حسام جابر
0599047654

الزخم "كمية التحرك" الخطي
"Linear Momentum"
والدفع "Impulse"

الزخم الخطي (كمية التحرك الخطي)

$\vec{P} = m\vec{v}$ = كتلة الجسم × سرعته

وحدتها $(kg \cdot m/s)$

• كمية فيزيائية متجهة تساوي حاصل ضرب كتلة الجسم في سرعته واتجاهها بنفس اتجاه سرعة الجسم.

س) سيارة كتلتها 1000 kg تسير بسرعة 20 m/s باتجاه الشرق، احسب 1) زخمها 2) طاقتها الحركية

الحل

1) $\vec{P} = m\vec{v} = (1000)(20) = 2 \times 10^4\ kg\,m/s$ باتجاه الشرق

2) $K = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}(1000)(20)^2 = 2 \times 10^5\ J$

"ليس لها اتجاه لأنها كمية قياسية"

س) أثبت أن العلاقة بين زخم الجسم وطاقته الحركية

1) $K = \frac{p^2}{2m}$

2) $P = \sqrt{2Km}$

ملاحظة: هذان القانونان غير مذكورين في الكتاب وإن أردت الحل عليهما يجب إثباتهما أولاً

الحل:

1) $K = \frac{1}{2}mv^2$ ونضرب البسط والمقام في m ⇐ $K = \frac{1}{2}\frac{m^2v^2}{m} = \frac{p^2}{2m}$

أو: الطرف الأيمن: $\frac{p^2}{2m} = \frac{(mv)^2}{2m} = \frac{m^2v^2}{2m} = \frac{1}{2}mv^2 = K$

2) بعد إثبات الفرع الأول: نضرب تبادلياً $K = \frac{p^2}{2m}$ ⇐ $p^2 = 2Km \Rightarrow P = \sqrt{2Km}$

أو: الطرف الأيمن: $\sqrt{2Km} = \sqrt{2(\frac{1}{2}mv^2)(m)} = \sqrt{m^2v^2} = mv = P$

س) كرة كتلتها 20 gm تتحرك نحو الغرب بطاقة حركية 9 J، احسب زخمها

الحل: $m = 20 \times 10^{-3}$

$K = \frac{1}{2}mv^2 \Rightarrow 9 = \frac{1}{2}\left(\frac{20}{1000}\right)v^2 \Rightarrow v = \sqrt{900} = 30\ m/s$

⇐ $P = mv = (0.02)(30) = 0.6\ kg\,m/s$ باتجاه الغرب

س) جسم متحرك ، اذا ضوعف زخمه ، احسب النسبة $\frac{K_2}{K_1}$

الحل $K_1 = \frac{P_1^2}{2m}$ "البعد الثاني" ، $K_2 = \frac{P_2^2}{2m} = \frac{(2P_1)^2}{2m} = 4\left(\frac{P_1^2}{2m}\right) = 4K_1 \Leftarrow \frac{K_2}{K_1} = 4$

أي تتضاعف 4 مرات

س) جسم متحرك ، اذا ضوعفت طاقته حركته ، احسب النسبة $\frac{P_2}{P_1}$

الحل $P_1 = \sqrt{2K_1 m}$ "البعد الثاني" ، $P_2 = \sqrt{2(2K_1)m} = \sqrt{2}\sqrt{2K_1 m} = \sqrt{2}\,P_1 \Leftarrow \frac{P_2}{P_1} = \sqrt{2}$

أي تتضاعف $\sqrt{2}$ مرة

س) جسمان متحركان ، $m_2 = 2m_1$ ، $P_2 = 3P_1$ جد النسبة $\frac{K_2}{K_1}$

الحل:

$K = \frac{P^2}{2m} \Rightarrow \frac{K_2}{K_1} = \frac{P_2^2}{\cancel{2}m_2} \times \frac{\cancel{2}m_1}{P_1^2} = \frac{(3P_1)^2}{(2m_1)} \times \frac{m_1}{\cancel{P_1^2}} = \frac{9}{2}$

المقلوب

س) جسمان متحركان ، $m_2 = 4m_1$ ، $K_2 = 9K_1$ جد النسبة $\frac{P_2}{P_1}$

الحل:

$P = \sqrt{2Km} \Rightarrow \frac{P_2}{P_1} = \frac{\sqrt{\cancel{2}K_2 m_2}}{\sqrt{\cancel{2}K_1 m_1}} = \sqrt{\frac{9K_1 \times 4m_1}{K_1\, m_1}} = \sqrt{36} = \frac{6}{1}$

أو طريقة أخرى

$K_2 = 9K_1 \Rightarrow \frac{P_2^2}{\cancel{2}m_2} = 9 \times \frac{P_1^2}{\cancel{2}m_1} \Rightarrow \frac{P_2^2}{4m_1} = 9\frac{P_1^2}{m_1} \Rightarrow P_2^2 = 36P_1^2 \Rightarrow P_2 = 6 \Rightarrow \frac{P_2}{P_1} = \frac{6}{1}$

واجب: ١) جسمان متحركان $P_2 = 2P_1$ ، $K_2 = 3K_1$ جد النسبة $\frac{m_2}{m_1}$ الجواب $\frac{4}{3}$

وزاري 2008: جسمان x و y لهما نفس الكتلة ، اذا كان $K_x = 4K_y$ فان P_x تساوي

أ) $\sqrt{2}P_y$ ب) $\frac{1}{2}P_y$ جـ) $2P_y$ د) $4P_y$

الجواب جـ

س) جسم كتلته 40gm يتحرك شرقاً بسرعة 30 cm/min احسب زخمه

الحل:

$m = 40\times10^{-3}$ ، $V = \frac{30\times10^{-2}}{60} = 5\times10^{-3}$ m/s $\Rightarrow P = mv = 40\times10^{-3} \times 5\times10^{-3} = 2\times10^{-4}$ Kg.m/s شرقاً.

