

السنة  
٢٠٢٠/٢٠١٩م

# مسكاة النجاح

## الوحدة الأولى

## التفاضل والتكامل

شرح وافى لمادة الرياضيات للعلوم

الإنسانية للوحدة الأولى مع أمثلة

إضافية وأسئلة الكتاب و حلول أسئلة

سنوات سابقة وأسئلة إثرائية

اعداد الأستاذ:

زياد عبد الفتاح محمد عمرو

زياد عبد الفتاح عمرو

مدرسة ذكور الشرعية الثانوية

السنة ٢٠٢٠/٢٠١٩م

تنويه

نعلمكم بان حقوق الطبع والتصوير  
محفوظة لمكتبة دار الارقم

للاستفسار الاتصال على:

المكتبة: ٥٩٩٦٧٦٣٠٩

أو الاستاذ زياد: ٥٩٧٣١٢٢٢٠



# (الوحدة الأولى)

## التفاضل والتكامل

قبل البدء في هذه الوحدة اتمنى عليك عزيزي الطالب ان تراجع معي مرة اخرى مجموعة من الاساسيات التي سبق ان ركزنا عليها سابقا وذلك لأهميتها القصوى في هذه الوحدة .

مراجعة عامة :



(١) فرق بين مربعين ( وجود حدين مربعين بينهما إشارة طرح )

$$\begin{aligned} 1 &= 1 \times 1 = 1^2 & 4 - 2^2 &= (4 - 2^2) = (2 + 2)(2 - 2) \\ 4 &= 2 \times 2 = 2^2 & 9 - 3^2 &= (9 - 3^2) = (3 + 3)(3 - 3) \\ 9 &= 3 \times 3 = 3^2 & 16 - 4^2 &= (16 - 4^2) = (4 + 4)(4 - 4) \\ 16 &= 4 \times 4 = 4^2 & 25 - 5^2 &= (25 - 5^2) = (5 + 5)(5 - 5) \\ 25 &= 5 \times 5 = 5^2 & 36 - 6^2 &= (36 - 6^2) = (6 + 6)(6 - 6) \\ 36 &= 6 \times 6 = 6^2 & 49 - 7^2 &= (49 - 7^2) = (7 + 7)(7 - 7) \\ 49 &= 7 \times 7 = 7^2 & 64 - 8^2 &= (64 - 8^2) = (8 + 8)(8 - 8) \\ 64 &= 8 \times 8 = 8^2 & 81 - 9^2 &= (81 - 9^2) = (9 + 9)(9 - 9) \\ 81 &= 9 \times 9 = 9^2 & 100 - 10^2 &= (100 - 10^2) = (10 + 10)(10 - 10) \\ 100 &= 10 \times 10 = 10^2 & & \end{aligned}$$

(٢) فرق بين مكعبين : (حدين مكعبين بينهما إشارة طرح )

$$\begin{aligned} 1 &= 1 \times 1 \times 1 = 1^3 & 8 - 2^3 &= (8 - 2^3) = (2 + 2 + 2)(2 - 2) \\ 8 &= 2 \times 2 \times 2 = 2^3 & 27 - 3^3 &= (27 - 3^3) = (3 + 3 + 3)(3 - 3) \\ 27 &= 3 \times 3 \times 3 = 3^3 & 64 - 4^3 &= (64 - 4^3) = (4 + 4 + 4)(4 - 4) \\ 64 &= 4 \times 4 \times 4 = 4^3 & 125 - 5^3 &= (125 - 5^3) = (5 + 5 + 5)(5 - 5) \\ 125 &= 5 \times 5 \times 5 = 5^3 & & \end{aligned}$$

(٣) مجموع مكعبين : ( وجود حدين مكعبين بينهما إشارة جمع )

ربع غير اضرب ربع

$$\begin{aligned} 4 + 2^2 &= (4 + 2^2) = (2 + 2)(2 + 2) \\ 8 + 2^3 &= (8 + 2^3) = (2 + 2)(2 + 2 + 2) \\ 16 + 4^2 &= (16 + 4^2) = (4 + 4)(4 + 4) \\ 1 + 3^2 &= (1 + 3^2) = (1 + 3)(1 + 3) \\ 25 + 5^2 &= (25 + 5^2) = (5 + 5)(5 + 5) \end{aligned}$$

٤) إخراج عامل مشترك : هو إخراج الحدود المتشابهة من حدين أو أكثر

مثال:

$$(1) \quad s - s^2 = 1 \times s - s \times s$$

$$= s(1 - s)$$

$$(2) \quad 2s^2 - 4s = s \times 2s - s \times 4$$

$$= 2s(s - 2)$$

$$(3) \quad 2s^2 - 6 = 2 \times s^2 - 3 \times 2$$

$$= 2(s^2 - 3)$$

$$(4) \quad 5s - 20 = 5 \times s - 5 \times 4$$

$$= 5(s - 4)$$

$$(1) \quad s^2 + 2s = s \times s + s \times 2$$

$$= s(s + 2)$$

$$(2) \quad 5s + s^2 = s \times 5 + s \times s$$

$$= s(s + 5)$$

$$(3) \quad s^3 - 3s = s \times s^2 - s \times 3$$

$$= s(s^2 - 3)$$

$$(4) \quad s^2 - 4s = s \times s - s \times 4$$

$$= s(s - 4)$$

٥) تحليل العبارة التربيعية :

سنتعرف على تحليل العبارة التربيعية على شكل :

$s^2 + b s + c$  جـ ( ثلاثة حدود الأول تربيع، الثاني بدون تربيع، الثالث عدد عادي ( حقيقي ) )  
خطوات التحليل :

(١) نفتح قوسين ( ) ( )

(٢) نضع في كل قوس المتغير ( س ) ( س )

(٣) نجد عددين حاصل ضربهما يساوي ( ج ) " الحد الأخير " " العدد الثابت "

(٤) ننظر إلى إشارة الحد الأخير وهناك احتمالان

وإما أن تكون موجبة أو أن تكون سالبة

والفرق بينهما يساوي (ب)

ومجموعها يساوي (ب)

(٥) نضع العدد الكبير في القوس الأول

(٦) الإشارة تكون حسب القاعدة

أمثلة :

$$(1) \quad s^2 - 4s + 4 = (s - 2)(s - 2)$$

$$(2) \quad s^2 - 5s + 6 = (s - 2)(s - 3)$$

$$(3) \quad s^2 + 6s + 8 = (s + 2)(s + 4)$$

$$(4) \quad s^2 - 6s + 8 = (s - 2)(s - 4)$$

$$(5) \quad s^2 + 8s + 15 = (s + 3)(s + 5)$$

$$(6) \quad s^2 - 4s - 12 = (s - 6)(s + 2)$$

$$(7) \quad s^2 - 6s - 16 = (s - 8)(s + 2)$$

$$(8) \quad s^2 + 6s - 16 = (s + 8)(s - 2)$$

$$(9) \quad s^2 - 3s - 10 = (s - 5)(s + 2)$$



٦) فك مربع قوس

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(الأول + الثاني)^2 = (الأول)^2 + (2 \times الأول \times الثاني) + (الثاني)^2$$

$$(1) (3+s)^2 = 3^2 + (3 \times s \times 2) + s^2$$

$$= 9 + 6s + s^2$$

$$(2) (5+s)^2 = 5^2 + 10s + s^2$$

$$(3) (2+s)^2 = 4 + 4s + s^2$$

$$(4) (6+s)^2 = 36 + 12s + s^2$$

$$(5) (3-s)^2 = 9 - 6s + s^2$$

الرجاء الاهتمام بهذه الأمور الستة لأنها مهمة جدا لا بد من معرفتها بشكل كبير

**ملاحظة:** يكثر في هذه الوحدة التعامل مع الإقترانات ونحتاج في كثير من الاحيان الى تعويض قيم معينة في هذه

الإقترانات واليك عزيزي الطالب هذه المراجعة البسيطة للتعرف على قيمة اقتران عند  $s = 2$  ،  $s = 3$  ،

مراجعة بسيطة عن قيمة الاقتران

مثال : إذا كانت  $v = (s)$  أوجد/ي قيمة ما يلي

$$(1) v(2) = 5 + 2 \times 2 = 9$$

$$= 9 = 5 + 4$$

$$(2) v(3) = 5 + 3 \times 2 = 11$$

$$(3) v(7) = 5 + 7 \times 2 = 19$$

$$(4) v(3-) = 5 + 3- \times 2 = 1-$$

$$(5) v(2-) = 5 + 2- \times 2 = 1$$

إذا كان  $v(s) = 3s^2 - 2s + 1$  أوجد/ي

$$(1) v(1) = 3(1)^2 - 2(1) + 1 = 2$$

$$(2) v(2) = 3(2)^2 - 2(2) + 1 = 9$$

**الدرس الاول: (١-١) متوسط التغير للاقتران**

نشاط (١): يعد الزيت الفلسطيني من أجود أنواع الزيوت على مستوى العالم، ويشكل دعامة اقتصادية للعائلة الفلسطينية. يرصد الجدول أدناه إنتاج فلسطين من الزيتون، والزيت المستخرج في عامي ٢٠١٣م، ٢٠١٤م، كما وردت من جهاز الإحصاء المركزي.

كمية الزيتون وكمية الزيت المستخرج منه في العامين ٢٠١٣ و ٢٠١٤ ( الكميات بالطن )

السنة	٢٠١٣	٢٠١٤	مقدار التغير بين العامين
س كمية الزيتون	٦٦٠٠٠	١٠١٠٠٠	٣٥٠٠٠
ص كمية الزيت المستخرج	١٨٠٠٠	٢٥٠٠٠	_____

التغير في كمية الزيتون بين عامي ٢٠١٣ م و ٢٠١٤ م يساوي ٣٥٠٠٠ طن.  
التغير في كمية الزيت المستخرج بين العامين يساوي \_\_\_\_\_ .

تعريف : إذا كان  $ص = ق(س)$  اقتراناً، وتغيرت  $س$  من  $س_١$  إلى  $س_٢$  فإن:

التغير في قيمة  $س = س_٢ - س_١$ ، ويرمز له بالرمز  $\Delta س$  .

التغير في قيمة  $ص = ص_٢ - ص_١ = ق(س_٢) - ق(س_١)$  ويرمز له بالرمز  $\Delta ص$

نشاط (٢):

أجد التغير في  $س$  عندما تتغير  $س$  من  $س_١ = ١$  إلى  $س_٢ = ٤$  .

$$\Delta س = س_٢ - س_١ = \underline{\hspace{2cm}}$$

مثال (١): إذا كان  $ق(س) = ٥س^٢ - ٢س$ ، وكانت  $س_١ = ١$ ،  $\Delta س = ٢$ ، فما مقدار التغير في  $ص$ ؟

$$\Delta س = س_٢ - س_١ = ٣$$

$$١ - س_١ = ٢$$

$$\therefore س_٢ = ٣$$

الحل:

$$\Delta ص = ق(س_٢) - ق(س_١) = ق(٣) - ق(١)$$

$$= (٥(٣)^٢ - ٢(٣)) - (٥(١)^٢ - ٢(١))$$

$$= ٣٦ - ١٣ = \underline{٢٣}$$

لاحظ: ما مقدار التغير في  $ص$  عندما يكون التغير في  $س = ١$

**المتغير** : هو شيء قيمته ليست ثابتة ( يأخذ أكثر من قيمة )

**التغير** : مقدار التحول بين القيمة الأولى والقيمة الثانية ويرمز له بالرمز "  $\Delta$  " وتقرأ (دلتا).

حيث أن التغير في أي شيء = (القيمة الثانية - القيمة الأولى).

### متوسط التغير للاقتران

إذا كان  $(s_1, v_1)$  اقتراناً وتغيرت  $s$  من  $s_1$  إلى  $s_2$  فإن متوسط التغير للاقتران  $(s, v)$  يعطى بالعلاقة :

$$\frac{v(s_2) - v(s_1)}{s_2 - s_1} = \frac{v_2 - v_1}{s_2 - s_1} = \frac{\Delta v}{\Delta s}$$

يستخدم عندما يعطي اقتران وقيم  $s$  :  $s_1, s_2$   
ويطلب :- متوسط التغير

يستخدم عندما يعطي نقطتين

$P(s_1, v_1)$  ،  $Q(s_2, v_2)$

ويطلب ١- متوسط التغير

٢- ميل المستقيم **القاطع**

مثال توضيحي : إذا كان  $Q(s) = 2s + 3$  اوجد متوسط التغير للاقتران  $Q(s)$  عندما تتغير  $s$  من  $s_1 = 2$  ،  $s_2 = 4$

(اكمال ٢٠١٩) ليكن  $Q(s) = \frac{1}{s} + 0$  ، فما قيمة متوسط

تغير الاقتران  $Q(s)$  عندما تتغير  $s$  من  $s_1 = \frac{1}{3}$  ،  $s_2 = 1$

$$\begin{aligned} \frac{v(s_2) - v(s_1)}{s_2 - s_1} &= \frac{\Delta v}{\Delta s} \\ \frac{v(2) - v(4)}{2 - 4} &= \\ \frac{(3 + 2 \times 2) - (3 + 4 \times 2)}{2} &= \\ \boxed{2} = \frac{4}{2} = \frac{7 - 11}{2} &= \end{aligned}$$

مثال (٢) أحسب متوسط التغير في الاقتران  $ص(س) = ٥ + ٢س$  ، عندما تتغير  $س$  في الفترة  $[٥،٣]$  .

$$\begin{aligned} \boxed{14} &= ٥ + ٢(٣) = (٣)ص \quad ، \quad \boxed{30} = ٥ + ٢(٥) = (٥)ص \leftarrow \\ \frac{(٣)ص - (٥)ص}{٣ - ٥} &= \frac{١ص - ٢ص}{٣س - ٥س} = \frac{\cancel{ص} \Delta}{\cancel{س} \Delta} \leftarrow \\ \boxed{8} &= \frac{١٦}{٢} = \frac{١٤ - 30}{٣ - ٥} = \end{aligned}$$

مثال خارجي: اذا  $ص(س) = ٣س + ٤$  كان وتغيرت  $س$  من  $١س = ٤$  الى  $٢س = ٧$  ، اوجد متوسط التغير للاقتران  $ص(س)$ .

الحل: متوسط التغير للاقتران =

$$\begin{aligned} \frac{(١س)ص - (٢س)ص}{١س - ٢س} &= \frac{\cancel{ص} \Delta}{\cancel{س} \Delta} \\ \frac{(٤)ص - (٧)ص}{٤ - ٧} &= \frac{\cancel{ص} \Delta}{\cancel{س} \Delta} \\ \frac{٤ + ٤ \times ٣ - ٧ - ٧ \times ٣}{٤ - ٧} &= \\ \frac{٤ - ٥}{٣} &= \frac{١٦ - ٢٥}{٣} = \end{aligned}$$

النجاح ليس عدم  
فعل الأخطاء



برناد شلو

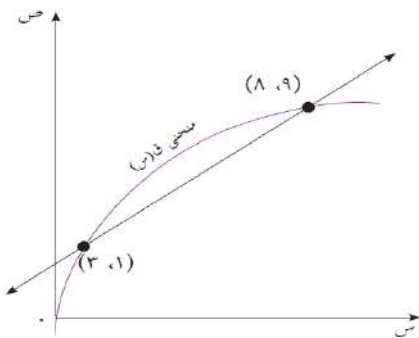
النجاح هو عدم  
تكرار الأخطاء

## المفهوم الهندسي لمتوسط التغير:

إذا قطع المستقيم  $ل$  منحنى  $ص(س)$  في النقطتين  $(١س، ص(١س))$  ،  $(٢س، ص(٢س))$  فإن ميل المستقيم القاطع  $ل$

$$\frac{(١س)ص - (٢س)ص}{١س - ٢س} = \frac{\Delta ص}{\Delta س}$$

مثال (٣): أجد ميل القاطع لمنحنى الاقتران  $ص(س)$  ، الممثل بالشكل المجاور .



الحل:  $ص(١) = ٣$  ،  $ص(٩) = ٨$

$$\begin{aligned} \frac{(١)ص - (٩)ص}{١ - ٩} &= \frac{(١س)ص - (٩س)ص}{١س - ٩س} = \\ \frac{٥}{٨} &= \frac{٣ - ٨}{١ - ٩} = \end{aligned}$$

∴ ميل القاطع

إذن ميل القاطع لمنحنى الاقتران  $ص(س)$  يساوي  $\frac{٥}{٨}$

(لجنة ٢٠١٨) اذا كانت النقطتان  $(٢، ١)$  ،  $(٥، ٢)$  تقعان على منحنى الاقتران  $ص = ق(س)$  فإن متوسط التغير للاقتران  $ق(س)$  عندما تتغير  $س$  من  $١$  الى  $٢$  يساوي

مثال (٤): إذا قطع المستقيم ل منحني الاقتران  $ص(س)$  في النقطتين أ(٤ ، ٦) ، ب (٢ ، ٠) ، فما متوسط التغير للاقتران  $ص(س)$  ؟

$$\text{الحل: متوسط التغير} = \frac{\Delta ص}{\Delta س} = \frac{ص(س_١) - ص(س_٢)}{س_١ - س_٢} = \frac{١ - ٤}{٤ - ٠} = \frac{٢ - ٦}{٠ - ٤} = \frac{١ ص - ٢ ص}{١ س - ٢ س} = \boxed{١}$$

لجنة (٢٠٠٧) اذا كان  $ص = ٥$  و  $ص(س) = ١٠$  وكان متوسط التغير للاقتران  $ص(س)$  عندما تتغير س من  $س_١ = ٢$  الى  $س_٢ = ٥$  هو ١٠ ، فجد قيمة  $ص(٥)$  علما بان  $ص(٢) = ٦$  .



$$\text{الحل:} \frac{ص(س_١) - ص(س_٢)}{س_١ - س_٢} = \frac{\Delta ص}{\Delta س}$$

$$١٠ = \frac{ص(٥) - ص(٢)}{٥ - ٢} = \frac{ص(٥) - ٦}{٣}$$

وبالضرب التبادلي ينتج

$$٣ \times ١٠ = (٥) ص - (٢) ص$$

$$٣٠ = ٦ - (٥) ص$$

$$٦ + \quad \quad \quad ٦ +$$

$$٣٦ = (٥) ص$$

اكمال ٢٠١٧ اذا كان متوسط تغير الاقتران  $ص(س)$  عندما تتغير س من  $س_١ = ٥$  الى  $س_٢ = ٢$  ، وكان  $ص(٥) = ٧$  ،  $ص(٢) = ٣$  فان قيمة  $ص(٣)$  تساوي

(وزاري ٢٠١٣) اذا كان متوسط التغير للاقتران  $ص(س)$  عندما تتغير س من  $س_١ = ٢$  الى  $س_٢ = ٤$  هو ٢ ، وكان  $ص(٤) = ٦$  فان قيمة  $ص(٢)$

$$٢ \times ٢ = (٢) ص - (٤) ص$$

$$٤ = (٢) ص - ٦$$

$$٦ - \quad \quad \quad ٦ -$$

$$٢ = (٢) ص -$$

$$\boxed{٢ = (٢) ص}$$

$$\text{الحل:} \frac{ص(س_١) - ص(س_٢)}{س_١ - س_٢} = \frac{\Delta ص}{\Delta س}$$

$$٢ = \frac{ص(٢) - ص(٤)}{٢ - ٤} = \frac{ص(٢) - ٦}{-٢}$$

وبالضرب التبادلي ينتج

$$٢ = \frac{ص(٢) - (٤) ص}{٢}$$

(وزاري ٢٠٠٨) اذا علمت ان  $ص(٥) = -٢$  ،  $ص(٢) = ٢٨$  فان متوسط التغير للاقتران  $ص(س)$  عندما تتغير س من  $س_١ = ٢$  ،  $س_٢ = ٥$  يساوي

$$\text{الحل:} \frac{ص(س_١) - ص(س_٢)}{س_١ - س_٢} = \frac{\Delta ص}{\Delta س}$$

$$\boxed{٤} = \frac{٢٨}{٧} = \frac{ص(٢) - ص(٥)}{٢ - ٥} = \frac{\Delta ص}{\Delta س}$$

لجنة (٢٠١٩) اذا كان  $ص(٣) = -١$  ،  $ص(١) = ١٦$  ما متوسط التغير للاقتران  $ص(س)$  عندما تتغير س من  $س_١ = ١$  ،  $س_٢ = ٣$  ؟

(اكمال ٢٠١٨) اذا كان متوسط تغير الاقتران  $ص(س)$  عندما تتغير س من  $س_١ = ١$  الى  $س_٢ = ٣$  يساوي ٤ ، وكان  $ص(٣) = ١٣$  فان  $ص(١) =$



مثال (٥): إذا كان هـ (س) = ٢(س) + ٤ ، وكان متوسط تغير الاقتران (س) على الفترة [٣،٧] يساوي ١٠ ، أجد متوسط التغير للاقتران هـ (س) على الفترة ذاتها.

$$١٠ = \frac{(٣)٢ - (٧)٢}{٣ - ٧} = (س)٢ \text{ متوسط التغير للاقتران}$$

$$\frac{(٣)هـ - (٧)هـ}{٣ - ٧} = \frac{(س) \Delta هـ}{س \Delta}$$

$$\frac{(٤ + (٣)٢) - (٤ + (٧)٢)}{٣ - ٧} =$$

$$\left( \frac{(٣)٢ - (٧)٢}{٣ - ٧} \right) ٢ = \frac{(٣)٢ - (٧)٢}{٣ - ٧} =$$

$$٢٠ = ١٠ \times ٢ = (متوسط تغير الاقتران (س) على الفترة [٣،٧]) \times ٢ =$$



## تمارين ومسابقات (١-١): ص ٩

١) أجد متوسط التغير في كل من الإقتران الآتية عندما تتغير  $s$  من  $s_1$  إلى  $s_2$ .

