص الذي أحد رأسيه (٥ ، ٠) ، وإحدى بؤرتيه هي بؤرة القطاع المكافئ الذي معادلته هي $v = 6$.
٨. قطع ناقص قياسي سيني ، بُعده البؤري يساوي ٦ ، والفرق بين طولاً محوريه يساوي ٢ ، أوجد معادلته .
٩. قطع ناقص نهايتي محوره الأصغر النقطتين $(\pm 3, 0)$ ، ويمر منحناه بالنقطة (٢ ، ٣) ، أوجد معادلته .
١٠. تتحرك نقطة في المستوى بحيث أن $s = 5$ جاه ، $v = 4$ جتاه ، أوجد معادلة المحل الهندسي لهذه النقطة مبيناً نوعه .

➤ القطع الناقص الصادي / تأمل الشكل المجاور ولاحظ التالي :



خواصه /

١. له بؤرتان تقعان على محور الصادات ، بؤرته الأولى B_1 تقع على المحور الصادي الموجب واحداثياتها هي $(0, 6)$ ، وبؤرته الثانية B_2 تقع على المحور الصادي السالب واحداثياتها هي $(0, -6)$.
٢. له رأسان يقعان على محور الصادات ، رأسه الأول M_1 يقع على المحور الصادي الموجب واحداثياته هي $(0, 6)$ ، ورأسه الثاني M_2 يقع على المحور الصادي السالب واحداثياته هي $(0, -6)$.
٣. له محوران تماثل هما محوره الأكبر ، ومحوره الأصغر .
٤. طول محوره الأكبر : حيث أن المحور الأكبر هو القطعة الواصلة بين الرأسين وطوله يساوي ١٢ .
٥. طول محوره الأصغر : حيث أن المحور الأصغر هو القطعة الواصلة بين القطبين وطوله يساوي ٢٢ .
٦. مركزه : هو نقطة الأصل $(0, 0)$.
٧. البعد البؤري : هو طول القطعة الواصلة بين البؤرتين وطولها يساوي ٢٢ .
٨. الاختلاف المركزي : هو النسبة بين البعد البؤري إلى طول المحور الأكبر ، ويرمز له بالرمز $(هـ)$ ، حيث أن : $هـ = \frac{2}{22} = \frac{ج}{1}$ ، وقيمته دائماً أقل من واحد ، ويشير إلى مدى تفلطح القطع الناقص .
٩. معادلة القطع الناقص الصادي : $1 = \frac{ص^2}{21} + \frac{س^2}{2}$ ، وهنا يجب أن تكون $2 < 21$ حتى يكون صادياً .

✚ تدريبات على القطع الناقص الصادي :

١. قطع مخروطي معادلته $1 = \frac{ص^2}{25} + \frac{س^2}{9}$ ، أوجد :

- نوع القطع
 - احداثيات رأسيه وبؤرتيه
 - طولاً محوريه
٢. تتحرك نقطة في المستوى بحيث يكون مجموع بعديها عن نقطتين ثابتتين (8 ± 6) يساوي ٢٠ ، أوجد :
 - معادلة القطع محدداً نوعه
 - ارسم شكلاً تقريبياً للقطع
 - بُعد البؤري واختلافه المركزي

٣. قطع مخروطي احداثيات رأسيه (٥ ± ٤٠) ، واحداثيات بؤرتيه (٣ ± ٤٠) ، أوجد :

- معادلة القطع محددًا نوعه

- طولاً محوريه

- اختلافه المركزي

٤. قطع مخروطي معادلته $٤ص^٢ = ٣٦ - ٩س^٢$ ، أوجد :

- نوع القطع

- طولاً محوريه

- احداثيات رأسيه وبؤرتيه

٥. قطع مخروطي معادلته $٦ص + ٢٥س = ١$ ، أوجد :

- نوع القطع

- احداثيات رأسيه وبعديه

- اختلافه المركزي

٦. قطع ناقص صادي ، البُعد بين إحدى بؤرتيه والرأس القريب منها يساوي ٢ ، والبعد بينها وبين الرأس البعيد

منها يساوي ٨ ، أوجد معادلة القطع ثم ارسم شكلاً تقريبياً لهذا القطع .