حسام جابر HUSAM JABER

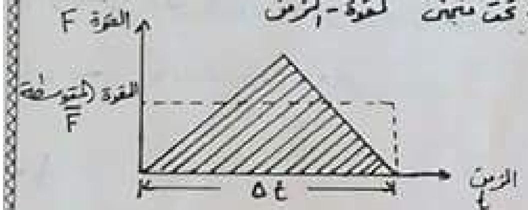
الدفع: Impulse $\vec{I} = \vec{F}\Delta t$ وحدته (N.S)

"كمية فيزيائية متجهة تساوي حاصل ضرب القوة في زمن تأثيرها واتجاهها بنفس اتجاه القوة المؤثرة"

• اذا اثرت عدة قوى ثابتة على جسم فان لكل قوة دفعها الخاص بها

الدفع الكلي (دفع القوة المحصلة): $\vec{I}_{كلي} = \Sigma\vec{F}\cdot\Delta t$ = القوة المحصلة x زمن تأثيرها واتجاهها بنفس اتجاه القوة المحصلة

• **الدفع في حالة القوة المتغيرة = المساحة المحصورة تحت منحنى "القوة - الزمن"**



متوسط قوة الدفع "القوة المتوسطة": $\bar{F} = \frac{I}{\Delta t}$ (المساحة تحت منحنى القوة-الزمن)

متوسط قوة الدفع: القوة الثابتة التي اذا أثرت في الجسم فانها تحدث نفس كمية الدفع الذي تحدثه القوة المتغيرة خلال نفس الفترة الزمنية

س) جسم كتلته 2kg اثرت عليه قوة 50N شرقاً لمدة 3s احسب الدفع الذي احدثته هذه القوة على الجسم

الحل: $\vec{I} = \vec{F}\Delta t = 50(3) = 150$ N.S "شرقاً"

قانون نيوتن الثاني: $\vec{F}_{محصلة} = m\vec{a}$ "الكتلة m ثابتة"

الصيغة العامة لقانون نيوتن الثاني: $\vec{F}_{محصلة} = \frac{\Delta\vec{P}}{\Delta t}$ "صحيحة أيضاً في حالة تغير الكتلة"

وان كانت القوة المسببة للحركة وحيدة ← $\vec{F} = \frac{\Delta\vec{P}}{\Delta t}$

• من هذا القانون يمكن تعريف **القوة**: المعدل الزمني للتغير في الزخم

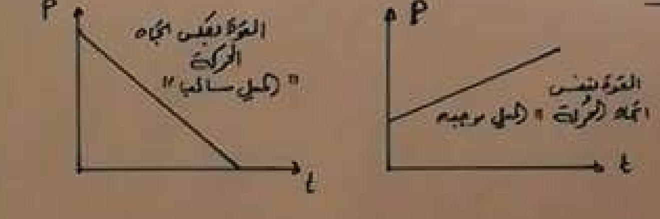
الاشتقاق: $P = mv \Rightarrow \Delta P = m\Delta V$ بافتراض ثبات الكتلة

وبقسمة الطرفين على Δt:

$$\frac{\Delta P}{\Delta t} = m\frac{\Delta V}{\Delta t} = ma = F_{محصلة}$$

• اذا كانت القوة المسببة للحركة ثابتة فان منحنى (P-t) يكون خطاً مستقيماً

الميل = $F = \frac{\Delta P}{\Delta t}$



نظرية الدفع - الزخم "نظرية الدفع - كمية التحرك" : الدفع الذي تحدثه القوة المحصلة في الجسم خلال فترة زمنية ما يساوي التغير في زخم الجسم خلال تلك الفترة"

$$\vec{I}_{\text{كلي}} = \Delta\vec{P} = \vec{F}_{\text{كلي}}\Delta t$$

• اذا كانت القوة المسببة للحركة وحيدة ⇐ $\underset{\text{دفع القوة}}{I} = \underset{\substack{m \times \Delta V \\ m \times (V_2 - V_1)}}{\Delta P} = F\Delta t$

الاثبات: حسب الصيغة العامة لقانون نيوتن الثاني $\underset{\text{محصلة}}{F} = \frac{\Delta P}{\Delta t}$ وبالضرب التبادلي ⇐ $\underbrace{\underset{\text{محصلة}}{F}\Delta t}_{I} = \Delta P$

$I = \Delta P$

س) اثبت ان وحدة الزخم $(Kg\,m/s)$ تكافئ وحدة الدفع $(N.S)$

الحل:

وحدة الدفع NS لكن $F = ma \Rightarrow N = Kg.\frac{m}{s^2}$

$Kg.\frac{m}{s^2} \times s = Kg\,m/s$

وحدة الدفع $Kg\frac{m}{s^2}.S = Kg\,m/s$ = وحدة كمية التحرك

\# وهو المطلوب

ملاحظة: الشغل $W = Fd\cos\theta$ ⇐ وحدة الشغل $J = N.m = Kg \times \frac{m}{s^2} \times m$