أ)  $u(s) = 2s - 6$  ، عندما تتغير  $s$  من  $s_1 = 0$  إلى  $s_2 = 3$ .

$$\frac{u(s_2) - u(s_1)}{s_2 - s_1} = \frac{u(3) - u(0)}{3 - 0} = \frac{(2 \times 3 - 6) - (2 \times 0 - 6)}{3} = \frac{0 - (-6)}{3} = \frac{6}{3} = 2$$

ب)  $h(s) = s^2 + 2$  ، عندما تتغير  $s$  من  $s_1 = 2$  إلى  $s_2 = 5$ .

$$\frac{h(s_2) - h(s_1)}{s_2 - s_1} = \frac{h(5) - h(2)}{5 - 2} = \frac{(5^2 + 2) - (2^2 + 2)}{3} = \frac{27 - 6}{3} = \frac{21}{3} = 7$$

ج)  $l(s) = \sqrt{2s + 3}$  ، عندما تتغير  $s$  من  $s_1 = 1$  إلى  $s_2 = 6$ .

$$\frac{l(s_2) - l(s_1)}{s_2 - s_1} = \frac{l(6) - l(1)}{6 - 1} = \frac{(\sqrt{2 \times 6 + 3}) - (\sqrt{2 \times 1 + 3})}{5} = \frac{(\sqrt{15}) - (\sqrt{5})}{5} = \frac{(\sqrt{3} \times \sqrt{5}) - (\sqrt{5})}{5} = \frac{\sqrt{5}(\sqrt{3} - 1)}{5}$$

٢) يقطع المستقيم  $l$  منحنى الاقتران في النقطتين  $(1, 2)$  ،  $(4, 3)$  ، فإذا كان ميله يساوي ٣ ، أجد قيمة الثابت  $j$ .

$$3 = \frac{3 - 2}{4 - 1} = \frac{1}{3} = \frac{1}{3}$$

$$6 = 3 - j \Rightarrow j = 3 - 6 = -3$$

$$j = -3 = 3 - 6 = -3$$

٣) إذا كان متوسط تغير الاقتران  $u(s)$  في الفترة  $[2, 4]$  يساوي ٥ ، أجد متوسط تغير الاقتران

هـ  $h(s) = 3s - 2$  في تلك الفترة؟

متوسط تغير الاقتران  $u(s) = 0$

$$\frac{u(s_2) - u(s_1)}{s_2 - s_1} = \frac{u(4) - u(2)}{4 - 2} = 0$$

$$\frac{h(s_2) - h(s_1)}{s_2 - s_1} = \frac{h(4) - h(2)}{4 - 2} = \frac{(3 \times 4 - 2) - (3 \times 2 - 2)}{2} = \frac{10 - 4}{2} = 3$$

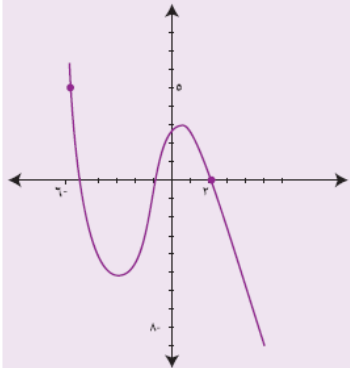
إذا كان متوسط التغير  $u(س) = ٥س - ٢$  في الفترة  $[٣،١]$  يساوي  $٩-$  ، أجد قيمة الثابت  $٥$ ؟

$$\begin{aligned} ٩- &= \frac{(١)u - (٣)u}{١-٣} = \frac{(١)u - (٣)u}{١س - ٣س} = \frac{\Delta v}{\Delta s} \\ \frac{(٥-٢) - (١٥-٢٩)}{٢} &= \frac{(١ \times ٥ - ٢(١)) - ((٣) \times ٥ - ٢(٣))}{٢} = \\ ١٨- &= ١٠-٢٨ \leftarrow ٩- = \frac{(٥+٢-١٥-٢٩)}{٢} \\ \boxed{١- = ٢} &\leftarrow ٨- = ٢٨ \end{aligned}$$

$٥$  إذا كان  $u(٣) = ٨$  ، وكان متوسط التغير في الاقتران  $u(س)$  عندما تتغير  $س$  من  $٣ = ١$  إلى  $٥ = ٢$  ، أجد  $u(٥)$  .

$$\begin{aligned} \text{الحل: } \frac{(١)u - (٢)u}{١س - ٢س} &= \frac{\Delta v}{\Delta s} \\ ٢- &= \frac{(٣)u - (٥)u}{٣-٥} \\ \text{وبالضرب التبادلي ينتج} \\ ٤- &= (٣)u - (٥)u \\ ٤- &= ٨- (٥)u \\ \boxed{٤ = (٥)u} \end{aligned}$$

٦) يمثل الشكل المجاور منحنى  $ق(س)$  على الفترة  $[-٢،٦]$  احسب ميل القاطع الذي يمر بنقطتين  $(٦-، ٥)$  ،  $(٢، ٠)$  و  $(٢، ٠)$  .



من الشكل المجاور  $ق(٦-) = ٥$  ،  $ق(٢) = ٠$  .

$$\begin{aligned} \text{ميل القاطع} \frac{(٦-)u - (٢)u}{٦- - ٢} &= \frac{\Delta v}{\Delta s} \\ \boxed{\frac{٥-}{٨}} &= \frac{٥-٠}{٨} = \end{aligned}$$





$٢ = (س) ، \leftarrow ٧ - س٢ = (س) ،$	$٠ = (س) ، \leftarrow ٤ = (س) ،$	} امثلة على القاعدة الاولى و الثانية
$٣ = (س) ، \leftarrow ٣ - س٣ = (س) ،$	$٠ = (س) ، \leftarrow ٩ = (س) ،$	
$٧ = (س) ، \leftarrow ٢ + س٧ = (س) ،$	$٠ = (س) ، \leftarrow ٧ = (س) ،$	
$\frac{١}{٤} = (س) ، \leftarrow ١ - س\frac{١}{٤} = (س) ،$	$٠ = (س) ، \leftarrow \frac{١}{٤} = (س) ،$	
$\pi = (س) ، \leftarrow ٣ + س\pi = (س) ،$	$٠ = (س) ، \leftarrow \pi = (س) ،$	
$\frac{٣}{٢} = (س) ، \leftarrow ٣\frac{٣}{٢} = (س) ،$	$٠ = (س) ، \leftarrow \frac{٣}{٢} = (س) ،$	

### القاعدة الثالثة : اذا كان $٧ = (س) = س^٧ \leftarrow ٧ = (س) = س^{-٧} \exists$

امثلة :- اذا كان  $٧ = (س) = س^٧ \leftarrow ٧ = (س) = س^{-٧}$   
 $٤ = س^٤ \leftarrow ٤ = (س) = س^{-٤}$

(١) اذا كان  $٧ = (س) = س^٧ \leftarrow ٧ = (س) = س^{-٧}$   
(٢) اذا كان  $٢٧ = (س) = س^{٢٧} \leftarrow ٢٧ = (س) = س^{-٢٧}$   
(٣) اذا كان  $٣ = (س) = س^٣ \leftarrow ٣ = (س) = س^{-٣}$   
(٤) اذا كان  $٥ = (س) = س^٥ \leftarrow ٥ = (س) = س^{-٥}$   
(٥) اذا كان  $١ = (س) = س^١ \leftarrow ١ = (س) = س^{-١}$   
(٦) اذا كان  $\frac{١}{٢} = (س) = س^{\frac{١}{٢}} \leftarrow \frac{١}{٢} = (س) = س^{-\frac{١}{٢}}$   
(٧) اذا كان  $\frac{٣}{٥} = (س) = س^{\frac{٣}{٥}} \leftarrow \frac{٣}{٥} = (س) = س^{-\frac{٣}{٥}}$

البسط - المقام  
المقام

### قائمة الاعداء:

$$(١) \quad ٧ = (س) = س^{-٧}$$

$$(٢) \quad \sqrt[٧]{س} = س^{\frac{١}{٧}}$$

اذا وجد احد الاعداء بالمسألة نقوم بما يلي:

- (١) تهيئة
- (٢) اشتقاق
- (٣) تبسيط

يجب ان لا تحتوي الاجابة على قوى سالبة او كسرية وان وجدت نرجعها الى اصلها :

القوى السالبة  $\leftarrow$  المقام  $\leftarrow$  جذر  
القوى الكسرية  $\leftarrow$  الجذر  $\leftarrow$  بالمقام

$$(٨) \quad ٧ = (س) = س^{\frac{١}{٧}} \leftarrow ٧ = (س) = س^{-\frac{١}{٧}}$$

$$\leftarrow ٧ = (س) = س^{-٧} = س^{\frac{٧}{٨}} \leftarrow ٧ = (س) = س^{-\frac{٧}{٨}}$$

$$(٩) \quad ٥ = (س) = س^{\frac{١}{٥}} \leftarrow ٥ = (س) = س^{-\frac{١}{٥}}$$

$$\leftarrow ٥ = (س) = س^{-٥} = س^{\frac{٥}{٦}} \leftarrow ٥ = (س) = س^{-\frac{٥}{٦}}$$

$$\text{وه (س) = } \frac{1}{3} = \text{س}^{-3}$$

$$\leftarrow \text{وه (س) = } \text{س}^{-3} = \frac{1}{\text{س}^3} \text{ إذا كان } \frac{1}{\text{س}^3}$$

## سلم النجاح

لا يمكنك النجاح في  
عملك إذا لم يكن  
لديك القناعة بأنه  
أعظم عمل في العالم



$$\text{وه (س) = } \sqrt[2]{\text{س}} = \text{س}^{\frac{1}{2}}$$

$$\leftarrow \text{وه (س) = } \text{س}^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt[2]{\text{س}}} \text{ إذا كان } \frac{1}{\sqrt[2]{\text{س}}}$$

$$\text{وه (س) = } \sqrt[3]{\text{س}} = \text{س}^{\frac{1}{3}}$$

$$\leftarrow \text{وه (س) = } \text{س}^{\frac{1}{3}} = \frac{1}{\sqrt[3]{\text{س}}} \text{ إذا كان } \frac{1}{\sqrt[3]{\text{س}}}$$

$$\text{وه (س) = } \frac{1}{\text{س}^{\frac{2}{5}}} = \frac{1}{\sqrt[5]{\text{س}^2}}$$

$$\leftarrow \text{وه (س) = } \text{س}^{\frac{2}{5}} = \frac{1}{\sqrt[5]{\text{س}^2}}$$

مثال (٢) : أجد مشتقة الاقتران  $u = \text{س}^{\frac{2}{5}}$  عند النقطة  $(-2, -\frac{32}{5})$ .

$$u = \text{س}^{\frac{2}{5}} = \text{س}^{0.4}$$

$$u = \text{س}^{\frac{2}{5}} = \text{س}^{0.4}$$

$$\therefore u' = (0.4) \text{س}^{-0.4} = (0.4) \text{س}^{-\frac{2}{5}}$$

$$= 0.4 \times 5 = 2$$

نشاط (٢) : إذا كان  $u = \sqrt[2]{\text{س}}$  أجد  $u'(-8)$ .

$$u = \sqrt[2]{\text{س}} = \text{س}^{\frac{1}{2}} \leftarrow u = \text{س}^{\frac{1}{2}} \text{ (لماذا؟)}$$

$$u' = \frac{1}{2} \text{س}^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{\text{س}}}$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{-8}} = \frac{1}{2\sqrt{8}i} = \frac{1}{2 \times 2\sqrt{2}i} = \frac{1}{4\sqrt{2}i}$$

$$\leftarrow u' = \frac{1}{4\sqrt{2}i} = \frac{1}{4\sqrt{2}} \times \frac{1}{i} = \frac{1}{4\sqrt{2}} \times \frac{1}{i}$$

$$= \frac{1}{4\sqrt{2}} \times \frac{1}{i} = \frac{1}{4\sqrt{2}i}$$

## القاعدة الرابعة :

إذا كان  $h$  ( $s$ ) اقتراناً قابلاً للاشتقاق ، وكان  $a$  عدداً حقيقياً ،  $a \neq 0$  ، فإن الاقتران  $h \cdot a = (s)$  هو اقتران قابل للاشتقاق ، وتكون  $h \cdot a = (s)$  .

$$\text{مثال: (١) إذا كان } h = (s) \text{ و } a = 3 \text{ ، فإن } h \cdot a = (s) \cdot 3 = 3s \text{ .}$$

$$\text{(٢) } h = (s) \text{ و } a = 2 \text{ ، فإن } h \cdot a = (s) \cdot 2 = 2s \text{ .}$$

$$\text{(٣) } h = (s) \text{ و } a = \frac{1}{3} \text{ ، فإن } h \cdot a = (s) \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{3}s \text{ .}$$

$$\text{(٤) } h = (s) \text{ و } a = 1 \text{ ، فإن } h \cdot a = (s) \cdot 1 = s \text{ .}$$

$$3 = 1 \times 3 =$$

$$s = 1 \cdot s =$$



$$h = (s) \text{ ، } a = 1 \text{ ، فإن } h \cdot a = (s) \cdot 1 = s \text{ .}$$

$$\text{(٥) } h = (s) \text{ و } a = 4 \text{ ، فإن } h \cdot a = (s) \cdot 4 = 4s \text{ .}$$

$$\text{(٦) } h = (s) \text{ و } a = 1 \text{ ، فإن } h \cdot a = (s) \cdot 1 = s \text{ .}$$

$$\text{(٧) } h = (s) \text{ و } a = \frac{3}{5} \text{ ، فإن } h \cdot a = (s) \cdot \frac{3}{5} = \frac{3}{5}s \text{ .}$$

مثال (٣) : إذا كان  $h = (s) \cdot 5 = (s)$  ، وكان  $h = (s) = 1$  ، فما قيمة  $h = (s)$  ؟

$$h = (s) \cdot 5 = (s)$$

$$1 \cdot 5 = (s)$$

$$5 =$$



## تمارين ومسائل (١-٢) : ص ١٣

(١) أجد مشتقة كل من الإقترانات الآتية عند قيمة س المقابلة لكل منها :

$\begin{aligned} \text{ب) } \text{ص} = 3 \text{ ، } \text{س} = 12 \\ \frac{\text{ص}}{\text{س}} = \frac{3}{12} \leftarrow \frac{\text{ص}}{\text{س}} = \frac{3}{12} \end{aligned}$	$\begin{aligned} \text{أ) } \text{ن}(\text{س}) = 2 - 5\text{س} \text{ ، } \text{س} = 100 \\ \bar{\text{ن}}(\text{س}) = 0 \leftarrow \bar{\text{ن}}(100) = 0 \end{aligned}$
$\begin{aligned} \text{د) } \text{ن}(\text{س}) = \sqrt[3]{\text{س}} \text{ ، } \text{س} = 1 \\ \bar{\text{ن}}(\text{س}) = \frac{5}{3} \text{ ، } \bar{\text{ن}}(1) = \frac{5}{3} \leftarrow \bar{\text{ن}}(1) = \frac{5}{3} \end{aligned}$	$\begin{aligned} \text{ج) } \text{ك}(\text{س}) = \text{س} \text{ ، } \text{س} = 7 \\ \bar{\text{ك}}(\text{س}) = 1 \leftarrow \bar{\text{ك}}(7) = 1 \end{aligned}$
	$\begin{aligned} \text{هـ) } \text{ن}(\text{س}) = \text{س}^3 \text{ ، } \text{س} = 1 \\ \bar{\text{ن}}(\text{س}) = 3 \text{ ، } \bar{\text{ن}}(1) = 3 \leftarrow \bar{\text{ن}}(1) = 3 \end{aligned}$

(٢) أجد  $\bar{\text{ن}}(\text{س})$  لكل من الإقترانات الآتية :

$$\text{أ) } \text{ن}(\text{س}) = \frac{64}{\text{س}}$$

$$\bar{\text{ن}}(\text{س}) = \text{س} \times \frac{64}{\text{س}}$$

$$= \frac{64}{\text{س}}$$

$$\text{ب) } \text{ن}(\text{س}) = (3, 0, 0)$$

$$\bar{\text{ن}}(\text{س}) = 0$$

$$\text{ج) } \text{ن}(\text{س}) = 5\text{س}^4$$

$$\bar{\text{ن}}(\text{س}) = 5 \times 4\text{س}^3$$

$$= 20\text{س}^3$$

(إكمال ٢٠١٩) إذا كان  $\text{ص} = 5\text{س}^4$  فما قيمة  $\frac{\text{ص}}{\text{س}}$  |  $\text{س} = 1$

(٣) إذا كان  $\text{ص} = 6\text{ن}(\text{س})$  ، وكان  $\bar{\text{ن}}(5) = 7$  ، أجد قيمة  $\frac{\text{ص}}{\text{س}}$  عند  $\text{س} = 5$  ؟

$$\frac{\text{ص}}{\text{س}} = \frac{6\text{ن}(\text{س})}{\text{س}} \leftarrow \frac{\text{ص}}{\text{س}} = \frac{6\text{ن}(\text{س})}{\text{س}}$$

$$\boxed{42} = 7 \times 6$$

(٤) إذا كان  $\text{ن}(\text{س}) = 3\text{س}^2$  ، وكان  $\bar{\text{ن}}(2) = 60$  ، فما قيمة الثابت ؟ سؤال لجنة ٢٠١٩

$$\bar{\text{ن}}(\text{س}) = 3\text{س}^2$$

$$\bar{\text{ن}}(2) = 3(2)^2 = 60$$

$$\boxed{5} = 112 \leftarrow 60 = 112$$



## (٣-١) الدرس الثالث: قواعد الاشتقاق:

نشاط (١) : اعتاد الفلسطيني منذ القدم تجميع مياه الإمطار في فصل الشتاء عن أسطح المنازل في بئر يلحقه ببيته ، وتشكل هذه العملية جزءاً من الحصاد المائي الذي يقوم به الفلسطيني للتغلب على مشكلة نقص المياه في فصل الصيف.

يمثل الشكل المجاور سطح احد المنازل.



مساحة سطح المبنى =  $(س^٢) + (_____)$  كمية المياه المتجمعة  $(س^٢)$  تعطى بالعلاقة:

مساحة سطح المبنى  $(س^٢) \times$  معدل سقوط الإمطار العام (م)  $\times ٠,٨$

إذا كان معدل سقوط الإمطار عام ٢٠١٦ يساوي ٠,٤٠٤ ، فإن كمية المياه المتجمعة عن سطح البيت = \_\_\_\_\_ .

قاعدة (١): إذا كان  $س(س)$  و  $ه(س)$  اقترانين قابلين للاشتقاق ، وكان  $ه(س) = س(س) \pm ه(س)$  فإن:

الاقتران  $ه(س)$  يكون قابل للاشتقاق وتكون :  $ه'(س) = س'(س) \pm ه'(س)$

وبلغة أخرى  $ه'(س) = (س \pm ه)'(س)$

كيف يمكن اشتقاق هذه العلاقة؟

مثال (١) : إذا كان  $س(س) = ٥س^٢$  ، وكان  $ه(س) = ٤س^٣$  ، أجد :

(أ)  $ه'(س) = (س + ه)'(س)$  (ب)  $ه'(س) = (س - ه)'(س)$

(أ)  $س'(س) = ١٠س$  . كما أن :  $ه'(س) = ١٢س^٢$

بحسب القاعدة :  $ه'(س) = (س + ه)'(س) = س'(س) + ه'(س)$

ومنها :  $ه'(س) = (س + ه)'(س) = ١٠س + ١٢س^٢$  (لماذا؟)

(ب)  $س'(س) = ١٠$  ،  $ه'(س) = ١٢س^٢$

$ه'(س) = (س - ه)'(س) = س'(س) - ه'(س)$

إذن :  $ه'(س) = (س - ه)'(س) = س'(س) - ه'(س)$

$ه'(س) = (س - ه)'(س) = ١٢س^٢ - ١٠ = ١٢س^٢ - ١٠$

امثلة اضافية :

(١) إذا كان

$ه(س) = ٤س^٣ + ٢س^٢$

$ه'(س) = ١٢س^٢ + ٤س$

(٢) إذا كان

$ه(س) = ٧س^٢ + ٢س + ٥$

$ه'(س) = ١٤س + ٢$

نشاط (٢) :

إذا كان  $س(س) = ٦س^٢ + ٥س - ٧$  ،

فما قيمة  $س'(٣)$  ؟

الحل :

$س'(س) = ١٢س + ٥$  (لماذا؟)

$س'(٣) = _____$

$$\text{وه (س) } = 6s^3 - 5s^2 + 2\sqrt{2}$$

$$\text{وه (س) } = 8s^2 - 10s + 0 = 8s^2 - 10s \quad \Leftarrow$$

(٣) اذا كان

$$\text{وه (س) } = \sqrt{2} = \frac{1}{2}s \quad \Leftarrow$$

$$\text{وه (س) } = \frac{1}{4}s = \frac{1}{2} = \frac{1}{2s} \quad \Leftarrow$$

(٤) اذا كان

ملاحظة : يمكن حفظها حفظ

اذا كان

$$\text{وه (س) } = \sqrt{2} \quad \Leftarrow \quad \text{وه (س) } = \frac{1}{2s}$$

مثال (لجنة ٢٠٠٧) : اذا كان  $\text{وه (س) } = \sqrt{2} \quad \Leftarrow \quad \text{وه (س) } = \frac{1}{4}$ 

$$\text{الحل } \quad \text{وه (س) } = \frac{1}{2\sqrt{2}}$$

$$\Leftarrow \quad \text{وه (س) } = \frac{1}{4} = \frac{1}{2 \times 2} = \frac{1}{2\sqrt{2}}$$

نشاط (٣) :

اذا كان  $u = (s) = 2s^2 - (s) + 7$  حيث  
 $u = (s) = 3s^2 + 2$  ،  $u = (s) = 2s^2 + 3$   
 فإن :

$$3 = (s) = 2s^2 + 3 \quad \Leftarrow$$

$$u = (s) = 2s^2 - (s) + 7$$

$$\text{إذن : } u = (2) = \underline{\hspace{2cm}}$$

مثال شامل: اوجد المشتقة الاولى للإقتارات الآتية " اوجد  $\frac{d}{ds} \frac{2}{s}$  في كل مما يلي "

$$\text{وه (س) } = \frac{1}{3}s^3 + \frac{4}{s} + s^3 - 2$$

$$\Leftarrow \quad \text{وه (س) } = 2s^2 + 3s - 4$$

$$= 2s^2 - 3s + \frac{3}{4}$$

$$\text{وه (س) } = \sqrt{2} + \frac{5}{2}s^2 - 3s$$

$$\Leftarrow \quad \text{وه (س) } = \frac{5}{2}s^2 + \frac{3}{2}s + 4$$

$$\text{وه (س) } = \frac{1}{4}s^3 + \sqrt{2} + s^2 + \frac{3}{7}s$$

$$\Leftarrow \quad \text{وه (س) } = -6s^2 + \frac{3}{7}s + \frac{3}{4\sqrt{2}}$$

رؤيتك السلبية لنفسك سبب فشلك في الحياة  
 و النظرة الإيجابية تدفعك دائماً للنجاح



الهدف أو الحلم الذي  
تسعى لتحقيقه يجب أن  
يصبح هو حياتك وليس  
أهراً ثانوياً تعمل عليه  
في وقت فراغك.