٧. قطع مخروطي معادلته $\frac{ص}{٤} + \frac{س^٢}{ص} - \frac{١}{ص} = ٠$ ، أوجد :

- نوع القطع

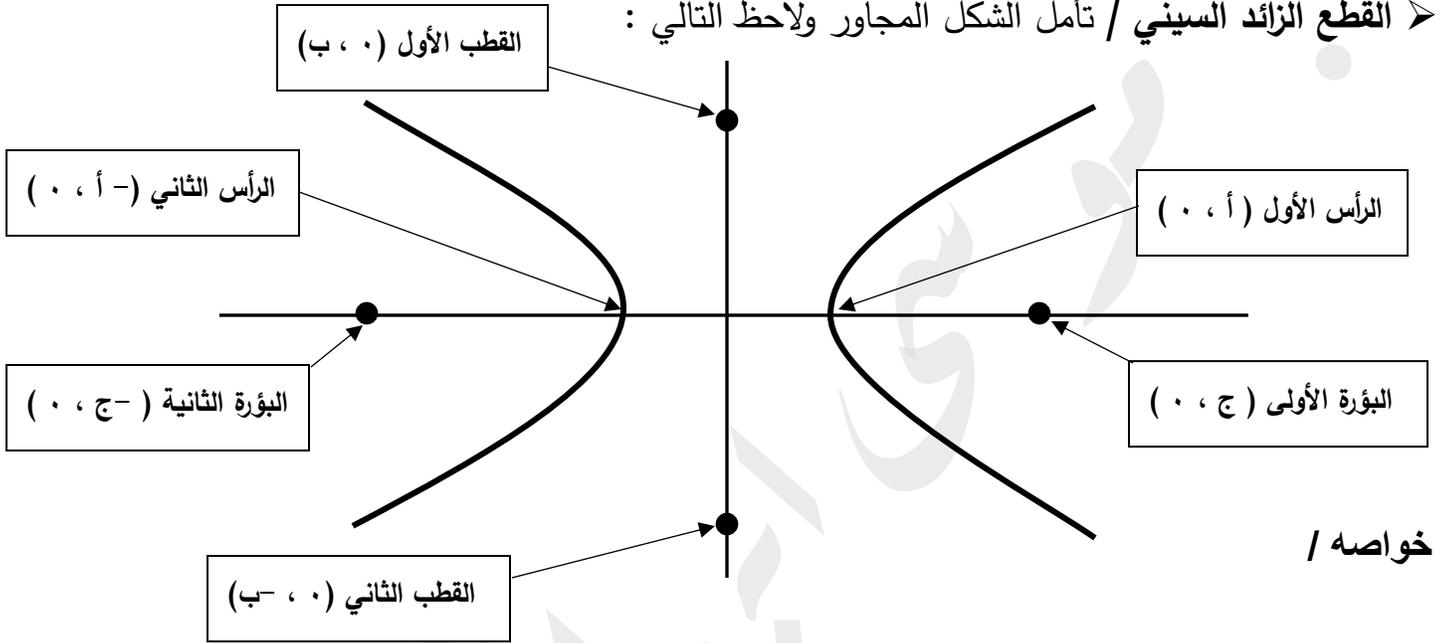
- بُعد البؤري

- احداثيات بؤرتيه ورأسيه

❖ ثالثاً / القطع الزائد :

تعريف : هو المحل الهندسي للنقطة (س،ص) التي تتحرك في المستوى بحيث يكون الفرق المطلق بين بعديها عن نقطتين ثابتتين (البؤرتين) يساوي مقداراً ثابتاً ($2a$) أصغر من البعد بينهما .

➤ **القطع الزائد السيني / تأمل الشكل المجاور ولاحظ التالي :**



خواصه /

١. له بؤرتان تقعان على محور السينات ، إحداهما تقع على المحور السيني الموجب وإحداثياتها هي ($c, 0$) ، والأخرى تقع على المحور السيني السالب وإحداثياتها هي ($-c, 0$) .
٢. يقطع محور السينات في نقطتين وهما الرأسان ، وأحدهما يقع على المحور السيني الموجب وإحداثياته هي ($a, 0$) ، والأخرى يقع على المحور السيني السالب وإحداثياته هي ($-a, 0$) .
٣. له محوران تماثل هما : المحور القاطع و المحور المرافق .
٤. المحور القاطع : هو المحور الواصل بين الرأسين وطوله يساوي $2a$
٥. المحور المرافق : هو المحور الواصل بين القطبين وطوله يساوي $2b$
٦. البعد البؤري : هو البعد بين البؤرتين وطوله يساوي $2c$
٧. الاختلاف المركزي : هو النسبة بين البعد البؤري إلى طول المحور القاطع ويساوي $\frac{c}{a}$ (يكون أكبر من ١)
٨. علاقة هامة جداً في القطع الزائد فقط : $c^2 = a^2 + b^2$ حيث (a, b, c) أعداد موجبة .
٩. معادلة القطع الزائد السيني هي : $1 = \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}$ (زائد سيني لأن معامل s^2 موجب)