⇐ وحدة الزخم $\frac{Kg\,m}{s} = \frac{J\,s}{m}$

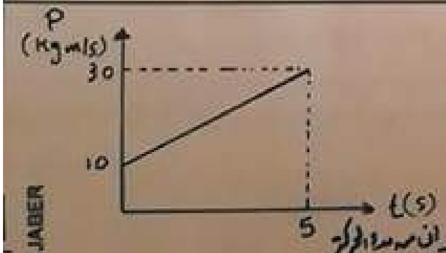
س) كتاب: سيارة كتلتها $1200\,Kg$ تسير بسرعة $20\,m/s$ ، فاذا ضغط السائق على كوابح السيارة فانخفضت سرعتها الى $8\,m/s$ في نفس الاتجاه في زمن مقداره $6S$ ، احسب متوسط القوة التي اثرت فيها القوة على السيارة خلال هذه الفترة.

الحل:

$\underset{\text{على السيارة}}{I} = \underset{\text{للسيارة}}{\Delta P} = F\Delta t$

$m(V_2 - V_1) = F\Delta t \Rightarrow 1200(8-20) = F(6) \Rightarrow F = -2400\,N$

أي $2400\,N$ بعكس اتجاه حركة السيارة.



س) جسم كتلته $2\,Kg$ يتحرك على سطح افقي أملس ، أثرت عليه قوة ثابتة لمدة 5 ثوان ، والمنحنى المبين يمثل العلاقة بين زخم الجسم (P) والزمن (t) ، احسب:

1) القوة المؤثرة واتجاهها.
2) دفع القوة خلال فترة تأثيرها.
3) سرعة الجسم الابتدائية والنهائية
4) سرعة الجسم بعد 4 ثوان من بدء الحركة

الحل

1) F = الميل = $\frac{\Delta P}{\Delta t}$ ⇐ $F = \frac{30-10}{5-0} = 4\,N$ بنفس اتجاه الحركة لان الزخم يزداد

2) $I = \Delta P = P_2 - P_1 = 30 - 10 = 20\,N.S$ نفس اتجاه الحركة

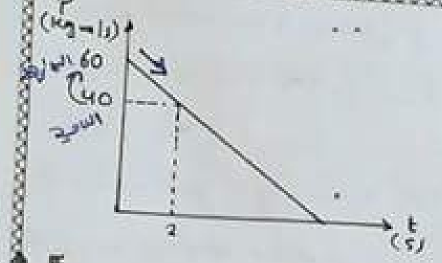
3) $P_1 = mV_1$
$10 = 2V_1 \Rightarrow V_1 = 5\,m/s$

$P_2 = mV_2$
$30 = 2V_2 \Rightarrow V_2 = 15\,m/s$

4) $F = \frac{\Delta P}{\Delta t} \Rightarrow 4 = \frac{P_2 - 10}{4-0} \Rightarrow P_2 = 26\,Kg\,m/s$

$P_2 = mV_2 \Rightarrow 26 = 2V_2 \Rightarrow V_2 = 13\,m/s$

HISAM JABER



س) جسم كتلته 2 kg يتحرك على سطح أفقي أملس، بالاعتماد على المنحنى البياني جد:
1) القوة المؤثرة واتجاهها.
2) الزمن حتى يتوقف.
3) دفع القوة على الجسم.

الحل:

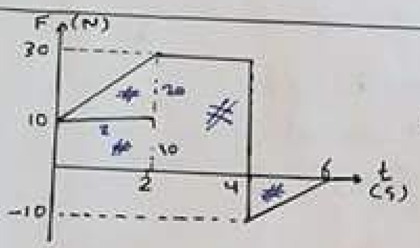
1) الميل $= F = \frac{\Delta P}{\Delta t} = \frac{40-60}{2-0} = -10\ N$

أي 10 N بعكس اتجاه الحركة لأن الزخم يقل

2) $F = \frac{\Delta P}{\Delta t} \Rightarrow -10 = \frac{0-60}{t-0} \Rightarrow t = 6\ S$

3) $I = \Delta P = 0 - 60 = -60\ N.S$

- أي 60 N.S بعكس اتجاه الحركة



س) جسم كتلته 10 kg يستقر على سطح أفقي أملس، أثرت عليه قوة متغيرة لمدة 6 S كما في الشكل، احسب:
1) دفع القوة خلال فترة تأثيرها.
2) سرعة الجسم في نهاية الفترة.
3) متوسط القوة المؤثرة خلال فترة تأثيرها
4) أقصى سرعة يصلها الجسم أثناء حركته.