FB.com/MeshFar2a



اوجد  $\bar{ق}$  (٢) علما بان  $\bar{ق} = (س) = س^2 + س + ١$ .

$$\begin{aligned} \text{الحل } \bar{ق} = (س) &= ١ + س^2 \\ \bar{ق} = (٢) &= ١ + ٢ \times ٢ = ٥ \end{aligned}$$

اكمل (٢٠٠٧) اذا كان  $\bar{ق} = (س) = س^3$  فان  $\bar{ق} = (٢) =$

$$\begin{aligned} \text{الحل: } \bar{ق} = (س) &= س^3 \\ \bar{ق} = (٢) &= (٢)^3 = ٢ \times ٢ \times ٢ = ٨ \end{aligned}$$

اكمل (٢٠٠٨) اذا كانت  $ص = ٢س^2 - ٥س + ١$  فان  $\frac{ص}{س} \Big|_{س=٢} =$

$$\frac{ص}{س} = ٥ - س$$

$$\frac{ص}{س} \Big|_{س=٢} = ٥ - ٢ \times ٤ = ٣$$

لجنة (٢٠٠٩) اذا كان  $\bar{ق} = (س) = ٣ه + (س) + س$  ،  $\bar{ه} = (٢) = ١ -$  ،  $\bar{ه} = (٢) = ٣ =$  فان  $\bar{ق} = (٢) =$

$$\bar{ق} = (س) = ٣\bar{ه} + (س) + ١$$

$$\bar{ق} = (٢) = ٣\bar{ه} + (٢) + ١$$

$$\bar{ق} = (٢) = ١ + ٣ - = ١ + ١ \times ٣ = ٥$$

لجنة (٢٠١٠) اذا كانت  $\bar{ه} = (س) = س + \bar{ق} + (س)$  ،  $\bar{ه} = (٢) = ٤ =$  فان  $\bar{ق} = (٢) =$

$$\bar{ه} = (س) = ١ + \bar{ق} + (س)$$

$$\bar{ه} = (٢) = ١ + \bar{ق} + (٢)$$

$$\bar{ق} = (٢) = ٤ - ١ - (٢) = ١$$



**القاعدة الثانية : مشتقة حاصل ضرب اقترانين :**

$$\begin{array}{cc} \text{الثاني} & \text{الاول} \\ \text{هـ (س)} & \text{و (س)} \\ + & \\ \text{هـ (س)} & \text{و (س)} \\ \hline \text{هـ (س)} & \text{و (س)} \end{array}$$

إذا كان  $و (س)$  ،  $هـ (س)$  اقترانين قابلين للاشتقاق عند  $س = أ$  ، فإن :

$$(و \times هـ)'(أ) = و'(أ) \times هـ(أ) + و(أ) \times هـ'(أ)$$

وبالكلمات : مشتقة حاصل ضرب اقترانين = الاقتران الأول  $\times$  مشتقة الاقتران الثاني + الاقتران الثاني  $\times$  مشتقة الاقتران الأول

مثال (٢) : اعتمد المعطيات في الجدول المجاور لإيجاد  $(و \times هـ)'(٢-)$

$و'(٢-)$	$هـ'(٢-)$	$و(٢-)$	$هـ(٢-)$
٥-	١-	٤-	٧

مشتقة حاصل ضرب اقترانين = الاقتران الأول  $\times$  مشتقة الاقتران الثاني + الاقتران الثاني  $\times$  مشتقة الاقتران الأول

$$\begin{aligned} (و \times هـ)'(٢-) &= و'(٢-) \times هـ(٢-) + و(٢-) \times هـ'(٢-) \\ &= ٤- \times ١- + ٧ \times ٥- \\ &= ٣٩ = \end{aligned}$$

نشاط (٤) : إذا كان  $و (س) = (٣س^٢ - ٥س - ٧)(س٤ - ٧)$  ، فإن  $و'(٢)$  تساوي:

$و'(س) =$  الاقتران الأول  $\times$  مشتقة الاقتران الثاني + الاقتران الثاني  $\times$  مشتقة الاقتران الأول

$$\begin{array}{cc} (٣س^٢ - ٥س - ٧) & (س٤ - ٧) \\ \swarrow & \searrow \\ ٤- & ٥- \end{array}$$

$$\begin{aligned} (و \times هـ)'(٢) &= (٣س^٢ - ٥س - ٧)'(س٤ - ٧) + (٣س^٢ - ٥س - ٧)(س٤ - ٧)' \\ &= (٢) \times (٤-٥) + (٣س^٢ - ٥س - ٧) \times ٤- \\ &= (٢) \times (٤-٥) + (٣س^٢ - ٥س - ٧) \times ٤- \end{aligned}$$

$$\begin{array}{cc} \text{الثاني} & \text{الاول} \\ (٢-٣س) & (٣+٢س) \\ ٣ & ٢ \end{array}$$

$$و'(س) = (٣+٢س)(٢-٣س) \text{ اوجد } و'(٢)$$

$و'(س) =$  الاول  $\times$  م. الثاني + الثاني  $\times$  م. الاول

$$و'(س) = (٢) \times (٢-٣س) + (٣+٢س) \times ٣$$

$$و'(٢) = (٢) \times (٢-٢ \times ٣) + (٣+٢ \times ٢) \times ٣$$

$$\boxed{٢٩} = ٨ + ٢١ = (٢ \times ٤) + (٣ \times ٧) =$$

لجنة (٢٠١٦) : إذا كانت  $ص = (١-٣س)^٢ \leftarrow \frac{ص}{س} = ٢-٣س =$  فإن

**القاعدة الثالثة : (مشتقة حاصل قسمة اقترايين)**

قاعدة (٣) : إذا كان  $u$  و  $v$  (س) ، هـ (س) اقترايين قابلين للاشتقاق ، وكان هـ (س)  $\neq 0$  ، فإن :

$$: \text{وبالكلمات} \frac{((u) \times (v))' - ((v) \times (u))'}{((u))^2} = \left( \frac{u}{v} \right)'$$

المقام	البسط
هـ (س)	م (س)
هـ (س)	م (س)

$$\frac{(\text{المقام} \times \text{البسط})' - (\text{البسط} \times \text{المقام})'}{(\text{المقام})^2} = \left( \frac{u}{v} \right)'$$

مثال (٣) : إذا كان  $u = (s)$  ،  $v = \left( \frac{s}{s} \right)$  ، وكان :

$$u = (1) ، v = (1) ، u' = (1) ، v' = (1) ، \text{أجد } \left( \frac{u}{v} \right)'$$

الحل :

$$\left( \frac{u}{v} \right)' = \frac{((u) \times (v))' - ((v) \times (u))'}{((u))^2}$$

$$\left( \frac{1}{1} \right)' = \frac{(1) \times (1)' - ((1) \times (1))'}{(1)^2}$$

$$\left( \frac{1}{1} \right)' = \frac{1 - (1 \times 1)'}{1} = \frac{1 - 0}{1} = 1$$

مثال (٤) : إذا كان  $u = (s)$  ،  $v = \frac{s^2 - 3}{s - 2}$  ،  $s \neq 2$  ، تحقق أن  $\left( \frac{u}{v} \right)' = \frac{9}{8}$  .

$$\left( \frac{u}{v} \right)' = \frac{(\text{المقام} \times \text{البسط})' - (\text{البسط} \times \text{المقام})'}{(\text{المقام})^2}$$

$$\left( \frac{s}{s^2 - 3} \right)' = \frac{(s^2 - 3)'(s) - (s^2 - 3)(s)'}{(s^2 - 3)^2}$$

$$= \frac{(2)(s) - (s^2 - 3)(1)'}{(s^2 - 3)^2}$$

$$= \frac{2s - (s^2 - 3)}{(s^2 - 3)^2}$$

المقام	المقام
٢ - ٥ - ٣س	٣س + ٢
٢	٣

بسط

\*\* جد المشتقة الاولى للاقتران  $\frac{(٢+٣س)}{(٥-٣س)}$  و  $٥ \neq ٣س$

$$\frac{(المقام \times م. البسط) - (البسط \times م. المقام)}{(المقام)^2} = \frac{(٢(٢+٣س) - ٣(٥-٣س))}{٢(٥-٣س)}$$

$$\frac{٢ \times (٢+٣س) - ٣ \times (٥-٣س)}{٢(٥-٣س)} = \frac{(٤+٦س) - (١٥-٩س)}{٢(٥-٣س)}$$

$$\frac{(٤+٦س) - (١٥-٩س)}{٢(٥-٣س)} =$$

$$\frac{(١٩-١١س)}{٢(٥-٣س)} = \frac{(٤-١٥-٦س+٩س)}{٢(٥-٣س)} =$$

المقام	المقام
٤ + ٢س	١ - ٢س
٢س	٢

بسط

مثال (٢) جد المشتقة الاولى للاقتران  $\frac{(١-٢س)}{(٤+٢س)}$  و  $٤ \neq ٢س$  عندما  $٤ \neq ٢س$ .

$$\frac{(المقام \times م. البسط) - (البسط \times م. المقام)}{(المقام)^2} = \frac{(٢(١-٢س) - ٢(٤+٢س))}{٢(٤+٢س)}$$

$$\frac{٢ \times (١-٢س) - ٢ \times (٤+٢س)}{٢(٤+٢س)} = \frac{(٢-٤س) - (٨+٤س)}{٢(٤+٢س)}$$

$$\frac{٠ \times ٢ \times (١-٠ \times ٢) - ٢ \times (٤+٠)}{٢(٤+٠)} = \frac{(٠-٤) - (٨+٠)}{٢(٤)}$$

$$\frac{١}{٢} = \frac{٨}{١٦} = \frac{(٠ \times ١) - (٢ \times ٤)}{٢(٤)}$$



## تمارين ومسائل (١-٣) ص ١٩

(٥) هـ	(٥) هـ	(٥) ح	(٥) ح
١-	٣	٢	٩

(١) بالاعتماد على البيانات في الجدول المجاور أحسب ما يأتي :

$$(٥) هـ ٤ - (٥) ح ٣ = (٥) هـ (٤ - ح ٣) (ب)$$

$$\boxed{١٠} = ٤ + ٦ = (١-)٤ - (٢)٣$$

$$(٥) ح (٥ + ح ٢) (أ)$$

$$. (٥) ح ٢ + (٥) ح ٥$$

$$٠ = (١-)٢ + ٢ =$$

$$(٥) ح (٥ \times ح) (د)$$

$$(٥) ح ٥ (٥) ح + (٥) ح ٥ (٥) ح$$

$$٢ \times ٣ + ١ - \times ٩ =$$

$$\boxed{٣-} = ٦ + ٩ - =$$

$$(ج) \left(\frac{ح}{هـ}\right) (٥)$$

$$\left(\frac{(٥) ح (٥) ح - (٥) ح (٥) ح}{((٥) ح)}\right) =$$

$$\left(\frac{(٩-) - (٦)}{٩}\right) = \left(\frac{(١-\times ٩) - (٢ \times ٣)}{((٣))}\right) =$$

$$\boxed{\frac{٥}{٣}} = \frac{١٥}{٩} = \Leftarrow$$

(٢) إذا كان  $(٥) ح = (٥) ح (٧ + ٢ س)$  ،  $(٥) هـ = (٥) هـ (٣ - ٢ س)$  ، أجد :

$$٣- = (٥) ح (س) هـ ، ٢ = (٥) ح (س) هـ$$

$$\frac{(٥) ح (س) هـ - (٥) ح (س) هـ}{((٥) ح)} = (ج) \left(\frac{ح}{هـ}\right) (١)$$

$$\frac{(٣- \times (٧ + ٢ س) - ٢ \times (٣ - ٢ س))}{((٥) ح)}$$

$$\frac{٢١ + ٤ س + ٢ س ٣ - ٢١ + ٢ س ٣ + ٢ س ٦ - ٤ س}{((٥) ح)}$$

$$(١) ح (٥ + ح) (أ)$$

$$((١) ح هـ + (١) ح ح)$$

$$\boxed{١-} = ٣ - + ٢$$

(أكمال ٢٠١٩) إذا كان  $(٥) ح = (٥) ح (٨ + ٢ س)$  ،  $(٥) هـ = (٥) هـ (٢ - ٢ س)$  ، أجد :  $\frac{(٣) ح}{(٣) هـ}$

$$(ج) \frac{٢-}{٣} = \frac{٢ س}{٣-} = \frac{(٥) ح (س) هـ}{(٥) ح (س) هـ}$$

$$(هـ) ح (٢) هـ \times (٢) ح (٢) هـ$$

$$(٢ \times ٣ - ٢) \times (٢ \times ٢) =$$

$$\boxed{١٦-} = ٤ - \times ٤$$

$$(د) ح (٥ \times ح) (٥)$$

$$((٢) ح \times (٢) هـ + (٢) ح هـ \times (٢) ح)$$

$$(٤ \times ٤-) + (٣ - \times ١١) =$$

$$\boxed{٤٩-} = ١٦ - \times ٣٣ -$$

(لجنة ٢٠١٨) إذا كان  $(٥) ح = (٥) ح (٨ + ٢ س)$  ،  $(٥) هـ = (٥) هـ (٢ - ٢ س)$  ، اقترانين قابلين للاشتقاق بحيث

(٥) هـ	(٥) هـ	(٥) ح	(٥) ح
٣	٢-	٣-	٦

$$جد \left(\frac{ح}{هـ}\right) (٥)$$

$$(و) س (٢) ح \times (٥) ح (٥) ح (٢-)$$

$$(س ٢ \times (٥) ح (س) ح + (٥) ح (س) ح \times س ٢)$$

$$((٢-) ٢ \times (٢-) ح + (٢-) ح \times (٢-) ٢)$$

$$\boxed{٦٠-} = (٤ - \times ١١ + ٤ - \times ٤)$$

٣) إذا كان  $(٧ \times ٥) = ١٢$  ،  $٣ = (٧) \cup$  ،  $٦ = (٧) \setminus ه$  ،  $٣ = (٧) \setminus ه$  ، أجد  $ه$  (٧) .

٢٠١٩) إذا كان  $٢ = (٧) ه$  ،  $٥ = (٧) \cup$  ، أجد  $ه$  (٧) .

$١ = (٧) \setminus ه$  ،  $٣ = (٧) \cup$  ، أجد  $ه$  (٧) .

$٢ = (٧) \setminus ه$  ،  $٣ = (٧) \cup$  ، أجد  $ه$  (٧) .

$$١٢ = ((٧) \setminus ٥) \times (٧) ه + (٧) \setminus ه \times (٧) \cup = (٧) \setminus (٧ \times ٥)$$

$$١٢ = (٦ \times (٧) ه) + (٣ \times ٣) =$$

$$١٢ = (٧) ه٦ + ٩ =$$

$$\frac{١}{٢} = (٧) ه \leftarrow ٣ = (٧) ه٦ =$$

٤) إذا كان  $(٧ \div ٥) = ٣$  ،  $٥ = (٩) \cup$  ،  $١٢ = (٩) \setminus ه$  ،  $٣ = (٩) \setminus ه$  ، أجد  $ه$  (٩) .

$$\frac{(٩) \setminus ه \times (٩) \cup - (٩) \setminus ه \times (٩) ه}{(٩) ه} = (٩) \setminus \left(\frac{٥}{٧}\right)$$

$$٣ = \frac{(٥ \times (٩) ه) - (١٢ - ٣ \times -)}{(٩) ه}$$

$$٩ \times ٣ = (٩) ه٥ - ٣٦$$

$$٢٧ = (٩) ه٥ - ٣٦$$

$$٢٧ - ٣٦ = (٩) ه٥$$

$$١١ = (٩) ه٥$$

$$\frac{٩}{٥} = (٩) ه$$

٥) إذا كان  $(س) = ٥ - ٦س + ٢س$  ، وكان  $٥ = (٣) \cup$  ، فما قيمة الثابت أ ؟

٢٠١٨) إكمال إذا كان  $(س) = (س + ٢)$  ،  $٥ = ع$  ،

وكان  $(٢) \cup = (١)$  ، فما قيمة / قيم الثابت ؟

$$٦ + ٢س = (س) \cup \leftarrow ٦ + ٢س = (س) \cup$$

$$٥ = ٦ + (٣)٢ = (٣) \cup$$

$$\frac{١}{٦} = ٢ \leftarrow ١ = ٦ + ٢٦$$

٦) إذا كان  $(س) = ٢س - ٢س + ٣س$  ، وكان  $٨ = (١) \setminus ه$  ، أجد قيمة الثابت أ ؟

$$(١٢ - ٢س) (٢ - ٢س) + ٢س \times (٣ + ٢س - ٢س) = (١) \setminus ه$$

$$٨ = (١٢ - ١ \times ٢) (٢ - ٢١) + ١ \times ٢ \times (٣ + ١ \times ٢ - ٢١) = (١) \setminus ه$$

$$٨ = (١٢ - ٢) (١ -) + ٢ \times (٢٢ - ٤)$$

$$٨ = ١٢ + ٢ - ٢٢ - ٨$$

$$٨ = ١٢ - ٦$$

$$\frac{١}{٦} = ٢ \leftarrow ١ = ١٢ - ٦$$

٧) إذا كان  $(س) = \frac{٥ - س}{٤ - ٦}$  ، وكان  $\frac{١}{٢} = (١) \setminus ه$  ، فما قيمة الثابت أ ؟

$$\frac{(٢٠ + ١٤س) - (١٤ - ١٦س)}{(٤ - ٦)س} = \frac{(٤ - ٥س) - ١ \times (٤ - ٦)}{(٤ - ٦)س} = (س) \setminus ه$$

$$\frac{١}{٢} = \frac{(٢٠ + ١٤س) - (١٤ - ١٦س)}{(٤ - ٦)س} = (١) \setminus ه$$

$$٤ - ٥س = ٤٠ - ١١٢ \leftarrow \frac{١}{٢} = \frac{(٢٠ - ١٦س)}{٤}$$

$$\frac{٣}{١٢} = ١ \leftarrow \frac{٣٦}{١٢} = \frac{١٢}{١٢}$$



📖 اسئلة سنوات سابقة على موضوع قواعد الاشتقاق .

(اكمال ٢٠٠٧): اذا كان  $هـ(٢) = ٤$  ،  $هـ(س) = س^٢ + ٢$  ،  $هـ(هـ \times هـ) = (٢)$

$$\begin{aligned} (هـ \times هـ) (س) &= هـ(س) \times (س) + (س^٢ + ٢) \times هـ(س) \\ (هـ \times هـ) (٢) &= هـ(٢) \times (٢) + ٢ \times ٢ \times هـ(٢) \\ (٤ \times ٦) + (٤ \times ٣) &= (٤ \times ٦) + (٤ \times ٣) = \\ \boxed{36} &= (٢٤) + (١٢) = \end{aligned}$$

(لجنة ٢٠١٧) اذا كان  $هـ(٣) = ٢$  ،  $هـ(٣) = ٣$  او كان  $هـ(س) = (س) \times هـ(س) + س^٢$  فإن قيمة  $هـ(٣)$  =

(اكمال ٢٠٠٧): اذا كان  $هـ(س) = \frac{١}{س+٢}$  ،  $هـ(٢) = ١$  فان قيمة  $هـ(١)$  تساوي.