تدريبات على القطع الزائد السيني :

١. قطع زائد معادلته : $\frac{س^2}{٩} - \frac{ص^2}{١٦} = ١$ ، أوجد :

- نوع القطع

- احداثيات رأسيه وبؤرتيه

- طولاً محوريه

- اختلافه المركزي

٢. قطع مخروطي معادلته : $٤س^2 - ٩ص^2 = ١$ ، أوجد :

- نوع القطع

- طولاً محوريه

- اختلافه المركزي

- بُعد البؤري

٣. قطع مخروطي معادلته : $(٣س - ٥ص)(٣س + ٥ص) - ٢٢٥ = ٠$ ، أوجد :

- نوع القطع

- طولاً محوريه

- احداثيات رأسيه

- احداثيات بؤرتيه

٤. تتحرك نقطة في مستوى بحيث يكون الفرق المطلق بين بعديها عن النقطتين (٥ ± ٠٦) ، يساوي ٨ ، أوجد :

- نوع القطع ومعادلته

- مثله بيانياً محدداً عناصره

٥. قطع زائد سيني طول محوره المرافق يساوي ١٢ ، وطول محوره القاطع يساوي ١٦ ، أوجد :

- نوع القطع ومعادلته

- احداثيات بؤرتيه ورأسيه

٦. قطع زائد رأساه (١٢ ± ٠٦) ، وطول محوره المرافق يساوي ١٨ ، أوجد :

- معادلة القطع

- احداثيات بؤرتيه

٧. قطع مخروطي احداثيات رأساه (٣ ± ٠٦) ، واختلافه المركزي $\frac{٥}{٣}$ ، أوجد :

- معادلة القطع

- احداثيات بؤرتيه وقطبيه

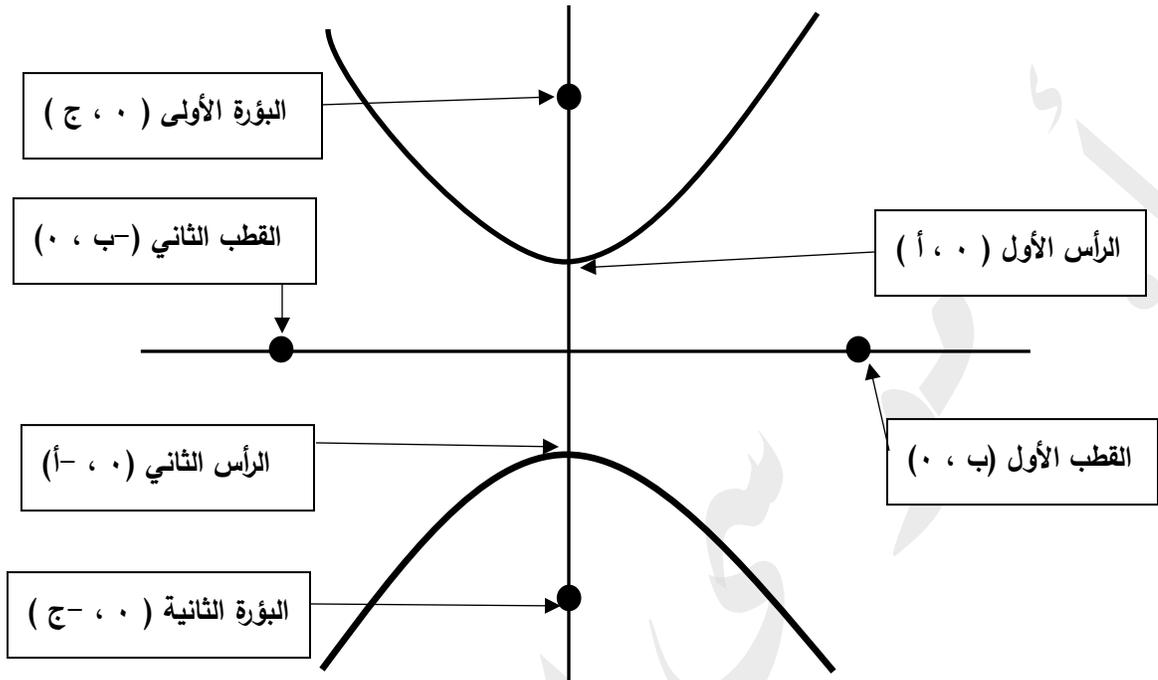
٨. قطع مخروطي معادلته : $(س - ٥ص)(س + ٥ص) - ١ = ٠$ ، حدد نوعه واحداثيات رأسيه .