الحل:

1) الدفع $I =$ المساحة تحت منحنى $(F-t) = (2\times10) + \frac{1}{2}(2)(20) + 2(30) - \frac{1}{2}(2)(10) = 90\ N.S$

2) $I = \Delta P = m(V_2 - V_1) \Rightarrow 90 = 10(V_2 - 0) \Rightarrow V_2 = 9\ m/s$

3) $F_{\text{متوسطة}} = \frac{\Delta P}{\Delta t} = \frac{90}{6} = 15\ N$

4) أقصى سرعة يصلها عند نهاية القوة الموجبة أي عند $t = 4S$

$I_{\text{خلال 4 ثواني}} = (2\times10) + (\frac{1}{2}\times2\times20) + 2\times30 = 100\ N.S$

$I = \Delta P = m(V_2 - V_1) \Rightarrow 100 = 10(V_2 - 0) \Rightarrow V_2 = 10\ m/s$

س) علل: عندما يقفز شخص ما من مكان عالٍ إلى أرض منخفضة فإنه يثني ركبتيه عند ملامسة قدميه الأرض

الجواب: $F = \frac{\Delta P}{\Delta t}$ عندما يثني ركبتيه يزيد الزمن اللازم للتوقف فتقل قوة التصادم

س) علل: السقوط على أرض رملية أسهل من السقوط على أرض صلبة

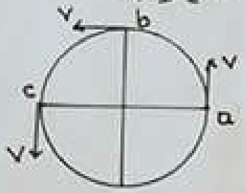
الجواب: $F = \frac{\Delta P}{\Delta t}$، في الأرض الرملية يكون زمن التوقف أكبر فتقل قوة التصادم، أما في الأرض الصلبة يكون زمن التوقف صغيراً فتكون قوة التصادم كبيرة.

س) علل: يصمم الحذاء الرياضي بحيث يكون نعله مزوداً بوسائد امتصاص

الجواب: $F = \frac{\Delta P}{\Delta t}$، وسائد الامتصاص تزيد زمن تأثير القوة مما يقلل من القوة المؤثرة في القدم

س) علل : تكون مواسير بنادق الصيد طويلة ؟
الجواب: $I = \Delta P = F \Delta t$ حتى يزداد زمن تأثير القوة على القذيفة فتتأثر بدفع أكبر وتنطلق بسرعة أكبر وتصل الى مدى أكبر .

س) يدور جسم صناعي كتلته (m) حول الأرض بسرعة ثابتة (v) جد التغير في كمية تحركه (زخمه)
1) خلال دورة كاملة 2) خلال نصف دورة 3) خلال ربع دورة



الحل:

1) $\Delta P_{a \to a} = m(\vec{v_2} - \vec{v_1}) = m(v - v) = 0$

2) $\Delta P_{a \to c} = m(\vec{v_2} - \vec{v_1}) = m[(-v) - (v)] = -2mv$

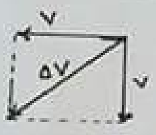
$\Rightarrow |\Delta P| = 2mv$

3) $\Delta P_{a \to b} = m \Delta v$

$= m(\sqrt{2}\, v)$

$= \sqrt{2}\, m v$

لكن

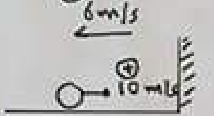


$\Delta v = \vec{v_2} - \vec{v_1} = \vec{v_2} + (-\vec{v_1})$

المحصلة $\vec{v_2}$ ومعكوس $\vec{v_1}$

$\Delta v = \sqrt{v^2 + v^2} = \sqrt{2}\, v$

س) اصطدمت كرة كتلتها 2kg تتحرك شرقاً بسرعة 10 m/s بجدار رأسي وارتدت بعكس اتجاهها بسرعة 6 m/s فاذا كان زمن تصادمها (تلامسها) مع الجدار 0.1 s احسب
1) الدفع المؤثر على الكرة نتيجة التصادم .
2) متوسط قوة دفع الجدار على الكرة نتيجة التصادم



الحل:

1) $I_{\text{على الكرة}} = \Delta P = m(v_2 - v_1) = 2[(-6) - (10)] = -32\ N.S$

أي 32 N.S غرباً

2) $F_{\text{على الكرة}} = \frac{\Delta P}{\Delta t} = \frac{-32}{0.1} = -320\ N$

أي 320 N غرباً

ملاحظة:
عند تصادم الكرة مع الجدار وحسب قانون نيوتن الثالث (لكل فعل رد فعل مساوٍ له في المقدار ومعاكس له في الاتجاه)

$\Leftarrow \vec{F}_{\text{على الجدار}} = -\vec{F}_{\text{على الكرة}}$ "متساويان مقداراً ومتعاكسان اتجاهاً"

$\Leftarrow \vec{F}_{\text{على الجدار}} \Delta t = -\vec{F}_{\text{على الكرة}} \Delta t \Leftarrow \vec{\Delta P}_{\text{للجدار}} = -\vec{\Delta P}_{\text{للكرة}}$ "متساويان مقداراً ومتعاكسان اتجاهاً"

$\vec{I}_{\text{على الجدار}} = -\vec{I}_{\text{على الكرة}}$ "متساويان مقداراً ومتعاكسان اتجاهاً"

في هذا السؤال: $\vec{\Delta P}_{\text{للجدار}} = \vec{I}_{\text{على الجدار}}$ 32 kg m/s شرقاً

وحيث ان P_1 الجدار = صفر $\Leftarrow P_2$ للجدار = 32 kg m/s (شرقاً)

$F_{\text{على الجدار}} =$ 320 N شرقاً .