(لجنة ٢٠١٧) اذا كان  $هـ(س) \times هـ(س) = س$  حيث  $هـ(س) = (س)$  قابلين للاشتقاق  $هـ(س) \neq هـ(س) \neq هـ(س)$  وكان  $هـ(٣) = ٢$  ،  $هـ(٣) = ٣$  جد  $هـ(٣)$

$$\begin{aligned} هـ(س) &= \frac{١-٠}{٢(٢+س)} \\ هـ(٢) &= \frac{١-٠}{٢(٢+٢)} = ١ \\ ١٦ = ١- \leftarrow \frac{١}{١} = \frac{١-}{١٦} \\ \boxed{١٦- = ١} &\leftarrow \end{aligned}$$

(اكمال ٢٠١٩) اذا كان  $هـ(س) \times ل(س) = ل(س)$  وكان  $هـ(٣) = ٢$  ،  $هـ(٣) = ٣$  فما قيمة  $هـ(٣)$

لجنة : اذا كان  $هـ(س) = \sqrt{٢س} - س^٢ \times هـ(س)$  فجد  $هـ(١)$  علما بان  $هـ(١) = ٢$  ،  $هـ(١) = ٣$

$$هـ(س) = \sqrt{٢س} - س^٢ \times هـ(س) + (س) \times هـ(س) \times (س)$$

$$هـ(١) = \sqrt{٢} - ١ \times ١ \times هـ(١) + (١) \times هـ(١) \times (١) = (١ \times ٢ + ٣) - ١ = ١$$

$$\boxed{١} = ١ - ١ \leftarrow$$

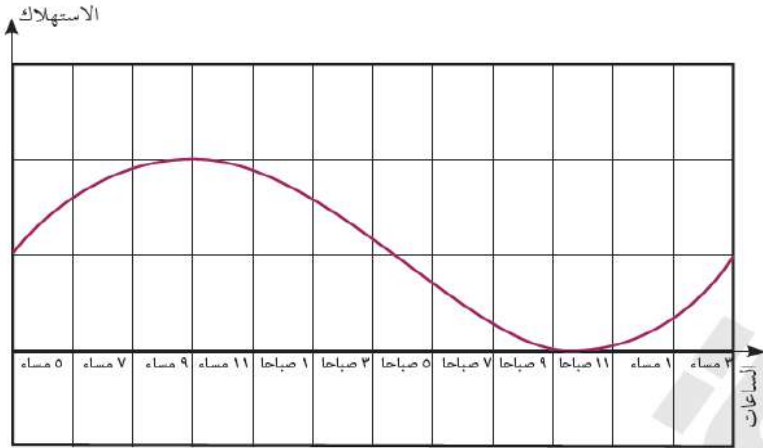
(٢٠١٨) اذا كان  $هـ(س) \times هـ(س) = س$  حيث  $هـ(س) = (س)$  قابلين للاشتقاق  $هـ(س) \neq هـ(س) \neq هـ(س)$  جد  $هـ(٣)$  علما بان

$$هـ(٣) = ٦ ، هـ(٣) = ٤$$



**(٤-١) الدرس الرابع: القيم القصوى للإقتران :**

نشاط (١) :



تعد الكهرباء مطلباً أساسياً في حياة المواطنين فدونها تتعطل الكثير من الفعاليات ، ويتم رصد استهلاك الكهرباء، في فلسطين على مدار الساعة.

الشكل المجاور يوضح توزيع الأحمال اليومية من الكهرباء في منطقة القدس وضواحيها في اليوم الأول من عام ٢٠١٧.

- لاحظ أن الأحمال تتزايد من الساعة التاسعة مساءً وحتى الساعة الثانية عشر منتصف الليل ، كذلك من الساعة السادسة صباحاً حتى الرابعة عصرًا.

- تتناقص أحمال الكهرباء خلال فترة \_\_\_\_\_ .

**تعريف:**

يكون الاقتران  $U(s)$  متزايداً على الفترة  $[a, b]$  ، إذا كان : لكل  $s_1 < s_2$  ، فإن :

$$U(s_1) < U(s_2) \quad \text{و} \quad [a, b] \ni s_1, s_2$$

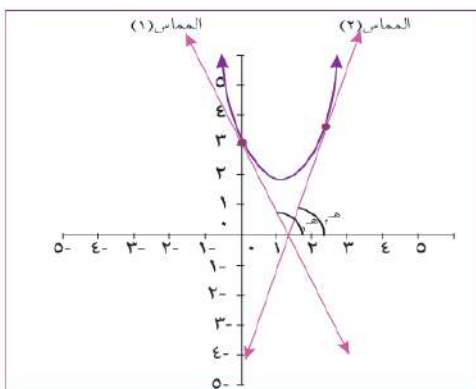
ويكون  $U(s)$  متناقصاً على الفترة  $[a, b]$  ، إذا كان : لكل  $s_1 < s_2$  ، فإن  $U(s_1) > U(s_2)$  لأي

$$[a, b] \ni s_1, s_2$$

**أذكر :** يكون ميل المستقيم موجباً ، إذا صنع زاوية حادة مع الاتجاه الموجب لمحور السينات ، ويكون

الميل سالباً إذا صنع هذا المستقيم زاوية منفرجة مع الاتجاه الموجب لمحور السينات.

ملاحظة : سنتقصر الدراسة في هذا السياق على الاقترانات كثيرة الحدود من الدرجة الثالثة على الأكثر.



نشاط (٢) : يوضح الشكل المجاور منحنى الاقتران لـ  $U(s) = s^3 - 2s^2 + 3s$  المعرف على ح.

- المماس (١) يصنع زاوية منفرجة (هـ) مع لاتجاه الموجب لمحور السينات، لذا فإن إشارة ميله سالبة في الفترة  $[-1, \infty)$ .

- ألاحظ أن لـ  $U(s)$  متناقص في الفترة  $[-1, \infty)$ .

- المماس (٢) يصنع زاوية \_\_\_\_\_ مع الاتجاه الموجب لمحور السينات ،

لذا فإن إشارة ميله \_\_\_\_\_ في الفترة  $[1, \infty)$  . ألاحظ أن لـ  $U(s)$  متزايد في الفترة  $[1, \infty)$  .

∞ - - - - - + + + + + ∞

**قاعدة:** اذا كان  $u(s)$  معرماً على الفترة  $[a, b]$  فان  $u(s)$  يكون:

- (١) يكون الاقتران  $u(s)$  متزايد في الفترة  $[a, b]$ ، إذا كانت  $u'(s) < 0$  صفر في الفترة  $[a, b]$ .
- (٢) يكون الاقتران  $u(s)$  متناقصاً في الفترة  $[a, b]$ ، إذا كانت  $u'(s) > 0$  صفر في الفترة  $[a, b]$ .
- (٣) يكون الاقتران  $u(s)$  ثابتاً في الفترة  $[a, b]$ ، إذا كانت  $u'(s) = 0$  صفر في الفترة  $[a, b]$ .

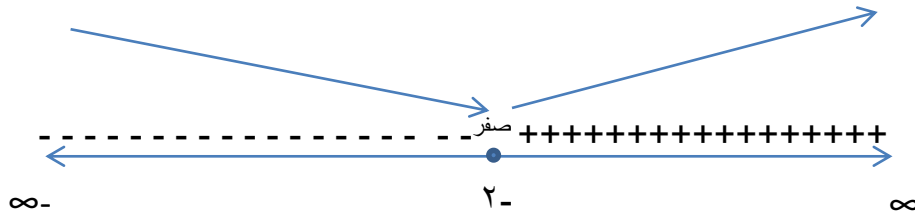
مثال (١): حدد فترات التزايد والتناقص للاقتران  $u(s) = s^2 + 4s - 7$

الحل: أبحث في إشارة  $u'(s)$ .

$$u'(s) = 2s + 4 = 0$$

$$s = -2$$

نبحث في إشارة  $u'(s)$

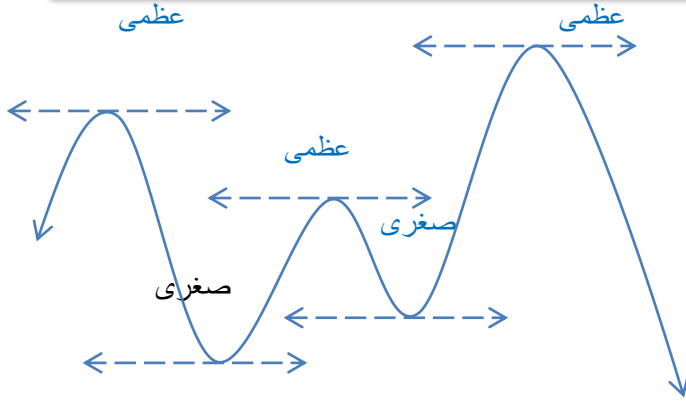


من إشارة  $u'(s)$  يكون الاقتران  $u(s)$  متزايداً على الفترة  $[-2, \infty)$ ، ويكون متناقصاً في الفترة  $]-\infty, -2]$ .



**انعلم:** يكون للاقتران  $ق(س)$  المعروف على ح قيمة قصوى (عظمى او صغرى) محلية عند  $س = أ$  ، إذا كان:

١.  $ق(أ) = ص$  صفرأً. ٢. يغير  $ق(س)$  من سلوكه حول  $س = أ$  من التزايد إلى التناقص أو العكس.



إذا كان  $ق(س)$  اقتراناً كما هو موضح بالشكل فإن

للاقتران  $ق(س)$  قيم قصوى و التي تقسم الى قسمين هما

- ١) العظمى المحلية : وهي القيم الاكبر على فترة معينة .
- ٢) والصغرى المحلية : وهي القيم التي تكومن اصغر من كل محيطها على فترة معينة .

عند القيم القصوى يجب الانتباه الى ما يلي :

- ١) يكون المماس افقياً
- ٢) ميل المماس يكون = صفر
- ٣) المشتقة الاولى عند القيم القصوى = صفر

### مراجعة بسيطة في اشارة الاقتران مهمة جداً

#### اشارة الاقتران التربيعي

$$ق(س) = ا س^٢ + ب س + ج$$

وهناك حالتان سنتعرف عليهما هنا فقط دون توسع

(أ) إذا كان للاقتران جذران حقيقيان مختلفان



اشارة (أ)

(ب) إذا كان للمعادلة جذران حقيقيان متساويان



#### اشارة الاقتران الخطي

$$ق(س) = ا س + ب$$

خطوات الحل:

- ١) نسوي الاقتران بالصفر
- ٢) نجد قيمة  $س$  .
- ٣) نعين قيمة  $س$  على خط الاعداد وتكون الاشارة كما يلي:



" يأتي السؤال عادةً على هذا الموضوع سنوياً " تحت عنوان جد القيم القصوى للاقتران " وحدد فترات التزايد والتناقص. ( ٥-٩ علامات )

لجنة ٢٠٠٩ ) جد القيم القصوى للاقتران  $٥ + ٦س - ٢س^٢ = (س)$  .

خطوات الحل :

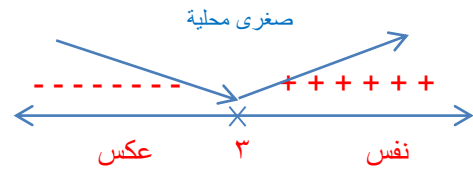
- (١) نأخذ الاقتران للترتيب
- (٢) نشقّه
- (٣) نساوي المشتقة بالميل ( الميل = صفر ) .
- (٤) نجد قيمة / قيم س .
- (٥) نرسم خط الاعداد ونعين عليه قيم س .
- (٦) نبحث في اشارة  $٥(س)$
- (٧) نجد القيم القصوى وذلك بتعويض قيم س في الاقتران الاصلى

الحل:  $٥ + ٦س - ٢س^٢ = (س)$

$$٦ - ٢س = (س)$$

$$\frac{٦}{٢} = س \frac{٢}{٢} \Leftarrow ٣ = س$$

$$\boxed{٣ = س} \Leftarrow$$



يوجد للاقتران  $٥(س)$  قيمة صغرى محلية عند  $س = ٣$  قيمتها

$$٥ + ٣ \times ٦ - ٢ \times ٣^٢ = (٣)$$

$$\boxed{٤ -} = ٥ + ١٨ - ٩$$

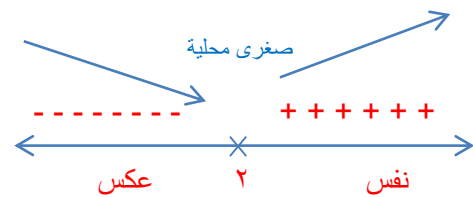
لجنة ٢٠١٠ ) جد القيم القصوى للاقتران  $١ + ٤س - ٢س^٢ = (س)$  .

الحل:  $١ + ٤س - ٢س^٢ = (س)$

$$٤ - ٢س = (س)$$

$$\frac{٤}{٢} = س \frac{٢}{٢} \Leftarrow ٢ = س$$

$$\boxed{٢ = س} \Leftarrow$$



يوجد للاقتران  $١(س)$  قيمة صغرى محلية عند  $س = ٢$  قيمتها

$$١ + ٢ \times ٤ - ٢ \times ٢^٢ = (٢)$$

$$\boxed{٣ -} = ١ + ٨ - ٤$$



(لجنة ٢٠٠٨) اذا كان  $٥(س) = ٣س - ٢س$  فجد القيم القصوى للاقتران  $٥(س)$ .

الحل :  $٥(س) = ٣س - ٢س$

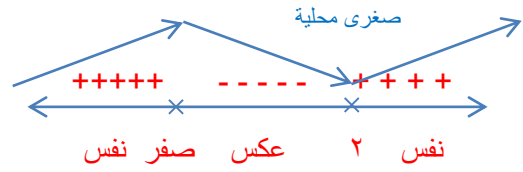
$$٥(س) = ٣س - ٢س$$

$$\leftarrow ٥(س) = ٣س - ٢س$$

$$= \leftarrow ٥(س) = ٣س - ٢س$$

اما  $س = ٥$  صفر او  $س = ٣$  صفر ومنها  $س = ٢$

عظمى محلية



يوجد للاقتران  $٥(س)$  عظمى محلية عند  $س = ٥$  قيمتها

$$٥(٥) = ٣ \times ٥ - ٢ \times ٥ = ٥$$

يوجد للاقتران  $٥(س)$  قيمة صغرى محلية عند  $س = ٢$  قيمتها

$$٥(٢) = ٣ \times ٢ - ٢ \times ٢ = ٢$$

(لجنة ٢٠١٥) جد القيم القصوى للاقتران.  $٥(س) = ٣س - ٢س + ٣$

(لجنة ٢٠١٦) جد القيم القصوى للاقتران  $٥(س) = ٣س + ٢س + ٣$

(لجنة ٢٠١٨) جد القيم القصوى للاقتران  $٥(س) = ٣س - ٢س + ١$

(اكمال ٢٠١٨) جد القيم القصوى للاقتران  $٥(س) = ٣س - ٢س + ٢$

(لجنة ٢٠١٩) اذا كان  $٥(س) = ٣س - ٢س$  اوجد

(١) فترات التزايد والتناقص للاقتران  $٥(س)$  على مجاله

(٢) القيم القصوى للاقتران  $٥(س)$  واحدد نوعها .

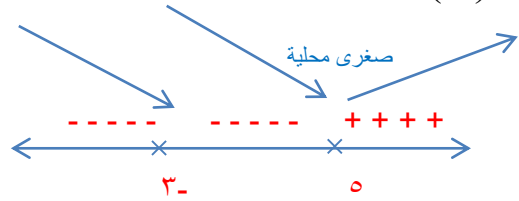
(اكمال ٢٠١٩) اذا كان  $٥(س) = ٣س - ٢س + ٥$  اوجد

(١) فترات التزايد والتناقص للاقتران  $٥(س)$  على مجاله

(٣) القيم القصوى للاقتران  $٥(س)$  واحدد نوعها .

نشاط (٣): الشكل الآتي يمثل إشارة مشتقة الاقتران  $٥(س)$  المعروف على ح.

إشارة  $٥(س)$



(أ)  $٥(س) = ٣س - ٢س + ٥$  عند  $س = ٥$  و عند  $س = ٣$

(ب)  $٥(س)$  متناقص في الفترة \_\_\_\_\_ .

(ج)  $٥(س)$  متزايد في الفترة \_\_\_\_\_ .

(د) النقطة (٣- ، ٥) ، ق(٣-) لا تعتبر قيمة صغرى ، (لماذا؟)

(هـ) تعتبر النقطة (٥ ، ٥) ق(٥) قيمة \_\_\_\_\_ .



$$٥(س) = -س^٢ + ١٠س + ٥ \quad \text{ع ٣}$$

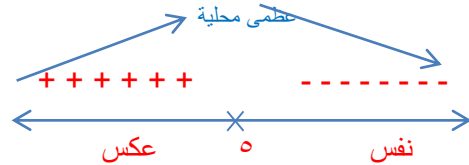
جد القيم القصوى للاقتران

$$٥(س) = -س^٢ + ١٠س$$

$$\frac{١٠-}{٢-} = س \frac{٢-}{٢-} \Leftarrow$$

$$-س^٢ + ١٠س = ٥$$

$$\boxed{س = ٥} \Leftarrow$$

يوجد للاقتران  $٥(س)$  قيمة عظمى محلية عند  $س = ٥$  قيمتها

$$٥(٥) = -٥^٢ + ١٠ \times ٥ + ٥ = ٥$$

$$\boxed{٣٠} = ٥ + ٥٠ + ٢٥ -$$

(ج) (لجنة ٢٠٠٨) اذا كان  $٥(س) = س^٣ - ١٢س$  فجد القيم القصوى للاقتران  $٥(س)$ .

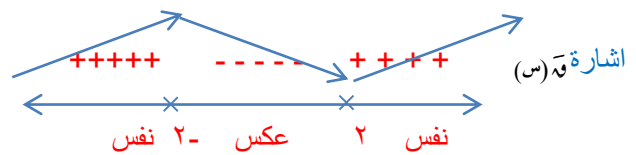
الحل :

$$٥(س) = س^٣ - ١٢س$$

$$\Leftarrow س^٣ - ١٢س = ٥$$

$$\Leftarrow س^٣ = ١٢س + ٥$$

$$\boxed{س = ٢} \Leftarrow \sqrt[٣]{١٢س + ٥} = س$$

يوجد للاقتران  $٥(س)$  عظمى محلية عند  $س = ٢$  قيمتها

$$٥(٢) = ٢^٣ - ١٢ \times ٢ = ٨ - ٢٤ = -١٦$$

يوجد للاقتران  $٥(س)$  قيمة صغرى محلية عند  $س = ٢$  قيمتها

$$٥(٢) = ٢^٣ - ١٢ \times ٢ = ٨ - ٢٤ = -١٦$$

(لجنة ٢٠١٤) جد القيم القصوى للاقتران.  $٥(س) = س^٣ - ٣س + ١$ 

مثال (٢) : أجد القيم القصوى للاقتران

هـ  $٥(س) = س^٣ - ٣س + ١$  ،  $س = ٣$  ،  $س = ٣$  ، إن وجدت.

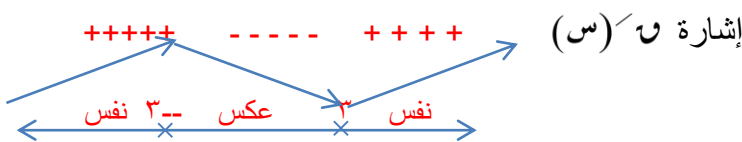
$$٥(س) = س^٣ - ٣س + ١$$

$$\text{الحل : } ٥(س) = س^٣ - ٣س + ١$$

$$٣س = س^٣ + ١$$

$$س = ٣$$

س = ٣ أو س = ٣- (لماذا؟) عظمى محلية

من إشارة  $٥(س)$  يتضح أن الاقتران  $٥(س)$  غير سلوكه حول س= ٣- من التزايد إلى التناقص ، إذن ؛ للاقتران  $٥(س)$  قيمة عظمى محلية عند  $س = ٣-$  ، وقيمتها  $٥(٣-) = ٥٤$ .كما أن  $٥(س)$  يغير سلوكه من التناقص إلى التزايد حول  $س = ٣$  ، إذنللاقتران  $٥(س)$  قيمة صغرى محلية عند  $س = ٣$  ، وقيمتها  $٥(٣) = -٥٤$ .(لجنة ٢٠١٧) عين القيم القصوى للاقتران.  $٥(س) = س^٣ - ٢س$ 

١٠ علامات

س ٣ ح

(السؤال : بين انه لا يوجد للاقتران. وه (س) = ٣ - ٨ قيم قصوى في مجاله .

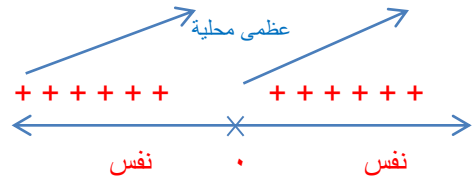
(لجنة ٢٠١٤) عدد القيم القصوى للاقتران وه (س) = ٣ - ٢٧

اكمال (٢٠١٤) بين انه لا يوجد للاقتران. وه (س) = ٣ - ٨ قيم قصوى محلية في مجاله .

(لجنة ٢٠١٩) عدد القيم القصوى للاقتران وه (س) = ٣ - ٢

$$\overline{\text{وه (س)}} = ٣س٢$$

$$\overline{\text{وه (س)}} = ٣س٢ = \frac{٢}{٣} \leftarrow \boxed{\text{وه (س)}} = ٠$$



الاقتران وه (س) لم يغير من سلوكه على مجاله

← لا يوجد للاقتران أي قيم قصوى في مجاله.

مثال: اذا كان للاقتران. وه (س) = ٣س٢ + ٤س + ١٠ قيمة عظمى محلية عند س = ٢ جد قيمة ٢.