٩. تتحرك نقطة في المستوى حيث أن $س = قتاها$ ، $ص = ظتاها$ ، اكتب معادلة المحل الهندسي .

١٠. أوجد معادلة القطع الزائد السيني الذي يمر بالنقطتين $(٣٧٢، ٢)$ ، $(٢٧٤، ٣)$.

١١. لقطع الزائد السيني / تأمل الشكل المجاور ولاحظ التالي :

➤ القطع الزائد الصادي / تأمل الشكل المجاور ولاحظ التالي :



خواصه /

١. له بؤرتان تقعان على محور الصادات، إحداهما تقع على المحور الصادي الموجب وإحداثياتها هي $(٠, ج)$ ، والأخرى تقع على المحور الصادي السالب وإحداثياتها هي $(٠, -ج)$.
٢. يقطع محور الصادات في نقطتين وهما الرأسان ، وأحدهما يقع على المحور الصادي الموجب وإحداثياته هي $(أ, ٠)$ ، والأخر يقع على المحور الصادي السالب وإحداثياته هي $(٠, -أ)$.
٣. له محوران تماثل هما : المحور القاطع و المحور المرافق .
٤. المحور القاطع : هو المحور الواصل بين الرأسين وطوله يساوي $٢أ$
٥. المحور المرافق : هو المحور الواصل بين القطبين وطوله يساوي $٢ب$
٦. البعد البؤري : هو البعد بين البؤرتين وطوله يساوي $٢ج$
٧. الاختلاف المركزي : هو النسبة بين البعد البؤري إلى طول المحور القاطع ويساوي $\frac{ج}{أ}$ (يكون أكبر من ١)
٨. علاقة هامة جداً في القطع الزائد فقط : $ج^٢ = أ^٢ + ب^٢$ حيث (أ ، ب ، ج) أعداد موجبة .
٩. معادلة القطع الزائد الصادي هي : $١ = \frac{ص^٢}{ب^٢} - \frac{س^٢}{أ^٢}$ (زائد صادي لأن معامل ص ٢ موجب)

✚ تدريبات على القطع الزائد الصادي :

١. قطع زائد معادلته : $\frac{ص^2}{٦٤} - \frac{س^2}{٣٦} = ١$ ، أوجد :

- نوع القطع
- طولاً محوريه
- احداثيات رأسيه وبؤرتيه
- بُعد البؤري

٢. قطع مخروطي معادلته : $٩ص^2 - ٤س^2 = ١$ ، أوجد :

- نوع القطع
- ارسم شكلاً تقريبياً للقطع محدداً عناصره .
- احداثيات رأسيه وبؤرتيه

٣. قطع مخروطي معادلته : $٦س^2 - ٩ص^2 + ١٤٤ = ٠$ ، أوجد :

- نوع القطع
- اختلافه المركزي
- احداثيات رأسيه وبؤرتيه
- طولاً محوريه

٤. قطع زائد احداثيات بؤرتيه $(٠ ، ±١٣)$ ، وطول محوره القاطع يساوي ٢٤ ، أوجد :

- معادلة القطع ونوعه
- اختلافه المركزي
- احداثيات رأسيه

٥. قطع زائد احداثيات رأسيه $(٠ ، ±٤)$ ، وبُعد البؤري يساوي ١٠ ، أوجد :

- نوع القطع ومعادلته
- احداثيات بؤرتيه

٦. تتحرك النقطة (س ، ص) في المستوى حيث أن إحداثها السيني يتحدد بالعلاقة $س = ظاه$ ، وإحداثها الصادي يتحدد بالعلاقة $ص = قاه$ ، أوجد معادلة المحل الهندسي محدداً نوعه .

تم بحمد الله

معلم المادة / أ.موسى إبراهيم خضر