لوطلب الطاقة الحركية المفقودة:

$\Delta K = K_f - K_i = \frac{1}{2} m v_2^2 - \frac{1}{2} m v_1^2 = \frac{1}{2} \times 2 \times (6)^2 - \frac{1}{2} \times 2 \times (10)^2$

$= -64\ J$

(التغير في الطاقة الحركية)

الطاقة المفقودة = $|\Delta K| = 64\ J$

حسام جابر
HISAM JABER

حفظ كمية التحرك في نظام معزول:

النظام المعزول: النظام البعيد عن تأثير القوى الخارجية والقوى الرئيسية التي تؤثر في النظام المعزول هي القوى المتبادلة بين الأجسام او الجسيمات داخل النظام أي متوسط القوة المحصلة تساوي صفراً

النظام المغلق: مجموعة الأجسام التي تبقى كتلتها ثابتة خلال أي عملية تبادل للقوى

قانون حفظ كمية التحرك:

$$\sum \vec{P_i} = \sum \vec{P_f}$$

اذا كانت محصلة القوى الخارجية المؤثرة في مجموعة من الأجسام بينها تأثير متبادل في نظام مغلق تساوي صفراً (نظام معزول) فان مجموع زخم هذه الأجسام يبقى ثابتاً مقداراً واتجاهاً قبل التأثير وبعده.

الاثبات:

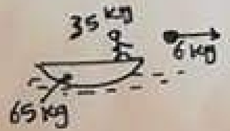
$F\Delta t = \Delta P$ وحيث أن $F_{خارجية} =$ صفر $\Leftarrow \Delta P = 0 \Leftarrow P_2 - P_1 = 0$

$\Leftarrow \vec{P_2} = \vec{P_1}$

• يطبق قانون حفظ كمية التحرك للنظام (المغلق المعزول) مثل: الانفجارات، التصادمات

س) مثال: يجلس ولد كتلته 35 kg في قارب ساكن كتلته 65 kg ويحمل حقيبة كتلتها 6 kg، اذا قذف الولد الحقيبة أفقياً وبسرعة مقدارها 10 m/s، وبإهمال مقاومة الماء، جد سرعة القارب بعد قذف الحقيبة مباشرة.

الحل:



$\sum \vec{P_i} = \sum \vec{P_f}$

$0 = (6\times10) + (35+65)\times V_{2f} \Rightarrow V_{2f} = -0.6\ m/s$

أي يرتد للخلف بسرعة 0.6 m/s

س) انفجر جسم ساكن كتلته 5 kg الى جزئين، فاذا كانت كتلة الجزء الأول 3 kg وتحرك باتجاه محور السينات الموجب وبسرعة مقدارها 30 m/s، جد مقدار واتجاه سرعة الجزء الثاني.

الحل:

$\sum P_i = \sum P_f \Rightarrow 0 = (3\times30) + 2\times V_2 \Rightarrow V_2 = -45\ m/s$

أي يتحرك بسرعة 45 m/s باتجاه محور السينات السالب

س) مثال: انفجر جسم ساكن الى جزئين كتلة الأول تساوي مثلي كتلة الثاني، اذا كانت الطاقة الحركية الناتجة عن الانفجار تساوي 7500 J، ما الطاقة الحركية التي يكتسبها كل منهما.

الحل:

$\sum \vec{P_i} = \sum \vec{P_f} \Rightarrow 0 = m_1V_1 + m_2V_2$

$0 = 2\cancel{m}\times V_1 + \cancel{m}\times V_2 \Rightarrow \boxed{V_2 = -2V_1}$

$K_1 = \frac{1}{2}m_1V_1^2 = \frac{1}{2}(2m)V_1^2 = mV_1^2$ | $K_2 = \frac{1}{2}m_2V_2^2 = \frac{1}{2}(m)(2V_1)^2 = 2mV_1^2$

$\sum K = 7500 \Rightarrow mV_1^2 + 2mV_1^2 = 7500 \Rightarrow 3mV_1^2 = 7500 \Rightarrow mV_1^2 = 2500\ J = K_1$

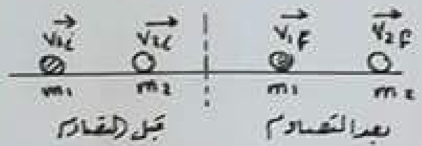
$K_2 = 2mV_1^2 = 2(2500) = 5000\ J$

حسام جابر
0599047654

التصادم "Collision"

التصادم : تأثير متبادل بين جسمين أو أكثر تؤثر خلاله الأجسام المتصادمة في بعضها البعض بقوة خلال فترة زمنية قصيرة نسبياً وينتج عنه تغير في سرعة الأجسام المتصادمة.

- عند تصادم جسمين فان النظام يكون مغلقاً ومعزولاً لأن القوى بين الأجسام المتصادمة قوى متبادلة (فعل ورد فعل) وهي قوى داخلية وتكون كمية التحرك محفوظة اثناء التصادم



$$\sum \vec{P}_i = \sum \vec{P}_f$$

كمية الاتجاه الزخم

$$m_1\vec{v}_{1i} + m_2\vec{v}_{2i} = m_1\vec{v}_{1f} + m_2\vec{v}_{2f}$$

- حسب قانون نيوتن الثالث

$\vec{F}_{21} = -\vec{F}_{12}$ متساويتان مقداراً ومتعاكستان اتجاهاً

$\Delta\vec{P}_1 = -\Delta\vec{P}_2$ متساويان مقداراً ومتعاكسان اتجاهاً

$\vec{I}_1 = -\vec{I}_2$ 〃 〃 〃 〃

لكن ΔP للنظام يساوي صفر .