بما ان للاقتران قيمة عظمى محلية عند س = ٢ ← وه (٢) = ٠

$$\overline{\text{وه (س)}} = ٢س٢ + ٤س + ١٠$$

$$\overline{\text{وه (٢)}} = ٠ = ٤ + ٢ \times ٢ = ٤ + ٤$$

$$\overline{\text{وه (٢)}} = ٠ = ٤ + ١٤ = \frac{٤}{٤} = ١ \frac{٤}{٤} \leftarrow \boxed{١} = ١$$

$$٤ - ٤ -$$

اذا اعطى في السؤال ان للاقتران ق(س) قيمة قصوى (عظمى او صغرى) عند س = ٢ فان قيمتها ب.

$$\overline{\text{وه (١)}} = ٠$$

$$\overline{\text{وه (١)}} = ب$$

(وزاري ٢٠١٣) اذا كان للاقتران وه (س) = ٣س - بس٢ قيمة صغرى محلية عند س = ٢ جد قيمة ب ثم احسب وه (٣).

$$\overline{\text{وه (٣)}} = ٣س٢ - ٢س٣ = ٣س٢ - ٢س٣$$

$$٣س٢ - ٢س٣ = ٣س٢ - ٢س٣$$

$$\overline{\text{وه (٣)}} = ٣س٢ - ٢س٣ = ٣س٢ - ٢س٣$$

$$\boxed{٩} = ١٨ - ٩ \times ٣ =$$

$$\overline{\text{وه (س)}} = ٠$$

$$\overline{\text{وه (س)}} = ٣س - بس٢$$

$$\overline{\text{وه (٢)}} = ٠ = ٣س٢ - ٢بس٢ = ٣س٢ - ٢بس٢$$

$$٠ = ٣س٢ - ٢بس٢ = ٣س٢ - ٢بس٢ = ٣س٢ - ٢بس٢$$

$$١٢ - ١٢ -$$

$$\overline{\text{وه (٢)}} = ٠ = ٣س٢ - ٢بس٢ = ٣س٢ - ٢بس٢ \leftarrow \boxed{٣} = ب$$

(لجنة ٢٠١٦) الاقتران وه (س) = ٦س - س٢ له قيمة عظمى محلية تساوي:

(اكمال ٢٠١٩) اذا كان للاقتران ق(س) قيمة عظمى محلية عند النقطة (١٠٠، ٥) فما قيمة وه (-١، ٠)



(وزاري ٢٠١٤) إذا كان للاقتران  $٥(س) = ٣س + ٢س - ٩س + ب$  قيمة صغرى محلية عند  $س = ١$  تساوي ٣. جد قيمة الثابتين  $٦$  ،  $٦$

$$\leftarrow ٥(س) = ٣س + ٢س - ٩س + ب$$

$$\leftarrow ٥(١) = ٣ + ٢ - ٩ + ب$$

$$\leftarrow ٣ = ب + ٩ - ٣ + ١$$

$$\leftarrow ٣ = ب + ٥$$

$$\leftarrow ٥ + ٥ = ٨ = ب$$

بما ان للاقتران قيمة صغرى محلية عند  $س = ١$   $\leftarrow ٥(١) = ٠$

$$\leftarrow ٥(س) = ٣س + ٢س - ٩س + ب$$

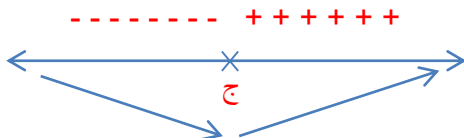
$$\leftarrow ٥(١) = ٣ + ٢ - ٩ + ب = ٠$$

$$\leftarrow ٠ = ٣ - ٦ + ٢ + ب \leftarrow ٠ = ٩ - ٦ + ٣ + ب \leftarrow ٠ = ٦ - ٦ + ب \leftarrow ٠ = ٦ + ب$$

(وزاري ٢٠١٥) إذا كان للاقتران  $٥(س) = ٣س + ٢س + ب$  وكان  $٥(١) = ٥$  ويمر منحنى الاقتران  $٥(س)$  بالنقطة  $(٢, ٣)$  فما قيم الثابتين  $٦$  ،  $٦$ .

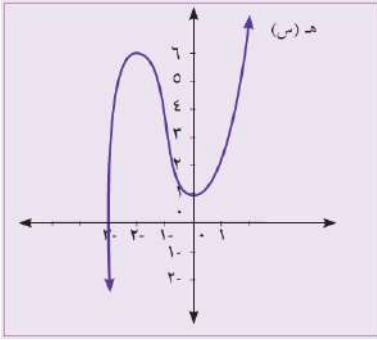
(وزاري ٢٠١٦) إذا كان للاقتران  $٥(س) = ٣س - ٢س + ب$  قيمة صغرى محلية عند  $س = ٢$  وكان  $٥(٢) = ٠$  فما قيم الثابتين  $٦$  ،  $٦$ .

(لجنة ٢٠١٨) فإذا كان  $٥(س) = ٣س - ٢س + ب$  وكانت إشارة  $٥(س)$  كما في الشكل المجاور، فأوجد قيمة الثابتين  $٦$  ،  $٦$  علما بان  $٥(١) = -٤$



## تمارين ومسائل (١-٥) ص ٢٩:

١) أجد القيم العظمى والصغرى للاقتران هـ (س) المرسوم في الشكل المجاور.



\*الاقتران هـ (س) متزايد في الفترة  $(-\infty, -2]$  ومتناقص على الفترة  $[-2, 0]$

وبالتالي فان للاقتران هـ (س) قيمة عظمة محلية عند  $s = -2$  قيمتها هـ  $(-2) = 6$

\*الاقتران هـ (س) ومتناقص على الفترة  $[-2, 0]$  متزايد في الفترة  $(0, \infty)$

وبالتالي فان للاقتران هـ (س) قيمة صغرى محلية عند  $s = 0$  قيمتها هـ  $(0) = 1$

٢) إذا كان  $u(s) = 3s^2 + 6s - 1$

ب) ما القيم القصوى للاقتران ، وما نوع كل منها ؟

أ) فما فترات التزايد والتناقص للاقتران على ح ؟

للاقتران  $u(s)$  قيمة صغرى محلية عند

$$s = -1 \text{ قيمتها}$$

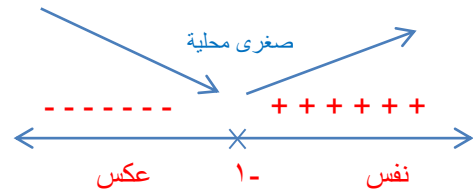
$$u(-1) = 3(-1)^2 + 6(-1) - 1 = 1 - 6 - 3$$

$$\boxed{-4} = 1 - 6 - 3$$

$$u(s) = 3s^2 + 6s - 1$$

$$u'(s) = 6s + 6 = 0$$

$$6s = -6 \Rightarrow \boxed{s = -1}$$



$u(s)$  متناقص على الفترة  $(-\infty, -1)$  لان  $u'(s) > 0$

$u(s)$  متزايد على الفترة  $[-1, \infty)$  لان  $u'(s) < 0$

٣) ما قيمة الثابت ج في الاقتران  $u(s) = 5 - 3s - s^2$  ، التي تجعل  $u(2)$  قيمة عظمى محلية ؟

بما ان للاقتران قيمة عظمة محلية عند  $s = 2$  هذا يعني ان  $u'(2) = 0$

$$u'(s) = -3 - 2s = 0$$

$$u'(2) = -3 - 2(2) = 0$$

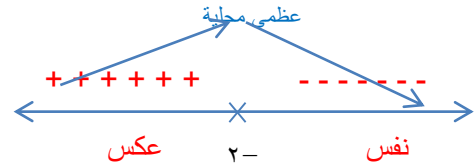
$$0 = -3 - 2j$$

$$-2j = 3 \Rightarrow \boxed{j = -\frac{3}{2}}$$

٤) ما فترات التزايد والتناقص للاقتران  $٧(س) = (س + ٢) \times (٤ - س٢)$  .

$$\begin{aligned} ٧(س) &= (س + ٢) \times (٤ - س٢) \\ (٤ - س٢ - + ٤ - س٢) &= \\ ٨ - س٤ - &= ٧(س) \\ \boxed{٢ - = س} &\leftarrow ٠ = ٨ - س٤ - \end{aligned}$$

- ٧(س) متزايد على الفترة  $(-\infty, ٢)$  لان  $٧(س) < ٠$
- ٧(س) متناقص على الفترة  $[٢, \infty)$  لان  $٧(س) > ٠$



٥) أ) أحد فترات التزايد والتناقص للاقتران  $٧(س) = \frac{١}{٣}س٣ + ٢س٢ - ٥س - ٥$  المعروف على ح .

ب) ما القيم القصوى للاقتران  $٧(س)$  ؟ وما نوع كل منها ؟

للاقتران  $٧(س)$  قيمة صغرى محلية عند  $س = ١$  قيمتها

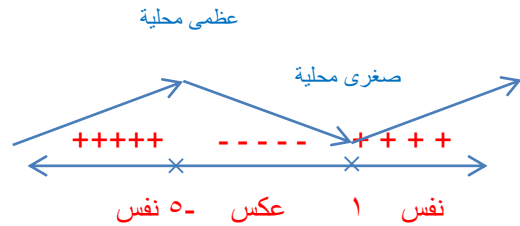
$$٧(١) = \frac{١}{٣}(١)٣ + ٢(١)٢ - ٥(١) - ٥ = ١ -$$

$$\boxed{٧ \frac{٢-}{٣}} = ٥ - ٥ - ٢ + \frac{١}{٣}$$

للاقتران  $٧(س)$  قيمة عظمى محلية عند  $س = -٥$  قيمتها

$$٧(-٥) = \frac{١}{٣}(-٥)٣ + ٢(-٥)٢ - ٥(-٥) - ٥ = -٥ -$$

$$\begin{aligned} ٧(س) &= \frac{١}{٣}س٣ + ٢س٢ - ٥س - ٥ \\ \boxed{١ = س} &\leftarrow ٠ = (١ - س)(٥ + س) \end{aligned}$$



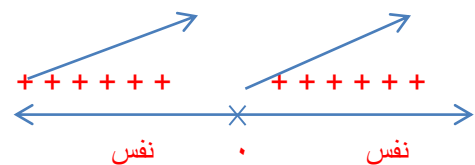
- ٧(س) متزايد على الفترة  $(-\infty, -٥)$  لان  $٧(س) < ٠$
- ٧(س) متزايد على الفترة  $[١, \infty)$  لان  $٧(س) < ٠$
- ٧(س) متناقص على الفترة  $[-٥, ١]$  لان  $٧(س) > ٠$

٦) أثبت أنه لا يوجد للاقتران  $٧(س) = ٢س٣ + ٢$  قيم قصوى في مجاله .

$$٧(س) = ٢س٣ + ٢$$

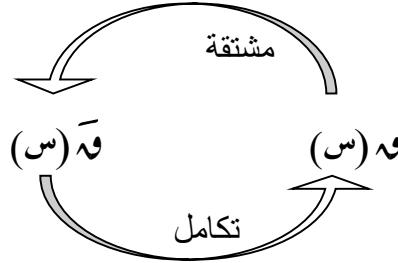
$$\boxed{٠ = س} \leftarrow \frac{٢}{٣} = ٢س \frac{٢}{٣}$$

لم يغير الاقتران من اشارته لذلك ليس له أي قيم قصوى على مجاله



## الدرس الخامس : (٥-١) التكامل غير المحدود

تعرفنا سابقا في الدروس السابقة على مفهوم النفاضل حيث ان مشتقه الاقتران ق(س) هي  $\overline{و(س)}$  وسنتعرف في هذا الدرس على العملية العكسية للمشتقة فاذا اعطى  $\overline{و(س)}$  كيف نجد الاقتران الاصلي  $و(س)$ ؟



نشاط (٢) اذا كان  $\overline{و(س)}$  اقتراناً ، حيث ان مشتقته  $\overline{و(س)} = ٢س$  فان قاعدة الاقتران ق(س) يمكن ان تكون

$$\begin{array}{l} \overline{و(س)} = ٢س \quad \leftarrow \overline{و(س)} = ٢س \\ \overline{و(س)} = ٢س \quad \leftarrow \overline{و(س)} = ٢س \\ \overline{و(س)} = ٢س \quad \leftarrow \overline{و(س)} = ٢س \end{array} \quad \begin{array}{l} \overline{و(س)} = ٢س \quad \leftarrow \overline{و(س)} = ٢س \\ \overline{و(س)} = ٢س \quad \leftarrow \overline{و(س)} = ٢س \\ \overline{و(س)} = ٢س \quad \leftarrow \overline{و(س)} = ٢س \end{array} \quad \begin{array}{l} \overline{و(س)} = ٢س \quad \leftarrow \overline{و(س)} = ٢س \\ \overline{و(س)} = ٢س \quad \leftarrow \overline{و(س)} = ٢س \\ \overline{و(س)} = ٢س \quad \leftarrow \overline{و(س)} = ٢س \end{array}$$

اذا كان

مثال (٢) اذا كان  $\overline{و(س)} = ٣س^٢$  اوجد  $\overline{و(س)}$  الذي مشتقته  $٣س^٢$

$$\begin{array}{l} \overline{و(س)} = ٣س^٢ \quad \leftarrow \overline{و(س)} = ٣س^٢ \\ \overline{و(س)} = ٣س^٢ \quad \leftarrow \overline{و(س)} = ٣س^٢ \\ \overline{و(س)} = ٣س^٢ \quad \leftarrow \overline{و(س)} = ٣س^٢ \end{array} \quad \begin{array}{l} \overline{و(س)} = ٣س^٢ \quad \leftarrow \overline{و(س)} = ٣س^٢ \\ \overline{و(س)} = ٣س^٢ \quad \leftarrow \overline{و(س)} = ٣س^٢ \\ \overline{و(س)} = ٣س^٢ \quad \leftarrow \overline{و(س)} = ٣س^٢ \end{array}$$

**تعريف:** اذا كان  $\overline{و(س)}$  اقتراناً، مشتقته الاولى  $\overline{و(س)}$  فان التكامل غير المحدود للاقتران

$\overline{و(س)}$  بالنسبة لـ س هو الاقتران  $\overline{و(س)} +$  عدد ثابت و بالرموز

$$\overline{و(س)} = س \overline{و(س)} + ج \quad \leftarrow \text{ثابت التكامل}$$

اكمل الفراغ فيما يلي :

(أ) اذا كانت مشتقه الاقتران  $٥س^٢$  هي  $١٠س$  فإن

$$\overline{و(س)} = ٥س^٢ + ج$$

(ب) اذا كانت مشتقه  $(س^٢ + ٢س)$  بالنسبة لـ س هي  $٢س^٢ + ٢$  فإن

$$\overline{و(س)} = (س^٢ + ٢س) س + ج$$

( للتأكد من صحة التكامل :نشتق الناتج يجب ان يساوي ما بداخل التكامل ) .

\*ملاحظة مهمة جدا ( مشتقة التكامل غير المحدود = ما بداخل التكامل ) .

مثال (١) اذا كانت  $f(s) = (s^2 - 3s + 2)$  اوجد  $f(3)$

$$f(3) = 3^2 - 3 \times 3 + 2$$

مثال (٢) اذا كانت  $f(s) = (s^3 + 4s^2 + 2s + 5)$  اوجد  $f(2)$

$$f(2) = 2^3 + 4 \times 2^2 + 2 \times 2 + 5$$

مثال (٣) اذا كان  $f(s) = (2s + 4)$  اوجد  $f(3)$

$$f(3) = 2 \times 3 + 4$$

$$f(3) = 6 + 4 = 10$$

مثال (٤) اذا كان  $f(s) = (s^2 + \frac{4}{s})$  اوجد  $f(2)$

$$f(2) = 2^2 + \frac{4}{2}$$

$$f(2) = 4 + 2 = 6$$



(اكمال ٢٠١٩) اذا كان  $f(s) = (s^3 + 3s)$  اوجد  $f(-1)$  فما قيمة  $s$ ؟

$$\text{لجنه (٢٠٠٩) اذا كان } \overline{وه} (س) = [ (س٢ - ٢) س٣ ] \text{ فان } \overline{وه} (٢) =$$

(٢٠١٦) اذا علمت ان

$$\overline{وه} (س) = [ (س٢ + ٢س + ١) س ] \text{ فان } \overline{وه} (١) =$$

$$\overline{وه} (س) = ٣ - ٢ س٢ =$$

$$\overline{وه} (٢) = (٢)٢ = ٣ - ٢ = ١ = \boxed{١}$$

$$\text{وزاري (٢٠١٠) اذا كانت ص} = [ (١/٣ س٣) س ] \text{ فان } \frac{ص}{س} =$$

$$\frac{ص}{س} = \frac{١}{٣} س^٣ \leftarrow$$

$$\text{اذا كانت ص} = [ (٢ - س٤) س ] \text{ فان } \frac{ص}{س} =$$

$$\frac{ص}{س} = (٢ - س٤) س$$

$$= ٢س - ٤س٥$$



٢٠١٥: اذا كان

$$\overline{وه} (س) = س٤ - ٢س٢ + ٨، \text{ جد } \overline{وه} (٢) =$$

$$\text{وزاري (٢٠١٠): اذا كان } \overline{وه} (س) = س٣ + ٢س + ج، \text{ جد } \overline{وه} (٢) =$$

$$\overline{وه} (س) = س٣ + ٢س + ج$$

$$\overline{وه} (س) = ٢ + ٢س٣ =$$

$$\overline{وه} (٢) = (٢)٣ + ٢ =$$

$$\overline{وه} (٢) = ٢ + ٤ \times ٣ = ١٤ = \boxed{١٤}$$

الحل:

$$\text{اكمال ٢٠١٣: اذا كان } \overline{وه} (س) = س٣ - ٢س - ٥، \text{ جد } \overline{وه} (س) = س٣ - ٢س + ج$$

فان  $\overline{وه} (٢) =$

فان  $\overline{وه} (٢) =$

$$(٢٠١٧) اذا كان ص = [ (٤س + ١) س ] فان \frac{ص}{س} =$$

## قواعد التكامل غير المحدود

: لقد تعرفنا في الدروس السابقة على التفاضل وكيفيه ايجاد المشتقة لأي اقتران ق(س) وسنتعرف في الدروس القادمة على مجموعه من القواعد العكسية التي تمكننا من ايجاد الاقتران الاصلي للمشتقة واليك القواعد .

القاعدة الاولى : اذا كان ق(س) =  $p \in \mathbb{R}$  فإن  $\int p \, ds = \frac{p}{n+1} s^{n+1} + c$

$$(٤) \int \frac{1}{p} ds = \frac{1}{p} s + c$$

$$(٥) \int \pi^n ds = \frac{\pi^n}{n+1} s^{n+1} + c$$

$$(٦) \int \sqrt[n]{s} ds = \frac{s^{\frac{n+1}{n}}}{\frac{n+1}{n}} + c$$

$$(١) \int s^9 ds = \frac{s^{10}}{10} + c$$

$$(٢) \int s^7 ds = \frac{s^8}{8} + c$$

$$(٣) \int s^{-5} ds = \frac{s^{-4}}{-4} + c$$

$$(٢٠١٦) \int s^{\pi} ds = \frac{s^{\pi+1}}{\pi+1} + c$$

القاعدة الثانية :  $\int s^{\frac{1+n}{n}} ds = \frac{s^{\frac{1+n}{n}+1}}{\frac{1+n}{n}+1} + c$

$$(١) \int s^{\frac{1+3}{3}} ds = \frac{s^{\frac{4}{3}+1}}{\frac{4}{3}+1} = \frac{s^{\frac{7}{3}}}{\frac{10}{3}} + c$$

$$(٢) \int s^{\frac{1+6}{6}} ds = \frac{s^{\frac{7}{6}+1}}{\frac{7}{6}+1} = \frac{s^{\frac{13}{6}}}{\frac{13}{6}} + c$$

$$(٣) \int s^{\frac{1+8}{8}} ds = \frac{s^{\frac{9}{8}+1}}{\frac{9}{8}+1} = \frac{s^{\frac{17}{8}}}{\frac{17}{8}} + c$$

$$(٤) \int s^{\frac{1-2}{2}} ds = \frac{s^{\frac{-1}{2}+1}}{\frac{-1}{2}+1} = \frac{s^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + c$$

$$(٥) \int s^{\frac{1-6}{6}} ds = \frac{s^{\frac{-5}{6}+1}}{\frac{-5}{6}+1} = \frac{s^{\frac{1}{6}}}{\frac{1}{6}} + c$$

$$(٦) \int s^{\frac{1-3}{3}} ds = \frac{s^{\frac{-2}{3}+1}}{\frac{-2}{3}+1} = \frac{s^{\frac{1}{3}}}{\frac{1}{3}} + c$$

$$\int s^{\frac{1-2}{2}} ds = \frac{s^{\frac{-1}{2}+1}}{\frac{-1}{2}+1} = \frac{s^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + c$$