انواع التصادم:

1) **التصادم المرن** : هو التصادم الذي تكون فيه الطاقة الحركية الكلية محفوظة بمعنى انه لا يكون هناك فقدان في الطاقة الحركية للنظام أي $\sum K_i = \sum K_f \Leftarrow \Delta K_{\text{النظام}} = 0$

- في التصادم المرن في بعد واحد تكون السرعة النسبية للجسمين قبل التصادم تساوي السرعة النسبية للجسمين بعد التصادم في المقدار وتعاكسها في الاتجاه أي $\vec{v}_{12i} = -\vec{v}_{12f}$

حيث v_{12i} : سرعة الجسم الأول بالنسبة للجسم الثاني قبل التصادم

v_{12f} : 〃 〃 〃 〃 〃 〃 بعد 〃

الاشتقاق:

حفظ الطرق

$$\sum P_i = \sum P_f \Rightarrow m_1v_{1i} + m_2v_{2i} = m_1v_{1f} + m_2v_{2f}$$
$$\Rightarrow m_1(v_{1i} - v_{1f}) = m_2(v_{2f} - v_{2i}) \quad ---(1)$$

$$\sum K_i = \sum K_f \Rightarrow \tfrac{1}{2}m_1v_{1i}^2 + \tfrac{1}{2}m_2v_{2i}^2 = \tfrac{1}{2}m_1v_{1f}^2 + \tfrac{1}{2}m_2v_{2f}^2$$
$$\Rightarrow m_1(v_{1i}^2 - v_{1f}^2) = m_2(v_{2f}^2 - v_{2i}^2) \quad ---(2)$$

بقسمة معادلة (2) على (1) $\Leftarrow$

$$\frac{\cancel{m_1}\cancel{(v_{1i} - v_{1f})}(v_{1i} + v_{1f})}{\cancel{m_1}\cancel{(v_{1i} - v_{1f})}} = \frac{\cancel{m_2}\cancel{(v_{2f} - v_{2i})}(v_{2f} + v_{2i})}{\cancel{m_2}\cancel{(v_{2f} - v_{2i})}}$$

$$\Rightarrow v_{1i} - v_{2i} = -(v_{1f} - v_{2f}) \Rightarrow \vec{v}_{12i} = -\vec{v}_{12f}$$

HUSAM JABER

التصادم غير المرن: هو التصادم الذي لا تكون فيه الطاقة الحركية للنظام محفوظة

أي $\Sigma K_f < \Sigma K_i$ أي $\Delta K_{النظام} \neq 0$ " سالب "

ملاحظة: معظم التصادمات في الحياة اليومية تصادمات غير مرنة مثل تصادم كرات البليارد

• تضيع الطاقة الحركية على شكل صوت، حرارة، تغير في الشكل (تشوه)

التصادم عديم المرونة: هو حالة خاصة من التصادم غير المرن حيث يلتحم (يتحد) الجسمان بعد التصادم ويكونان جسماً واحداً ويتحركان بسرعة مشتركة V_f

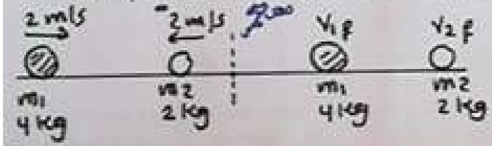
$$\Sigma P_i = \Sigma P_f \Rightarrow m_1 V_{1i} + m_2 V_{2i} = (m_1 + m_2) V_f$$

• في التصادم عديم المرونة يكون النقصان في الطاقة الحركية كبيراً

• من الأمثلة على التصادم عديم المرونة: تصادم السهم وقرص التصويب، تصادم كرة طين مع جسم صلب، البندول القذفي (التحام رصاصة بهدف خشبي)

سؤال) جسم كتلته ($4\,kg$) يتحرك لليمين بسرعة ($2\,m/s$) اصطدم بجسم آخر ($2\,kg$) ويتحرك في اتجاه معاكس وبنفس السرعة، احسب سرعة كل من الجسمين بعد التصادم اذا كان التصادم مرناً.

الحل:



$$\Sigma P_i = \Sigma P_f$$

$$m_1 V_{1i} + m_2 V_{2i} = m_1 V_{1f} + m_2 V_{2f}$$

$$4(2) + 2(-2) = 4 \times V_{1f} + 2 \times V_{2f}$$

$$\Rightarrow 2V_{1f} + V_{2f} = 2 \quad ---- (1)$$

• إما أن نستخدم $\Sigma K_i = \Sigma K_f$ وبالتالي الوصول الى حل معادلة تربيعية

أو:

$$V_{12i} = -V_{12f} \Rightarrow V_{1i} - V_{2i} = -(V_{1f} - V_{2f}) \Rightarrow 2 - (-2) = -V_{1f} + V_{2f}$$

$$\Rightarrow -V_{1f} + V_{2f} = 4 \quad ---(2)$$

وبحل المعادلتين معاً $V_{1f} = -\frac{2}{3}$ m/s أي ترتد لليسار بسرعة $\frac{2}{3}$ m/s