## قائمة الاعداء

$$(١) s^{-n} = \frac{1}{s^n}$$

$$(٢) \sqrt[n]{s} = s^{\frac{1}{n}}$$

اذا وجد أحد الاعداء بالمسألة نقوم بما يلي

١- تهيئه      ٢- تكامل      ٣- تبسيط

يجب ان لا تحتوي الاجابة على قوى سالبة او كسرية وان وجد نرجعها الى أصلها

١- القوى السالبة ← المقام  
٢- القوى الكسرية ← الجذر ← جذر بالمقام

### تكمال القوى الكسرية □

- نبتعد قليلا ثم نضع المتغير
- نجمع بسط القوة + مقامها وتوضع كقوة جديدة
- نقلب القوة الجديدة في الفراغ
- نجمع ج ثم نرجها الى الجذر

$$(٧) \left[ \text{س}^{\frac{1}{٤}} \text{س}^{\frac{1}{٤}} = \text{س}^{\frac{1}{٤} + \frac{1}{٤}} = \text{س}^{\frac{2}{٤}} = \text{س}^{\frac{1}{٢}} \right]$$

$$(٨) \left[ \text{س}^{\frac{1}{٦}} \text{س}^{\frac{1}{٦}} = \text{س}^{\frac{1}{٦} + \frac{1}{٦}} = \text{س}^{\frac{2}{٦}} = \text{س}^{\frac{1}{٣}} \right]$$

$$(٩) \left[ \text{س}^{\frac{1}{٢}} \text{س}^{\frac{1}{٢}} = \text{س}^{\frac{1}{٢} + \frac{1}{٢}} = \text{س}^{\frac{2}{٢}} = \text{س}^1 = \text{س} \right]$$

$$(١٠) \left[ \text{س}^{\frac{3}{٨}} \text{س}^{\frac{5}{٨}} = \text{س}^{\frac{3}{٨} + \frac{5}{٨}} = \text{س}^{\frac{8}{٨}} = \text{س}^1 = \text{س} \right]$$

$$(١١) \left[ \text{س}^{\frac{2}{٣}} \text{س}^{\frac{2}{٣}} = \text{س}^{\frac{2}{٣} + \frac{2}{٣}} = \text{س}^{\frac{4}{٣}} \right]$$

$$(١٢) \left[ \text{س}^{\frac{3}{٥}} \text{س}^{\frac{2}{٥}} = \text{س}^{\frac{3}{٥} + \frac{2}{٥}} = \text{س}^{\frac{5}{٥}} = \text{س}^1 = \text{س} \right]$$

$$(١٣) \left[ \text{س}^{\frac{3}{٨}} \text{س}^{\frac{5}{٨}} = \text{س}^{\frac{3}{٨} + \frac{5}{٨}} = \text{س}^{\frac{8}{٨}} = \text{س}^1 = \text{س} \right]$$

$$(١٤) \left[ \text{س}^{\frac{7}{٩}} \text{س}^{\frac{2}{٩}} = \text{س}^{\frac{7}{٩} + \frac{2}{٩}} = \text{س}^{\frac{9}{٩}} = \text{س}^1 = \text{س} \right]$$

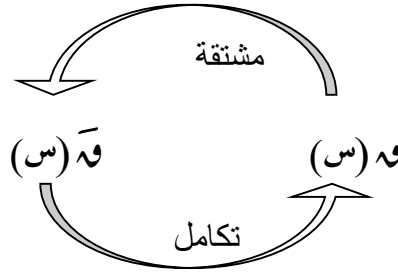
$$(١٥) \left[ \text{س}^{\frac{1}{٢}} \text{س}^{\frac{1}{٢}} = \text{س}^{\frac{1}{٢} + \frac{1}{٢}} = \text{س}^{\frac{2}{٢}} = \text{س}^1 = \text{س} \right]$$

$$(١٦) \left[ \text{س}^{\frac{1}{٣}} \text{س}^{\frac{2}{٣}} = \text{س}^{\frac{1}{٣} + \frac{2}{٣}} = \text{س}^{\frac{3}{٣}} = \text{س}^1 = \text{س} \right]$$

$$\text{س}^{\frac{3}{٤}} \text{س}^{\frac{1}{٤}} = \text{س}^{\frac{3}{٤} + \frac{1}{٤}} = \text{س}^{\frac{4}{٤}} = \text{س}^1 = \text{س}$$





ايجاد قاعدة الاقتران وه (س) اذا علم ميل المماس لمنحنى الاقتران ونقطة عليه

اذا اعطى في السؤال وه (س) وطلب معادله المماس ← نستخدم المشتقة وه (س)

اما اذا اعطى في السؤال وه (س) وطلب وه (س) ← نستخدم التكامل حيث

$$\text{وه (س)} = \int \text{وه (س)} \, ds$$

مثال: اذا كان ميل المماس لمنحنى الاقتران وه (س) عند أي نقطة عليه يعطي بالقاعدة

$$\text{وه (س)} = 2s \text{ فأوجد قاعدة الاقتران وه (س) علماً بأنه يمر بالنقطة (٣ ، ٠)}$$

الحل:

- اعطى وه (س) وطلب وه (س) ← نستخدم التكامل واليك خطوات الحل
- (١) نكتب القانون
- (٢) نعوض وه (س) من السؤال في القانون
- (٣) نجري عملية التكامل
- (٤) نجد قيمة ج حيث وه (س) = ص " نعوض قيمة س من النقطة بالاقتران تساوي ص
- (٥) نعوض ج التي حصلنا عليها مكانها في الاقتران وه (س)

$$\begin{aligned} \text{وه (س)} &= \int \text{وه (س)} \, ds \\ \text{وه (س)} &= \int 2s \, ds \\ &= s^2 + \frac{2s^2}{2} = \\ \text{وه (س)} &= s^2 + s \\ \text{وه (٠)} &= (٠)^2 + (٠) = ٣ \\ \boxed{3} &= \text{ج} \leftarrow \\ \text{وه (س)} &= s^2 + s + 3 \end{aligned}$$

نشاط (٥) أوجد قاعدة الاقتران  $\bar{w}(s)$  الذي مشتقته  $\bar{w}(s) = \sqrt[3]{s}$  علماً بأن  $q(1) = 1$

$$\begin{aligned} \bar{w}(s) &= \bar{w}(s) \cdot s \\ \sqrt[3]{s} &= \sqrt[3]{s} \cdot s = s^{\frac{2}{3}} \\ \frac{2}{3} &= p + \frac{1}{4} \quad \leftarrow \quad 1 = p + \frac{1}{4} \quad \frac{2}{3} = (1) \cdot \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} &= p \quad \leftarrow \quad \boxed{\frac{2}{3} + \sqrt[3]{s} = \bar{w}(s)} \end{aligned}$$

(اكمل ٢٠١٧) اذا كان ميل المماس عند اي نقطة عليه يعطي بالعلاقة  $\bar{w}(s) = 2 - 3s^2$  جد قاعدة الاقتران  $q(s)$  علماً بأن  $q(1) = 3$

اكمل (٢٠٠٨) اذا كان ميل المماس للاقتران  $\bar{w}(s)$  عند أي نقطة عليه يعطي بالعلاقة

$\bar{w}(s) = 2s - 1$  فجد قاعدة  $\bar{w}(s)$  علماً بالاقتران يمر بالنقطة (١ ، ٤)

الاقتران يمر بالنقطة (١ ، ٤)  
أي ان  $\bar{w}(1) = 4$

$$\begin{aligned} \bar{w}(s) &= \bar{w}(s) \cdot s \\ \bar{w}(s) &= (2s - 1) \cdot s = 2s^2 - s \\ \bar{w}(1) &= 2(1)^2 - 1 = 1 = 4 \\ \bar{w}(s) &= 2s^2 - s \\ \bar{w}(1) &= 2(1)^2 - 1 = 1 = 4 \\ \bar{w}(s) &= 2s^2 - s + 3 = \bar{w}(s) \end{aligned}$$

(لجنة ٢٠١١) اذا كانت  $\bar{w}(s) = s^2 + 4s + 4$  جد قاعدة  $\bar{w}(s)$  علماً بأنه يمر نقطة الاصل .

عندما يذكر بالسؤال نقطة الاصل

أي النقطة (٠ ، ٠)

أي ان

$\bar{w}(0) = 0$

$\bar{w}(0) = 0$

$$\begin{aligned} \bar{w}(s) &= \bar{w}(s) \cdot s \\ \bar{w}(s) &= s(s^2 + 4s + 4) \\ \bar{w}(s) &= s^3 + 4s^2 + 4s \\ \bar{w}(0) &= 0 = s^3 + 4s^2 + 4s \\ \bar{w}(s) &= s^3 + 4s^2 + 4s + 0 = \bar{w}(s) \\ \bar{w}(s) &= s^3 + 4s^2 + 4s + 0 = \bar{w}(s) \end{aligned}$$

(لجنة ٢٠١٨) اذا كان ميل المماس لمنحنى الاقتران عند اي نقطة عليه يعطي بالعلاقة  $\bar{w}(s) = 6s - 8$  جد قاعدة الاقتران  $q(s)$  علماً بأن  $q(2) = 5$

### القاعدة الثالثة: $\left[ \frac{1}{n} \right] = \frac{1}{n} \left[ \frac{1}{n} \right]$

$$(1) \left[ \frac{1}{6} \right] = \frac{1}{6} \left[ \frac{1}{6} \right] = \frac{1}{6} \times \frac{1}{6} = \frac{1}{36} = \frac{1}{6} + \frac{1}{36}$$

$$(2) \left[ \frac{1}{4} \right] = \frac{1}{4} \left[ \frac{1}{4} \right] = \frac{1}{4} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{16} = \frac{1}{4} + \frac{1}{16}$$

$$(3) \left[ \frac{1}{2} \right] = \frac{1}{2} \left[ \frac{1}{2} \right] = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4}$$

$$(4) \left[ \frac{1}{5} \right] = \frac{1}{5} \left[ \frac{1}{5} \right] = \frac{1}{5} \times \frac{1}{5} = \frac{1}{25} = \frac{1}{5} + \frac{1}{25}$$

$$(5) \left[ \frac{1}{3} \right] = \frac{1}{3} \left[ \frac{1}{3} \right] = \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{9} = \frac{1}{3} + \frac{1}{9}$$

$$(6) \left[ \frac{1}{2} \right] = \frac{1}{2} \left[ \frac{1}{2} \right] = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4}$$

$$(7) \left[ \frac{1}{6} \right] = \frac{1}{6} \left[ \frac{1}{6} \right] = \frac{1}{6} \times \frac{1}{6} = \frac{1}{36} = \frac{1}{6} + \frac{1}{36}$$

### القاعدة الرابعة: $\left[ \frac{1}{n} \right] + \left[ \frac{1}{n} \right] = \left[ \frac{2}{n} \right]$

$$\left[ \frac{1}{4} \right] + \left[ \frac{1}{4} \right] = \left[ \frac{2}{4} \right] = \left[ \frac{1}{2} \right]$$

$$(1) \left[ \frac{1}{2} \right] + \left[ \frac{1}{2} \right] = \left[ \frac{2}{2} \right] = \left[ 1 \right]$$

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$$

$$(2) \left[ \frac{1}{5} \right] + \left[ \frac{1}{5} \right] = \left[ \frac{2}{5} \right] = \frac{1}{5} + \frac{1}{5} = \frac{2}{5}$$

$$\frac{1}{5} + \frac{1}{5} = \frac{2}{5}$$

(٣) وزارتي ٢٠٠٨

نشاط (٦)

$$\left[ \frac{1}{4} \right] + \left[ \frac{1}{4} \right] = \left[ \frac{2}{4} \right] = \left[ \frac{1}{2} \right]$$

$$\frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

$$\left[ \frac{1}{6} \right] + \left[ \frac{1}{6} \right] = \left[ \frac{2}{6} \right] = \left[ \frac{1}{3} \right]$$

$$\frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

$$= \text{اكمل (٢٠١٦)} \left[ (س٤ + ٣) س٤ \right]$$

$$(٤) \left[ (س٤ - ١) س٤ \right] = \left[ (س٤ - ١) س٤ \right]$$

$$= \frac{س٤}{٥} - \frac{٢}{٣} = \frac{س٤}{٥} + \frac{٢}{٣} = \frac{٣س٤ + ١٠}{١٥}$$

$$(٥) \left[ (س٤ + ٢) س٤ \right] = \left[ (س٤ + ٢) س٤ \right]$$

$$= \frac{س٤}{٦} + \frac{١}{٢} = \frac{س٤}{٦} + \frac{٣}{٦} = \frac{س٤ + ٣}{٦}$$

$$(٦) \left[ (س٤ + ٣) س٤ \right] = \left[ (س٤ + ٣) س٤ \right]$$

$$= \frac{س٤}{٥} + \frac{٣}{٤} = \frac{٤س٤ + ١٥}{٢٠}$$

$$= \text{اكمل (٢٠١٦)} \left[ \frac{س٤}{٢} \right]$$

حاول أن تصل إلى أبعد مما تستطيع الوصول إليه



sowarr.com

## نمارين ومسائل [١-٦] ص ٣٥

(١) احسب كلا من التكاملات الآتية :

$$\begin{aligned} (أ) \quad & \int (3s^2 + 4s - 5) ds \\ & = \frac{3s^3}{3} + \frac{4s^2}{2} - 5s + C \\ & = s^3 + 2s^2 - 5s + C \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (ب) \quad & \int \frac{5}{\sqrt{s}} ds \\ & = \int 5s^{-\frac{1}{2}} ds \\ & = 5 \cdot \frac{s^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + C \\ & = 10\sqrt{s} + C \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (د) \quad & \int \left( \frac{2}{s^5} + 6s^{-4} \right) ds \\ & = \int \left( 2s^{-5} + 6s^{-4} \right) ds \\ & = 2 \cdot \frac{s^{-4}}{-4} + 6 \cdot \frac{s^{-3}}{-3} + C \\ & = -\frac{1}{2}s^{-4} - 2s^{-3} + C \\ & = -\frac{1}{2s^4} - \frac{2}{s^3} + C \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (ج) \quad & \int \sqrt{s} ds \\ & = \int s^{\frac{1}{2}} ds \\ & = \frac{s^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + C \\ & = \frac{2}{3} s^{\frac{3}{2}} + C \\ & = \frac{2}{3} \sqrt{s^3} + C \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (و) \quad & \int (5e^{4002s}) ds \\ & = \frac{5e^{4002s}}{4002} + C \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (و) \quad & \int (6s^5 + 7s^3 + 3s^2) ds \\ & = \frac{6s^6}{6} + \frac{7s^4}{4} + \frac{3s^3}{3} + C \\ & = s^6 + \frac{7s^4}{4} + s^3 + C \end{aligned}$$

تذكر:

مشتقة التكامل غير المحدود  
تساوي ما بداخل التكامل

تذكر:

للتخلص من التكامل نشتق  
الطرفين

$$(٢) \text{ إذا كان } \bar{u} (s) = (s^3 - 4s^2 + 8) \text{ اجد } \bar{u} (1)$$

$$\bar{u} (s) = (s^3 - 4s^2 + 8)$$

$$\bar{u} (1) = (1^3 - 4(1)^2 + 8)$$

$$\boxed{5} = (8 - 4 + 1) =$$

$$(٣) \text{ إذا كان } \bar{u} (s) = (3s^2 + 2s + 3) \text{ اجد } \bar{u} (2)$$

$$\bar{u} (s) = (3s^2 + 2s + 3)$$

$$\bar{u} (2) = (3(2)^2 + 2(2) + 3)$$

$$(٤) \text{ إذا كان } \frac{v}{s} = (3 + 2s) \text{ اجد } \frac{v}{s}$$

$$\frac{v}{s} = 3 + 2s$$



## الدرس السادس (١-٦) : التكامل المحدود

## أولاً : التكامل المحدود .

تذكر : لقد درسنا في الدرس السابق موضوع التكامل غير المحدود وتعرفنا على قواعد ايجاده وانطلاقاً من ذلك سنتعرف على التكامل المحدود فقد كان لدينا

$$\int f(x) dx = F(x) + C \leftarrow \text{تكامل غير محدود}$$

تعريف التكامل المحدود : اذا كان ق(س) اقترانا قابلاً للاشتقاق ، فان

$\leftarrow$  تكامل محدود من أ الى ب

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$$

مثال (١) اوجد كلاً من التكاملات الآتية:

$$(1) \int_0^2 (5 + 2x) dx = \frac{2x^2}{2} + 5x \Big|_0^2 = 2^2 + 5 \times 2 - (0 + 0) = 4 + 10 = 14$$

$$(2) \int_0^2 (5 + 2x) dx = \frac{2x^2}{2} + 5x \Big|_0^2 = 2^2 + 5 \times 2 - (0 + 0) = 4 + 10 = 14$$

$$= (2 \times 2 + 2 \times 0) - (0 \times 0 + 2 \times 0) =$$

$$= 4 + 10 - 0 = 14$$

$$(3) \int_0^2 (7 - 2x^2) dx = \frac{2x^3}{3} - 7x \Big|_0^2 = \frac{2 \times 2^3}{3} - 7 \times 2 - (0 - 0) = \frac{16}{3} - 14 = \frac{16 - 42}{3} = -\frac{26}{3}$$

$$= (2 \times 2 - 2 \times 0) - (0 \times 2 - 2 \times 0) =$$

$$= (4 - 0) - (0 - 0) =$$

$$= 4 - 0 = 4$$

$$(4) \int_0^2 (2 + \sqrt{x}) dx =$$

$$= \frac{x^2}{2} + \frac{2}{3} x^{3/2} \Big|_0^2 =$$

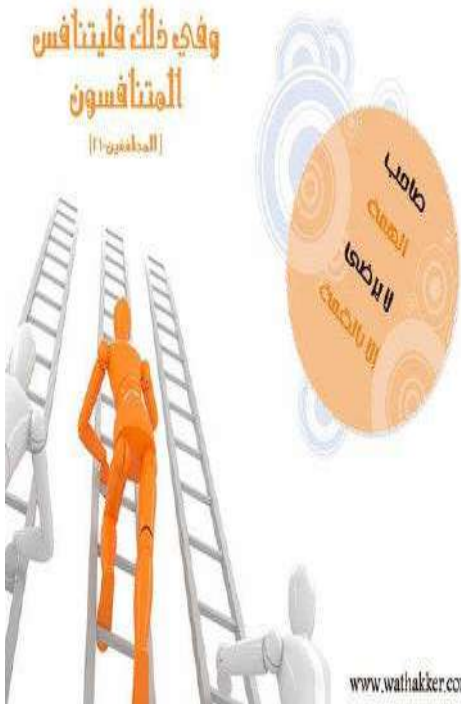
$$= \left( \frac{2^2}{2} + \frac{2}{3} \times 2^{3/2} \right) - \left( \frac{0^2}{2} + \frac{2}{3} \times 0^{3/2} \right) =$$

$$= (2 + \frac{2}{3} \times 2\sqrt{2}) - (0 + 0) = 2 + \frac{4\sqrt{2}}{3}$$

$$= \left( 2 + 1 \times \frac{2}{4} \right) - \left( 1 \times 2 + 2 \times \frac{2}{4} \right) =$$

$$= (2, 75) - 28 = \left( 2 + \frac{2}{4} \right) - (1 \times 2 + 1 \times 2) =$$

$$= 2, 25$$



$$(٢٠١٥) \text{ لجنة } ) \text{ احسب } \left[ \frac{3}{2} - (2 + 3s) \right] \frac{1}{3}$$

$$(٢٠١٩) \text{ لجنة } ) \text{ اوجد قيمة } \left[ \frac{2}{3} - 1 \right] \frac{1}{3}$$

$$(٥) \text{ (٢) } \left[ 8s - 7s \right] = ص$$

$$\begin{aligned} \leftarrow ص &= \frac{8s}{2} - 7s = 4s - 7s = -3s \\ &= (2 \times 7 - 2(2)4) - (4 \times 7 - 2(4)4) = \\ &= (14 - 4 \times 4) - (28 - (16 \times 4)) = \\ &= (14 - 16) - (28 - 64) = \\ &= -2 - 36 = -38 \end{aligned}$$

$$\leftarrow ص = 38$$

ب) اوجد  $\frac{ص}{ص}$

$$\frac{ص}{ص} = \text{صفر} \text{ ماذا تلاحظ}$$

مشتقه التكامل غير المحدود = ما بداخل التكامل

مشتقه التكامل المحدود = صفر دائما

اكمال (٢٠١٧) اذا كان

$$ص(س) = س + 3س^2 + 4س^3 \text{ فان قيمة } ص(١)$$

مثال مهم جداً : اوجد  $\frac{ص}{ص}$  في كل مما يلي :

$$(١) \left[ \frac{2-3s}{1-s} \right] \frac{ص}{ص} \leftarrow \frac{ص}{ص} = \frac{2-3s}{1+s}$$

$$(٢) \left[ 2s(2-s) \right] \frac{ص}{ص} \leftarrow \frac{ص}{ص} = 0$$

$$(٣) \left[ 2s + 3s^2 - 5s \right] \frac{ص}{ص} = 0$$

$$\frac{ص}{ص} = 2s - 1 + 0 = 2s - 1$$

$$= 2s + 1$$

$$(٤) \left[ 2s + 4s + 5(2+s) - 7s^2 \right] \frac{ص}{ص} = 0$$

$$\frac{ص}{ص} = 2 + 4 + 10 + 5s - 7s^2 = 16 + 5s - 7s^2$$

المصري لما يجي يذاكر

٢٠٪ يغني

١٠٪ يعد صفحات

٧٠٪ يشتم فالي حط المنهج



لجنة (٢٠١٩) اذا كان  $ص = 3س^3 + 2س^2 + 4س$  فان

قيمة  $\frac{ص}{ص}$  تساوي :

$$(٥) \left[ \frac{3}{2} - 5س \right] \frac{ص}{ص} = 0$$

$$\frac{ص}{ص} = 0 - 5س = -5س$$

سنعرض في الصفحات الآتية الى ثلاث افكار هامة يجب التركيز عليها لأهميتها في الامتحانات :

(لجنة ٢٠١٨) جد قيمة / قيم ج التي تجعل (٤٥)

$$\int_{-1}^4 \frac{ج}{س} ds = ٤ -$$

الفكرة الاولى : اذا كان التكامل المحدود يحتوي على مجاهيل

اذا كان  $\int_{-1}^4 س^٢ ds = ٨$  فجد قيمة الثابت أ.

$$\begin{aligned} ٨ &= \int_{-1}^4 س^٢ ds \leftarrow ٨ = \int_{-1}^4 \frac{س^٣}{٣} ds \\ ٨ &= ١ - ٢ \leftarrow ٨ = (٢) - (١) \leftarrow \\ \boxed{٣ \pm} &= ١ \leftarrow ٩ \sqrt{ } = ٢ \sqrt{ } \leftarrow \end{aligned}$$

الفكرة الثانية : اذا أعطى قيم الحدود وطلب التكامل المحدود

مثال ( ٢ ) اذا كان  $\int_{-1}^٢ ق(س) ds$  هي مشتقة ق(س) وكان ق(١) = ٥ ، ق(٢) = ٧ فجد قيمة  $\int_{-1}^٢ ق(س) ds$

(لجنة ٢٠١٩) اذا كان ق(٧) = ٨ ، ق(٥) = ٢ فجد قيمة

$$\int_{٥}^٧ ق(س) ds$$

$$\begin{aligned} \int_{-1}^٢ ق(س) ds &= ٢(ق(٢) - ق(-١)) \\ \text{الحل :} & \\ ٢(٧ - ٥) &= \\ \boxed{٤} &= \end{aligned}$$

الفكرة الثالثة : اذا أعطى قيمة التكامل غير المحدود وطلب التكامل المحدود

اذا كان  $\int_{-1}^٢ ق(س) ds = ٢س^٢ + ٤س + ج$  اوجد  $\int_{-1}^٢ ق(س) ds$

$$\int_{-1}^٢ ق(س) ds = ٢س^٢ + ٤س + ج$$

$$\int_{-1}^٢ ق(س) ds = ٢س^٢ + ٤س + ج$$

$$٢(٢) - ٢(١) =$$

$$\begin{aligned} \int_{-1}^٢ ق(س) ds &= ٢س^٢ + ٤س + ج \\ (٢ \times ٢ + ٤ \times ٢) - (٢ \times ١ + ٤ \times ١) &= \\ (٤ + ٨) - (٢ + ٤) &= \\ ٢٤ &= (٤ + ٢) - (١٢ + ١٨) \end{aligned}$$



**اسئلة اضافية مهمة جدا**

السؤال الاول : احسب قيمة كل من التكاملات الاتية

$$(أ) \int_0^4 7s^4 ds =$$

$$\begin{aligned} &= (7 \times 4) - (7 \times 0) = \\ &= 28 - 0 = \\ &= \boxed{28} \end{aligned}$$

$$(ب) \int_0^3 (5 - 8s^2) ds =$$

$$\begin{aligned} &= \int_0^3 5 ds - \int_0^3 8s^2 ds = \\ &= (5 \times 3) - (8 \times \frac{3^3}{3}) = \\ &= 15 - 72 = -57 = \\ &= \boxed{-57} \end{aligned}$$

$$(ج) \int_0^3 \frac{3s^3}{3} ds =$$

$$\begin{aligned} &= \int_0^3 s^3 ds = \\ &= (\frac{3^4}{4}) - (\frac{0^4}{4}) = \\ &= \boxed{\frac{81}{4}} = 20.25 \end{aligned}$$

$$= \int_0^2 (\frac{1}{s}) ds \quad (\text{الجنة ٢٠١٨})$$

$$(د) \int_0^4 \frac{4s^4}{4} ds =$$

$$= \int_0^4 s^4 ds =$$

$$= (\frac{4^5}{5}) - (\frac{0^5}{5}) =$$

$$= \frac{1024}{5} - 0 =$$

$$= \boxed{\frac{1024}{5}}$$

$$= 204.8$$

$$(هـ) \int_0^3 (s^{-2} + s^{-3}) ds =$$

$$= \int_0^3 s^{-2} ds + \int_0^3 s^{-3} ds =$$

$$= (\frac{s^{-1}}{-1}) - (\frac{0^{-1}}{-1}) + (\frac{s^{-2}}{-2}) - (\frac{0^{-2}}{-2}) =$$

$$= (-\frac{1}{3}) - (-1) + (-\frac{1}{6}) - (-\frac{0}{2}) =$$

$$= -\frac{1}{3} + 1 - \frac{1}{6} - 0 =$$

$$= 1 - \frac{1}{3} - \frac{1}{6} =$$

$$= \frac{6}{6} - \frac{2}{6} - \frac{1}{6} =$$

السؤال الثاني : اذا كانت  $f(s) = (3)s^8$  وكان  $f(6) = 12$  فأوجد قيمة

$$\int_0^6 f(s) ds =$$

$$\int_0^6 f(s) ds = \int_0^6 (3)s^8 ds =$$

$$= (3) \int_0^6 s^8 ds =$$

$$= (3) (\frac{6^9}{9} - \frac{0^9}{9}) =$$



السؤال الثالث : اذا كان  $\int_{-2}^1 (5 + 2s) ds = 0$  فما قيمة أ

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{-2}^1 (5 + 2s) ds = (5s + s^2) \Big|_{-2}^1 = (5 + 1) - (10 + 4) = 6 - 14 = -8 \\ 0 &= \int_{-2}^1 5 ds + \int_{-2}^1 2s ds = 5s \Big|_{-2}^1 + s^2 \Big|_{-2}^1 = (5 - 10) + (1 - 4) = -5 - 3 = -8 \\ 0 &= (2 + 1)(3 + 1) \end{aligned}$$

$$\boxed{2} = 1, \boxed{3} = 1$$

السؤال الرابع : اذا كان  $\int_0^1 18 = bs$  جد قيمة الثابت ب

$$\begin{aligned} 18 &= \int_0^1 bs \\ \text{الحل :} & \leftarrow 18 = (2 \times b) - (0 \times b) \leftarrow \frac{18}{3} = \frac{b \cdot 3}{3} \leftarrow b = 6 \\ & 18 = b \cdot 2 - b \cdot 0 \end{aligned}$$

السؤال الخامس : اذا كان  $\int_1^2 (s^3 + 2s^2 + 3s) ds = 30$  احسب قيمة ع

$$\begin{aligned} (2 + 1) - (1 + 27) &= \int_1^2 (s^3 + 2s^2 + 3s) ds \\ \boxed{30} &= 3 - 33 \\ &= (1 \times 2 + 3(1)) - (3 \times 2 + 3 \cdot 3) \end{aligned}$$

$$= \int_1^2 \frac{1}{s} ds \quad \text{(وزاري ٢٠١٦) قيمة}$$

$$\int_1^2 (3s^2 + 2s) ds = (s) \text{ ك (س) } = (1) \text{ ل (١)}$$

$$\begin{aligned} 0 &= (s) \text{ ل (س)} \\ 0 &= (1) \text{ ل (١)} \end{aligned}$$

$$\int_1^2 s^{\frac{3}{2}} \times s^{\frac{1}{2}} ds =$$

$$\int_1^2 \frac{s^3}{3} = s^2 \int_1^2 = s^{\frac{4}{2}} \int_1^2 = \int_1^2 \frac{2}{3} ds \quad \text{(٢٠٠٧ / ٢٠١٦) الحل}$$

$$\boxed{\frac{8}{3}} = 0 - \frac{1}{3} = \left(\frac{2}{3}\right) - \left(\frac{2}{3}\right) =$$

$$= \left[ \begin{array}{l} 3 \\ 2 \end{array} \right] \text{س} (2 + 3\text{س}) \text{س} \text{ (اكمال ٢٠١٦) قيمة}$$

$$(2007) \left[ \begin{array}{l} 4 \\ 2 \end{array} \right] \text{س} (7 - 8\text{س}) \text{س}$$

$$\begin{aligned} \left[ \begin{array}{l} 4 \\ 2 \end{array} \right] (7\text{س} - 8\text{س}^2) &= \left[ \begin{array}{l} 4 \\ 2 \end{array} \right] \left( 7\text{س} - \frac{8\text{س}^2}{2} \right) = \\ (2 \times 7 - 2(2)8) - (4 \times 7 - 2(4)8) &= \\ (14 - 16) - (28 - 64) &= \\ (2) - (28 - 64) &= \\ \boxed{34} = 2 - 36 = \end{aligned}$$

$$= \left[ \begin{array}{l} 3 \\ 1 \end{array} \right] \text{س} (1 + 2\text{س}) \text{س} = 6 \text{ فان } 2 = 4$$

$$\text{مثال (3) اذا كان } \left[ \begin{array}{l} 6 \\ 2 \end{array} \right] \text{س} (3 + 4\text{س}) \text{س} = 90 \text{ جد قيمة ب}$$

$$0 = (2\text{ب} + 3) \text{س}$$

$$0 = (3 + 2\text{ب}) \text{ب}$$

$$\boxed{\text{ب} = \frac{3-}{2}}$$

$$90 = \left[ \begin{array}{l} 6 \\ 2 \end{array} \right] \text{س}^3 + \frac{2\text{س}^4}{2} = 90 = \left[ \begin{array}{l} 6 \\ 2 \end{array} \right] \text{س}^3 + 2\text{س}^2 = 90$$

$$90 = (2\text{ب} + 3) \text{س}^3 - (90) = (2\text{ب} + 3) \text{س}^3 - (6 \times 3 + 2(6)2) = 0 = (2\text{ب} + 3) \text{س}^3$$

$$(2017) \text{ اذا كان } \left[ \begin{array}{l} 3 \\ 1 \end{array} \right] \text{س} (1 - 2\text{س}) \text{س} = 0 \text{ . فان قيم ب الممكنة هي:}$$

$$\text{اكمال ٢٠٠٨) اذا كان ق(1) = 8 ، ق(0) = 6 فان } \left[ \begin{array}{l} 0 \\ 1 \end{array} \right] \text{س} (س) = 0$$

$$= \left[ \begin{array}{l} 0 \\ 1 \end{array} \right] \text{س} (س) = 0 = \left[ \begin{array}{l} 0 \\ 1 \end{array} \right] (س) = 0 = 0 - (0) = 0$$

$$\boxed{2} = 8 - 6 =$$



$$\text{وزاري ٢٠٠٩ : جد } \left[ \begin{array}{l} 2 \\ 2 \end{array} \right] \text{س} (2 + 3\text{س}) \text{س}$$

$$= \left[ \begin{array}{l} 2 \\ 2 \end{array} \right] \text{س} (2 + 3\text{س}) \text{س} =$$

$$\left[ \begin{array}{l} 2 \\ 2 \end{array} \right] \left( 2\text{س} + \frac{3\text{س}^2}{2} \right) = \left[ \begin{array}{l} 2 \\ 2 \end{array} \right] \frac{2\text{س}^2}{2} + \frac{3\text{س}^3}{2} =$$

$$\frac{40}{3} = 8 + \frac{16}{3} = (0) - (2(2)2 + \frac{3(2)2}{3})$$

وزاري ٢٠٠٩  $\left[ \begin{array}{l} 2 \\ 3 \end{array} \right]_{\text{س}} = \text{س} ( \text{ب} + \text{س} )$  فما قيمة ب :

$$\begin{aligned} \left[ \begin{array}{l} 2 \\ 3 \end{array} \right]_{\text{س}} = \left[ \begin{array}{l} 2 \\ 3 \end{array} \right]_{\text{س}} & \leftarrow \text{س} ( \text{ب} + \text{س} ) \\ (3 \times 2) - (1 \times 2) &= (1 \times \text{ب} + 2) - (2 \times \text{س} + 3) \\ 6 - 2 &= (\text{ب} + 2) - (2\text{س} + 3) \\ 4 &= \text{ب} - 2\text{س} - 1 \\ 5 &= \text{ب} - 2\text{س} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 3 &= \text{ب} + 3 \\ 3 &= \text{ب} + 3 \\ \frac{3}{5} &= \frac{3}{5} = \frac{\text{ب}}{5} \end{aligned}$$

اكمال ٢٠١١ : اذا كان  $\frac{\text{س}}{1+\text{س}} = \text{س} ( \text{س} )$  فإن  $\left[ \begin{array}{l} 1 \\ 2 \end{array} \right]_{\text{س}}$

$$\left[ \begin{array}{l} 1 \\ 2 \end{array} \right]_{\text{س}} = \frac{1}{1+\text{س}} - \frac{1}{1+1} = (0) - (1) = -1 = \text{س} ( \text{س} )$$

وزاري ٢٠١٢ : اذا كان  $\left[ \begin{array}{l} 2 \\ 3 \end{array} \right]_{\text{س}} = \text{س} ( \text{س} ) + \frac{4}{\text{س}} + \text{ج}$  ، جد  $\left[ \begin{array}{l} 1 \\ 2 \end{array} \right]_{\text{س}}$

اكمال ٢٠١٧ : اذا كان  $\text{س} ( \text{س} ) + \frac{4}{\text{س}} + \text{ج} = \left[ \begin{array}{l} 2 \\ 3 \end{array} \right]_{\text{س}}$  فإن  $\left[ \begin{array}{l} 1 \\ 2 \end{array} \right]_{\text{س}} = \text{س} ( \text{س} )$

$$\begin{aligned} \left[ \begin{array}{l} 2 \\ 3 \end{array} \right]_{\text{س}} = \text{س} ( \text{س} ) + \frac{4}{\text{س}} + \text{ج} & \leftarrow \left[ \begin{array}{l} 2 \\ 3 \end{array} \right]_{\text{س}} \\ (2 \times 3) - (1 \times 2) &= (2 \times \text{س} + 3) + \frac{4}{\text{س}} + \text{ج} \\ 6 - 2 &= (2\text{س} + 3) + \frac{4}{\text{س}} + \text{ج} \\ 4 &= 2\text{س} + 3 + \frac{4}{\text{س}} + \text{ج} \\ 1 &= 2\text{س} + \frac{4}{\text{س}} + \text{ج} \end{aligned}$$

اذا كانت  $\left[ \begin{array}{l} 1 \\ 2 \end{array} \right]_{\text{س}}$  هي مشتقة الاقتران  $\text{س} ( \text{س} )$  وكان  $\text{س} ( 3 ) = 8$  ،  $\left[ \begin{array}{l} 1 \\ 2 \end{array} \right]_{\text{س}} = 20$  جد قيمة  $\text{س} ( 6 )$

$$\begin{aligned} 20 &= \left[ \begin{array}{l} 1 \\ 2 \end{array} \right]_{\text{س}} = \text{س} ( \text{س} ) \\ 20 &= 8 - (6) \\ 28 &= (6) \end{aligned}$$

٢٠١٨ : اذا كان  $\left[ \begin{array}{l} 1 \\ 2 \end{array} \right]_{\text{س}}$  هي المشتقة الأولى للاقتران  $\text{س} ( \text{س} )$  وكان  $\text{س} ( 2 ) = 9$  ،  $\left[ \begin{array}{l} 1 \\ 2 \end{array} \right]_{\text{س}} = 15$  فان قيمة  $\text{س} ( 5 )$

٢٠١٧ : اذا كان  $\left[ \begin{array}{l} 1 \\ 2 \end{array} \right]_{\text{س}}$  هي المشتقة الأولى للاقتران  $\text{س} ( \text{س} )$  وكان  $\text{س} ( 2 ) = 9$  ،  $\left[ \begin{array}{l} 1 \\ 2 \end{array} \right]_{\text{س}} = 15$  فان قيمة  $\text{س} ( 5 )$

إذا كان  $\bar{C}(S) = 2S^3 + 2S + J$  وكان  $\bar{C}(2) = 26$  جد قيمة الثابت ب .

$$\begin{aligned} \bar{C}(S) &= 2S^3 + 2S + J \\ \bar{C}(S) &= (S) \quad \bar{C}(2) = 26 \\ \bar{C}(S) &= 2S^3 + 2S + J \\ \bar{C}(2) &= 2(2)^3 + 2(2) + J = 26 \\ 26 &= 2(8) + 4 + J \\ 26 &= 16 + 4 + J \\ 26 &= 20 + J \\ J &= 26 - 20 \\ J &= 6 \end{aligned}$$

(اكمال ٢٠١٧) إذا كان  $\bar{C}(S) = (S^2 - 2S + 1)S$  فاوجد قيمة/ قيم الثابت أ



## ثانياً: خصائص التكامل المحدود

الخاصية الأولى: اذا كان ق(س) = ج ← ج ⊃ ح

فإن  $\int_a^b ج س = ج(ب - أ)$

امثلة :

$$\int_2^5 ب س = ١٨ \quad (٣)$$

$$\leftarrow ب(٥ - ٢) = ١٨$$

$$\leftarrow \frac{١٨}{٣} = \frac{٣ \times ب}{٣} \leftarrow ب = ٦$$

$$\int_1^4 س س = ٤(١ - ٧) \quad (١)$$

$$\boxed{٢٤} = ٦ \times ٤ =$$

$$\int_1^2 س ٦ = ٦(٢ - ١) \quad (٢)$$

$$\boxed{٢٤} = ٤ \times ٦ =$$

$$\int_1^2 ب س = ١ - ٢ \quad (٢٠١٨) \text{ فان قيمة / قيم الثابت ب =}$$

$$\int_1^2 ب س = ٦ \quad \text{وكان ب عدداً حقيقياً موجباً فما قيمة ب} \quad (٤)$$

(اكمل ٢٠١٧)

$$\int_3^4 س ٢ = ٢٤$$

، فإن قيمة ج تساوي

$$ب(ب - ١) = ٦$$

$$ب = ب - ٢$$

$$٠ = ٦ - ب - ٢$$

$$٠ = (٣ - ب)(٢ + ب)$$

$$\boxed{ب = ٣} \leftarrow ب = ٢ - ٣ = -١$$



$$\int_a^b س(س) = ٠ \quad (١)$$

الخاصية الثانية :  $\int_a^b س(س) = \int_a^b س(س) - \int_a^b س(س)$

مثال (١) اذا كان  $\int_1^4 س(س) = ٣ \leftarrow \int_1^2 س(س) = ٣ - ٤$

مثال (٢) :  $\int_1^4 س \left( \frac{٣ - س}{١ - س} \right) = ٠$  ،  $\int_1^2 س(٨ + س) = ٠$  ،  $\int_1^4 س(٤ - س) = ٠$

الخاصية الثالثة :  $\dot{A} \dot{B} = \dot{A} \dot{B}$  ،  $\dot{A} \dot{B} = \dot{A} \dot{B}$

الخاصية الرابعة :  $\dot{A} \dot{B} \pm \dot{C} \dot{D} = \dot{A} \dot{B} \pm \dot{C} \dot{D}$  ،  $\dot{A} \dot{B} \pm \dot{C} \dot{D} = \dot{A} \dot{B} \pm \dot{C} \dot{D}$

مثال : اذا كان  $\dot{A} \dot{B} = 3$  ،  $\dot{C} \dot{D} = 2$  اوجد :

$$\dot{A} \dot{B} \dot{C} \dot{D} = \dot{A} \dot{B} \dot{C} \dot{D}$$

$$\boxed{6} = 2 \times 3 =$$

$$\dot{A} \dot{B} \dot{C} \dot{D} = \dot{A} \dot{B} \dot{C} \dot{D}$$

$$\dot{A} \dot{B} \dot{C} \dot{D} = \dot{A} \dot{B} \dot{C} \dot{D}$$

$$\boxed{5} = 2 + 3 =$$

$$\dot{A} \dot{B} \dot{C} \dot{D} = \dot{A} \dot{B} \dot{C} \dot{D}$$

$$\dot{A} \dot{B} \dot{C} \dot{D} = \dot{A} \dot{B} \dot{C} \dot{D}$$

$$\boxed{4} = 6 + 2 = 3 \times 2 - 2 =$$

$$\dot{A} \dot{B} \dot{C} \dot{D} = \dot{A} \dot{B} \dot{C} \dot{D}$$

$$\dot{A} \dot{B} \dot{C} \dot{D} = \dot{A} \dot{B} \dot{C} \dot{D}$$

$$\boxed{7} = 1 + 6 = 2 \times \frac{1}{2} + 3 \times 2 =$$

لجنة (٢٠١٩) : اذا كان  $\dot{A} \dot{B} = 10$

فإن  $\dot{A} \dot{B} = \frac{1}{2}$

لجنة ٢٠٠٩ : اذا كان  $\dot{A} \dot{B} = 6$  فإن  $\dot{A} \dot{B} = 3$

نتقي المعطيات  $\dot{A} \dot{B} = \frac{6}{2} = 3$  نقية

المطلوب :  $\dot{A} \dot{B} = 3 \times 3 = 9$

إكمال ٢٠٠٧ : اذا كان  $\dot{A} \dot{B} = 4$  فإن  $\dot{A} \dot{B} = 2$

الحل :  $\dot{A} \dot{B} = 2 \times 2 = 4$

لجنة ٢٠٠٩: اذا كان  $\left[ \begin{matrix} 2 \\ 1 \end{matrix} \right]_{(s)} = 4$  جد  $\left[ \begin{matrix} 3 \\ 2 \end{matrix} \right]_{(s)}$

الحل: اولا المعطيات غير نقيه: نقوم بتنقيتها

$$\left[ \begin{matrix} 2 \\ 1 \end{matrix} \right]_{(s)} = 4 \Leftrightarrow \frac{2}{1} = 2s \Leftrightarrow \frac{2}{2} = s \Leftrightarrow 1 = s$$

(اكمال ٢٠١٩) اذا كان  $\left[ \begin{matrix} 3 \\ 2 \end{matrix} \right]_{(s)} = 6$  جد  $\left[ \begin{matrix} 2 \\ 1 \end{matrix} \right]_{(s)}$

$$\left[ \begin{matrix} 3 \\ 2 \end{matrix} \right]_{(s)} = 6 \Leftrightarrow$$

مثال (٥) اذا كان  $\left[ \begin{matrix} 2 \\ 1 \end{matrix} \right]_{(s)} = 9$  جد  $\left[ \begin{matrix} 7 \\ 2 \end{matrix} \right]_{(s)}$

$$\begin{aligned} & \left[ \begin{matrix} 2 \\ 1 \end{matrix} \right]_{(s)} + \left[ \begin{matrix} 3 \\ 2 \end{matrix} \right]_{(s)} \\ & (2-1)2 + 2 \times 3 = \\ & \boxed{8} = 2 + 6 = \end{aligned}$$

لجنة ٢٠١٢: اذا كان  $\left[ \begin{matrix} 3 \\ 4 \end{matrix} \right]_{(s)} = 3$  جد  $\left[ \begin{matrix} 1 \\ 2 \end{matrix} \right]_{(s)}$

$$\left[ \begin{matrix} 1 \\ 2 \end{matrix} \right]_{(s)} + \left[ \begin{matrix} 3 \\ 4 \end{matrix} \right]_{(s)} = 3 \Leftrightarrow$$

اكمال ٢٠١٨: اذا كان  $\left[ \begin{matrix} 2 \\ 1 \end{matrix} \right]_{(s)} = 6$

$$\frac{2}{1} = 6 \Leftrightarrow \frac{2}{6} = \frac{1}{3} = s$$

$\left[ \begin{matrix} 2 \\ 2 \end{matrix} \right]_{(s)} + \left[ \begin{matrix} 1 \\ 1 \end{matrix} \right]_{(s)} = 18$  فما قيمة ب؟

$$\begin{aligned} & 3 - ((1/2) \cdot 2) - ((4/2) \cdot 2) = \\ & 3 - ((1 \times 2) - (2 \times 2)) = \\ & \boxed{1} = 3 - (2 - 4) = \end{aligned}$$

## لحل أي مسألة تكامل على الخصائص

يجب ان نتحقق ان السؤال على الخصائص وذلك!!