$V_{2f} = \frac{10}{3}$ m/s أي ترتد لليمين بسرعة $\frac{10}{3}$ m/s

---

* لو طلب التغير في الطاقة الحركية للنظام ⇐ يساوي صفر

* $(\Delta K)_{النظام} = 0$

* لو طلب الدفع على الكرة الأولى

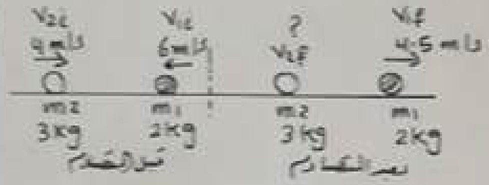
$$I_{على\ الأولى} = \Delta P_{الأولى} = m(V_{1f} - V_{1i})$$

$$= 4\left(\frac{-2}{3} - 2\right) = \frac{-32}{3}\ N.S$$

أي $\frac{32}{3}$ N.S لليسار

س (تمرين): تتحرك كرة كتلتها 2kg باتجاه الغرب بسرعة 6 m/s فتصطدم بأخرى كتلتها 3kg تتحرك باتجاه الشرق بسرعة 4 m/s ، اذا أصبحت سرعة الأولى بعد التصادم مباشرة 4.5 m/s شرقاً حيث بقي الجسمان يتحركان على نفس الخط قبل وبعد التصادم ودام التصادم (0.02s) جد
1) سرعة الكرة الثانية بعد التصادم مباشرة.
2) شرط القوة التي أثرت بها الكرة الأولى على الكرة الثانية أثناء التصادم.
3) حدد نوع التصادم

الحل



$$\Sigma P_i = \Sigma P_f$$
$$m_1 V_{1i} + m_2 V_{2i} = m_1 V_{1f} + m_2 V_{2f}$$
$$(2\times -6) + (3\times 4) = (2\times 4.5) + 3\times V_{2f}$$
$\Rightarrow V_{2f} = -3\,m/s$ أي تتحرك غرباً بسرعة 3 m/s

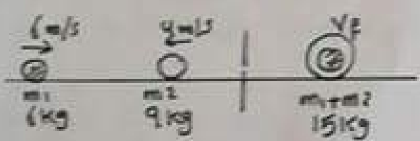
2) الدفع على الثانية : $I_2 = \Delta P_2 = m_2 (V_{2f} - V_{2i}) = 3\times[(-3)-(4)] = -21\ N\cdot s$

$$F_{\text{على الثانية}} = \frac{\Delta P_2}{\Delta t} = \frac{-21}{0.02} = -1050\,N$$
أي 1050 N غرباً

3) $$\Delta K = \Sigma K_f - \Sigma K_i = \left[\tfrac{1}{2}\times 2\times(4.5)^2 + \tfrac{1}{2}\times 3\times (3)^2\right] - \left[\tfrac{1}{2}\times 2\times (6)^2 + \tfrac{1}{2}\times 3\times (4)^2\right]$$
$$= 33.75 - 60 = -26.25\,J$$
أي ان الطاقة الحركية المفقودة تساوي $|\Delta K| = 26.25\,J$ ⇐ التصادم غير مرن

س) كرتان تتحركان في اتجاهين متعاكسين، الأولى $m_1 = 6kg$ تتحرك شرقاً بسرعة 6 m/s والثانية $m_2 = 9kg$ تتحرك غرباً بسرعة 4 m/s فالتحمتا وكونتا جسماً واحداً جد
1) سرعة الجسم الملتحم بعد التصادم
2) الطاقة الحركية المفقودة نتيجة التصادم

الحل:

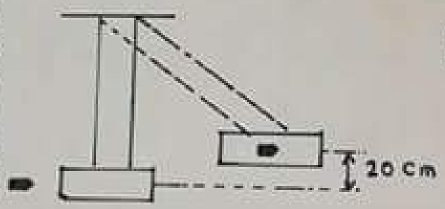


1) $$\Sigma P_i = \Sigma P_f \Rightarrow m_1 V_{1i} + m_2 V_{2i} = (m_1+m_2) V_f$$
$$(6\times 6) + (9\times -4) = (6+9)\times V_f$$
$\Rightarrow V_f = 0$ أي يسكن الجسم الملتحم بعد التصادم مباشرة

2) $$\Delta K = \Sigma K_f - \Sigma K_i = \tfrac{1}{2}(m_1+m_2)V_f^2 - \left[\tfrac{1}{2} m_1 V_{1i}^2 + \tfrac{1}{2} m_2 V_{2i}^2\right]$$
$$= \tfrac{1}{2}\times 15\times(0)^2 - \left[\tfrac{1}{2}\times 6\times(6)^2 + \tfrac{1}{2}\times 9\times(4)^2\right] = -180\,J$$
⇐ الطاقة الحركية المفقودة تساوي $|\Delta K| = 180\,J$

حسام جابر HUSAM JABER

• البندول القذفي: يستخدم لحساب سرعة انطلاق رصاصة ويتكون من كتلة خشبية معلقة بحبلين متساويين في الطول متوازيين غير مرنين حيث كتلة الخشبة المعلقة أكبر بكثير من كتلة الرصاصة



س) أطلقت رصاصة كتلتها 20 gm على كتلة خشبية كتلتها 1.98 kg معلقة كما في الشكل فاستقرت فيها وأدى ذلك الى ارتفاع الجسم الملتحم مسافة رأسية 20 cm عن

1) السرعة المشتركة للجسمين بعد التصادم مباشرة
2) سرعة الرصاصة قبل التصادم مباشرة.
3) مقدار الطاقة الحركية المفقودة نتيجة التصادم
4) نسبة الطاقة الحركية المفقودة نتيجة التصادم

الحل:

1) بعد التصادم: الطاقة الميكانيكية للجسم الملتحم محفوظة: $K \to U \Rightarrow \frac{1}{2}(m_1+m_2)V_f^2 = (m_1+m_2)gh$

$\Rightarrow \boxed{V_f = \sqrt{2gh}} = \sqrt{2\times10\times0.2} = \sqrt{4} = 2\ m/s$