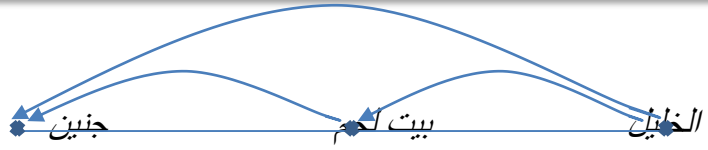
( يكون السؤال على الخصائص اذا كان يحتوي بداخله  $\left[ \begin{matrix} q \\ s \end{matrix} \right]$ ، هـ(س).... في المعطيات )

حيث نقوم بما يلي

- ١- ننقي المعطيات اذا كانت غير منقيه ونبروز النقي منها .
- ٢- نأخذ المطلوب ونوزع التكامل اذا كان به جمع أو طرح.
- ٣- نستخدم الخصائص لما يحتاج الى خصائص ونحل الباقي كتكامل عادي.



الخاصية الخامسة (خاصية الإضافة) :  $\int_a^b f(x) dx + \int_b^c f(x) dx = \int_a^c f(x) dx$



حتى تتحقق خاصية الإضافة هناك ثلاث شروط

- ١- نفس الاقتران
- ٢- يفصل بينهما اشارة جمع (+)
- ٣- احد الحدود العليا للتكامل = الحد السفلي للآخر.

مثال (٦) : اذا كان  $\int_2^6 f(x) dx = 4$  ،  $\int_6^8 f(x) dx = 2$  اوجد  $\int_2^8 f(x) dx$  ؟

$$\begin{aligned} & \int_2^8 f(x) dx \\ & \left( \int_2^6 f(x) dx + \int_6^8 f(x) dx \right) = \int_2^8 f(x) dx \Leftrightarrow \\ & (4 + 2) = \\ & \boxed{6} = 6 \times 1 = \end{aligned}$$

اكمال ٢٠٠٧ اذا علمت ان  $\int_1^4 f(x) dx = 4$  ،  $\int_4^9 f(x) dx = 12$  ، جد  $\int_1^9 f(x) dx$

(٢٠١٨) اذا كان  $\int_1^4 f(x) dx = 4$  ،  $\int_4^9 f(x) dx = 12$  ،  
فان  $\int_1^9 f(x) dx =$

$$\int_1^9 f(x) dx = \int_1^4 f(x) dx + \int_4^9 f(x) dx = 4 + 12 = 16$$

اكمال ٢٠١٤ : اذا كان  $\int_1^4 f(x) dx = 9$  ،  $\int_4^9 f(x) dx = -4$  ، جد قيمة  $\int_1^9 f(x) dx$

(لجنة ٢٠١٦) اذا علمت ان  $\int_1^3 f(x) dx = 12$  ،  $\int_3^6 f(x) dx = -4$  ، جد  $\int_1^6 f(x) dx$

٢٠٠٧) اذا علمت ان  $\int_1^3 (x^2 + x) dx = 10$  احسب  $\int_1^3 (x^2 + x) dx$

الحل : ننقي المعطيات  $\int_1^3 (x^2 + x) dx = 10 \Leftrightarrow \int_1^3 x^2 dx + \int_1^3 x dx = 10$

نوزع التكامل

$$\int_1^3 (x^2 + x) dx = \int_1^3 x^2 dx + \int_1^3 x dx = \left[ \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} \right]_1^3 = \left( \frac{27}{3} + \frac{9}{2} \right) - \left( \frac{1}{3} + \frac{1}{2} \right) = 9 + \frac{16}{2} - \frac{5}{6} = 17$$

٢٠١٠) اذا كان  $\int_1^3 (x^2 + x) dx = 3$  ،  $\int_1^3 (x^2 + x) dx = 5$  جد  $\int_1^3 (x^2 + x) dx$

(١)  $\int_1^3 (x^2 + x) dx = \int_1^3 x^2 dx + \int_1^3 x dx = 3 + 5 = 8$

(٢)  $\int_1^3 (x^2 + x) dx = \int_1^3 (x^2 + x) dx + \int_1^3 (x^2 + x) dx = 2 \int_1^3 (x^2 + x) dx = 2 \times 3 = 6$

(وزاري ٢٠١١) اذا كان  $\int_1^3 (x^2 + x) dx = 6$  ،  $\int_1^3 (x^2 + x) dx = 2$  جد  $\int_1^3 (x^2 + x) dx$

(٢٠١٧) اذا كان  $\int_1^3 (x^2 + x) dx = 8$  ،  $\int_1^3 (x^2 + x) dx = 7$  ، فان  $\int_1^3 (x^2 + x) dx =$

$\int_1^3 (x^2 + x) dx = 3 \Leftrightarrow \int_1^3 x^2 dx + \int_1^3 x dx = 3$

$\int_1^3 (x^2 + x) dx = \int_1^3 x^2 dx + \int_1^3 x dx = 3 - 2 = 1$

(٢٠١٧) اذا كان  $\binom{n}{2} + \binom{n}{3} + \dots + \binom{n}{n} = 73$  ، جد  $\binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \dots + \binom{n}{n}$  يساوي :

$$\binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \dots + \binom{n}{n} = 2^n - 1$$

$$\boxed{63} = (2^n - 1) =$$

$$\boxed{10} = \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \dots + \binom{n}{n} = 73$$

$$73 = \cancel{63} + \binom{n}{n} = 2^n - 1 + 1 = 2^n$$

$$10 = \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \dots + \binom{n}{n} = 2^n - 1$$

$$\boxed{5} = \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \dots + \binom{n}{n} = 2^n - 1$$

$$\binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \dots + \binom{n}{n} = 2^n - 1$$

$$10 + 5 =$$

$$\boxed{5} =$$

الاجابة = ٨

(اكمل ٢٠١٧) اذا علمت أن  $\binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \dots + \binom{n}{n} = 8$  ، جد  $\binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \dots + \binom{n}{n}$



## تمارين ومسائل (٧-١) ص ٤٢

(١) احسب التكاملات التالية :

$$\int_0^1 (2s - 7) ds = \int_0^1 \left( \frac{2s^2}{2} - 7s \right) ds = \left[ \frac{2s^3}{6} - \frac{7s^2}{2} \right]_0^1$$

$$\begin{aligned} &= \left( \frac{2}{6} - \frac{7}{2} \right) - \left( \frac{0}{6} - \frac{0}{2} \right) = \\ &= \left( \frac{1}{3} - \frac{7}{2} \right) - \left( \frac{0}{3} - \frac{0}{2} \right) = \\ &= \frac{2}{6} - \frac{7}{2} = \frac{1}{3} - \frac{7}{2} = \frac{2}{6} - \frac{21}{6} = \frac{-19}{6} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\int_0^1 \left( s + \frac{2s^3}{4} \right) ds = \int_0^1 \left( s + \frac{1}{2}s^3 \right) ds = \left[ \frac{s^2}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{s^4}{4} \right]_0^1 \\ &= \left( \frac{1^2}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1^4}{4} \right) - \left( \frac{0^2}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{0^4}{4} \right) = \\ &= \left( \frac{1}{2} + \frac{1}{8} \right) - \left( \frac{0}{2} + \frac{0}{8} \right) = \\ &= \frac{4}{8} + \frac{1}{8} = \frac{5}{8} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\int_0^1 \left( s^3 + \frac{2}{3}s^2 \right) ds = \int_0^1 \left( s^3 + \frac{2}{3}s^2 \right) ds = \left[ \frac{s^4}{4} + \frac{2}{3} \cdot \frac{s^3}{3} \right]_0^1 \\ &= \left( \frac{1^4}{4} + \frac{2}{3} \cdot \frac{1^3}{3} \right) - \left( \frac{0^4}{4} + \frac{2}{3} \cdot \frac{0^3}{3} \right) = \\ &= \left( \frac{1}{4} + \frac{2}{9} \right) - \left( \frac{0}{4} + \frac{0}{9} \right) = \\ &= \frac{9}{36} + \frac{8}{36} = \frac{17}{36} \end{aligned}$$

(٢) إذا كان  $\int_0^2 (s) ds = 2 - 2s$  فما قيمة  $\int_0^2 (s) ds$  ؟

$$\begin{aligned} &\int_0^2 (s) ds = 2 - 2s \\ &\int_0^2 (s) ds = \left[ \frac{s^2}{2} \right]_0^2 = \frac{2^2}{2} - \frac{0^2}{2} = \frac{4}{2} - \frac{0}{2} = 2 - 0 = 2 \end{aligned}$$

(٣) إذا كان  $\int_0^3 (s) ds = 12$  فما قيمة  $\int_0^3 (s^2 + 1 - s) ds$  ؟

$$\int_0^3 (s) ds = 12 \Rightarrow \int_0^3 (s) ds = 12$$

$$\begin{aligned} &\int_0^3 (s^2 + 1 - s) ds = \int_0^3 (s^2) ds + \int_0^3 (1) ds - \int_0^3 (s) ds \\ &= \left[ \frac{s^3}{3} \right]_0^3 + \left[ s \right]_0^3 - \left[ \frac{s^2}{2} \right]_0^3 \\ &= \frac{3^3}{3} + 3 - \frac{3^2}{2} = \frac{27}{3} + 3 - \frac{9}{2} = 9 + 3 - \frac{9}{2} = 12 - \frac{9}{2} = \frac{24}{2} - \frac{9}{2} = \frac{15}{2} \end{aligned}$$

٤) اذا كان  $\int_{-1}^0 (س + ب) دس = ١٢$  فما قيمة الثابت ب ؟

$$\begin{aligned} ١٢ &= \int_{-1}^0 (س + ب) دس \\ ١٢ &= ((٣) + ب(٣)) - ((٥) + ب(٥)) \\ ١٢ &= ب٣ - ٩ - ب٥ + ٢٥ \\ ١٢ &= ١٦ + ب٢ \\ \boxed{ب = ٢ -} &\leftarrow ٤ - = ب٢ \end{aligned}$$

٥) اذا كان  $\int_{-1}^{\bar{3}} (س٦) دس = ٠$ ، فما قيمة / قيم الثابت ج ؟

$$\begin{aligned} ٠ &= \int_{-1}^{\bar{3}} (س٦) دس \\ ٠ &= (٦(٣) - ٦(٣)) - (٦(٣) - ٦(٣)) \\ ٠ &= ٣ - ٦ج٣ \\ ٣ &= ٦ج٣ \\ \boxed{١ \pm = ج} & \end{aligned}$$

٦) اذا كان  $\int_{-1}^0 (س) دس = ٣$  ،  $\int_{-1}^0 (س) دس = ٧$  فما قيمة  $\int_{-1}^0 (٢(س) - (س) هـ - (س) دس) دس$  ؟

(اكمال ٢٠١٩) اذا كان  $\int_{-1}^0 (س) دس = ٣$  ،  $\int_{-1}^0 (س) دس = ٧$

فما قيمة  $\int_{-1}^0 (٢(س) - (س) هـ - (س) دس) دس$  ؟ ٧ علامات

$$\int_{-1}^0 (س) دس = ٣ ، \int_{-1}^0 (س) دس = ٧$$

$$\begin{aligned} \int_{-1}^0 (٢(س) - (س) هـ - (س) دس) دس &= \\ \boxed{٤٠} &= ٢٠ \times ٢ = (٧ - + ١٣) ٢ = \end{aligned}$$

٧) اذا كان  $\int_{-1}^0 (س) دس = ٣$  ،  $\int_{-1}^0 (س) دس = ٩$  ، فما قيمة  $\int_{-1}^0 (٤(س) - (س) دس) دس$  ؟ (الجنة ٢٠١٩)

$$\int_{-1}^0 (٤(س) - (س) دس) دس = \frac{٩-}{٣} = \int_{-1}^0 (٣ -) دس \leftarrow \int_{-1}^0 (٣ -) دس = ٣ -$$

$$\begin{aligned} \int_{-1}^0 (٤(س) - (س) دس) دس &= \\ \boxed{٢٤} &= ٦ \times ٤ = (٣ + ٣) ٤ = \end{aligned}$$

## تمارين عامة (١)

س١. أختار رمز الإجابة الصحيحة :

١. إذا كان  $u = \frac{2}{s}$  ،  $s \neq 0$  ، فما قيمة  $u < (١)$  ؟

- (أ) -٨ (ب) ٨ (ج) **-٢** (د) ٢

$$\bar{u} = \frac{32 - 4 \times 8 - 0 \times 4}{2(4)} = \frac{4 \times 8 - 0 \times 4}{2(4)} = \frac{32 - 0}{8} = \frac{32}{8} = 4$$

$$\bar{u} = \frac{32 - 0}{16} = \frac{32}{16} = 2$$

٢. ما ميل القاطع الذي يقطع منحنى الاقتران  $u = 3s - 2$  عند  $s = 1$  ،  $s = 2$  ؟

- (أ) **٣** (ب) -٦ (ج) ١٢ (د) ٩

$$\text{ميل القاطع} = \frac{\Delta v}{\Delta s} = \frac{u(1) - u(2)}{1 - 2} = \frac{(3 \times 1 - 2) - (3 \times 2 - 2)}{1 - 2} = \frac{1 - 4}{-1} = \frac{-3}{-1} = 3$$

٣. إذا كان متوسط التغير في الاقتران  $u$  يساوي  $\frac{3}{2}$  ، وكان  $\Delta s = 6$  ، فما قيمة  $\Delta v$  ؟

- (أ) **٩** (ب) ٣ (ج) ١٨ (د) ٦

$$\frac{\Delta v}{\Delta s} = \frac{3}{2} \Rightarrow \Delta v = \frac{3}{2} \times 6 = 9$$

٤. ما ميل المماس لمنحنى الاقتران  $u = (5s - 1) \times (2s)$  عند  $s = 1$  ؟

- (أ) ٨ (ب) ١٠ (ج) **١٨** (د) ١٠

$$\bar{u} = (5 \times 1 - 1) \times (2 \times 1) = 4 \times 2 = 8$$

$$\bar{u} = (5 \times 2 - 1) \times (2 \times 2) = 9 \times 4 = 36$$

$$\boxed{18} = 36 - 8$$

٥. إذا كان  $u = \frac{1 + 3s^2}{s - 2}$  ،  $s \neq 2$  ، فما قيمة  $u < (٣)$  ؟

- (أ) ٣٧ (ب) -٣٧ (ج) **١٠** (د) ١

$$\bar{u}(s) = \frac{1 - \times (1 + {}^2 s^3) - s^6 \times (s - 2)}{{}^2 (s - 2)}$$

$$\bar{u}(3) = \frac{1 - \times (1 + {}^2 (3)^3) - (3)^6 \times ((3) - 2)}{{}^2 ((3) - 2)}$$

$$\boxed{10} = \frac{(1 - \times 28) - (18 \times 1 -)}{{}^2 (1 -)}$$

٦. إذا كان  $u(7) = 5$  ،  $h(7) = 2$  ،  $u(7) = 3$  ،  $h(7) = 1$  فما قيمة  $(2 \times 3 \times 7)(7)$  ؟

(أ) ٦٦ (ب) ٦- (ج) ٦ (د) ١٨-

$$(2 \times 3 \times 7)(7) = (7) \times 2 \times (7) \times 3 \times (7) \times 3 \times (7) \times 2 = 3 \times 2 \times 2 \times 3 + 1 - \times 3 \times 5 - \times 2 =$$

$$\boxed{66} = 36 + 30$$

٧. إذا كان للاقتران  $u(s)$  قيمة عظمى محلية عند النقطة  $(5, 10-)$  ، فما قيمة  $u(10-)$  .

(أ) ٥ (ب) ١٠- (ج) صفر (د) ٣

للاقتران  $u(s)$  قيمة عظمى محلية عند النقطة  $(5, 10-)$  ،  $u(10-) = 0$

٨. إذا كان  $u(s) = s^2 - 4s + 3$  ، فما قيمة  $u(2)$  ؟

(أ) ١٢ (ب) صفر (ج) ٧ (د) ٨

الحل نشتق الطرفين

$$\bar{u}(s) = s^2 - 4s = 4 - 6s$$

$$\boxed{8} = 4 - (2)6 = (2)u$$

٩. إذا كان  $u(s) = (5s^3 + 2 - s^3) \times s^2$  ، فما قيمة  $u(8)$  ؟

(أ) ٢٤ (ب) ٤٤ (ج) صفر (د) ٢ مشتقة التكامل المحدود = صفر

١٠. إذا كان  $u(s) = 2 \times (s) \times s = 6$  ،  $u(s) = 4$  ، فما قيمة  $u(2 + (s) \times 3) \times s$  ؟

(أ) ٣٢ (ب) ٩ (ج) ٣٣ (د) ٣

س٢) اذا كان  $ق(س) = س^3 - جس - ٦$  وكانت  $ق(س) = ٠$  = صفر اجد قيمة الثابت ج

$$ق(س) = س^3 - جس - ٦ = ٠$$

$$ق(٢) = (٢)^3 - ٢ج - ٦ = ٠$$

$$ج = ١٢$$

س٣) ما متوسط التغير في الاقتران  $ق(س) = س - ٢$  ، عندما تتغير س من  $س_١ = ١١$  إلى  $س_٢ = ١٨$  ؟

$$\frac{\Delta ص}{\Delta س} = \frac{ق(١٨) - ق(١١)}{١٨ - ١١} = \frac{٢ - ١١ - ٢ - ١١}{١١ - ١٨}$$

$$\frac{١}{٧} = \frac{٣ - ٤}{١١ - ١٨} = \frac{٩ - ١٦}{١١ - ١٨} =$$

س٤) اذا كان  $ق(س) = س^3 - ١٢س - ٣$  ، اجد قيمة / قيم س بحيث  $ق(س) = ٠$  = صفر؟

$$ق(س) = س^3 - ١٢س - ٣ = ٠$$

$$ق(٢) = (٢)^3 - ١٢(٢) - ٣ = ٠$$

$$١٢ = ٢س$$

$$٦ = س$$

$$س = ٦ \pm$$

س٥) اذا كان  $ق(س) = (١ + س)س = ٢٤$  اجد قيمة / قيم الثابت ب ؟

$$\frac{٢س^٢}{٢} + ١س = ٢٤ \Rightarrow س^٢ + س = ٢٤$$

$$٢٤ = (٥ + س)(٥ + س) - (٣٠) = (٦ + س)(٦ + س) - (٣٠)$$

$$٠ = ٦ - ب + س^٢ \Rightarrow ٠ = ٦ - ب + س^٢$$

$$٠ = (٣ + ب)(٢ - ب)$$

$$\Rightarrow ب = ٣ ، ب = ٢$$

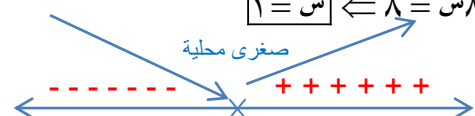
س٦) اذا كان  $ق(س) = س^2 - ٨س + ١$  :

أ) فما فترات التزايد والتناقص للاقتران  $ق(س)$  ؟

$$ق(س) = س^2 - ٨س + ١$$

$$ق'(س) = ٨ - ٢س = ٠$$

$$٨ = ٢س \Rightarrow س = ٤$$





نفس ١ عكس

- هـ (س) متناقص على الفترة  $(-1, 0)$  لان  $f'(s) > 0$
- هـ (س) متزايد على الفترة  $(0, 1)$  لان  $f'(s) < 0$

ب) ما القيم القصوى للاقتزان هـ (س) ، وما نوعها ؟

للاقتزان هـ (س) قيمة صغرى محلية عند  $s = 1$  قيمتها

$$13 = f(1) = 1 - 4(1) + 8(1)^2 = 1 - 4 + 8 = 5$$

تمت الوحدة الاولى بحمد الله ونوفيقه