2) أثناء التصادم: $\Sigma P_i = \Sigma P_f \Rightarrow m_1V_{1i} + m_2\cancel{V_{2i}}^{0} = (m_1+m_2)V_f$

$\Rightarrow 0.02\times V_{1i} = (0.02+1.98)\times2 \Rightarrow V_{1i} = 200\ m/s$

3) $\Delta K = \Sigma K_f - \Sigma K_i = \frac{1}{2}(m_1+m_2)V_f^2 - \left[\frac{1}{2}m_1V_{1i}^2 + \frac{1}{2}m_2\cancel{V_{2i}^2}^{0}\right]$

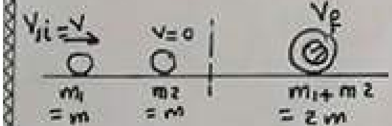
$= \frac{1}{2}\times2\times(2)^2 - \frac{1}{2}\times0.02\times(200)^2 = 4 - 400 = -396\ J$

الطاقة المفقودة $= |\Delta K| = 396\ J$

4) $\boxed{\text{نسبة الطاقة الضائعة} = \frac{\text{الطاقة الضائعة}}{\Sigma K_i}\times100\%} = \frac{396}{400}\times100\% = 99\%$

س) اصطدم جسم تصادماً عديم المرونة بجسم آخر ساكن ومماثل له في الكتلة، اثبت أن نسبة الطاقة الحركية الضائعة تساوي 50%

الحل:



• $\Sigma P_i = \Sigma P_f \Rightarrow m_1V_{1i} + 0 = (m_1+m_2)V_f$

$\Rightarrow mV = 2mV_f \Rightarrow \boxed{V_f = \frac{V}{2}}$

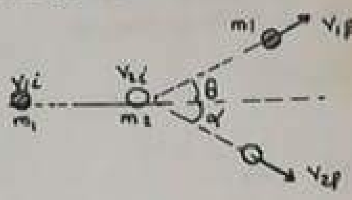
• $\Sigma K_i = \frac{1}{2}m_1V_{1i}^2 + 0 = \frac{1}{2}mV^2$

$\Sigma K_f = \frac{1}{2}(m_1+m_2)V_f^2 = \frac{1}{2}\times2m\times\left(\frac{V}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}mV^2$

$\Delta K = \Sigma K_f - \Sigma K_i = \frac{1}{4}mV^2 - \frac{1}{2}mV^2 = -\frac{1}{4}mV^2 \Rightarrow$ الطاقة الضائعة $= |\Delta K| = \frac{1}{4}mV^2$

• $\text{نسبة الطاقة الضائعة} = \frac{\text{الطاقة الضائعة}}{\Sigma K_i}\times100\% = \frac{\frac{1}{4}mV^2}{\frac{1}{2}mV^2}\times100\% = 50\%$

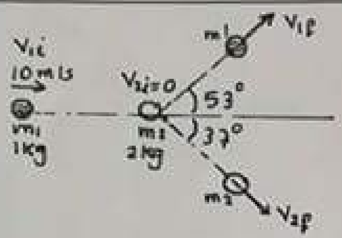
التصادم في بعدين : هو التصادم الذي لا تبقى الأجسام المتصادمة على نفس الخط الذي كانت تسير عليه قبل التصادم



• نطبق قانون حفظ كمية التحرك في الاتجاهين السيني والصادي

$$\Sigma P_{xi} = \Sigma P_{xf}$$
$$\Sigma P_{yi} = \Sigma P_{yf}$$

س) اصطدمت كرة ($m_1 = 1kg$) تتحرك بسرعة $10\ m/s$ بكرة أخرى ساكنة ($m_2 = 2kg$) وبعد التصادم انحرفت الكرتان كما هو مبين
جد
1) سرعة كل من الكرتين بعد التصادم
2) الطاقة الحركية الضائعة نتيجة التصادم ، وما نوع التصادم



الحل :

1) $\Sigma P_{xi} = \Sigma P_{xf} \Rightarrow (1\times10)+0 = 1\times V_{1f}\cos53 + 2\times V_{2f}\cos37$

$10 = V_{1f}\times0.6 + 2\times V_{2f}\times0.8 \Rightarrow 0.6V_{1f} + 1.6V_{2f} = 10$ ---(1)

$\Sigma P_{yi} = \Sigma P_{yf} \Rightarrow 0 = 1\times V_{1f}\sin53 - 2\times V_{2f}\sin37 \Rightarrow 0 = V_{1f}\times0.8 + 2\times V_{2f}\times0.6$

$\Rightarrow 0.8V_{1f} + 1.2V_{2f} = 0$ ---(2)

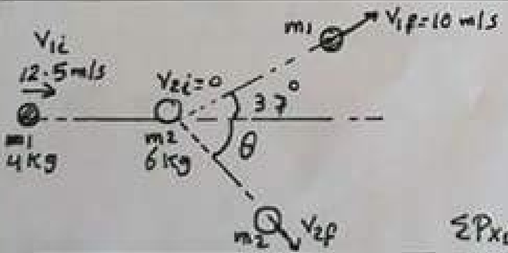
بحل المعادلتين ينتج أن $V_{1f} = 6\ m/s$ ، $V_{2f} = 4\ m/s$

2) $\Delta K = \Sigma K_f - \Sigma K_i = \left[\frac{1}{2}\times1\times(6)^2 + \frac{1}{2}\times2\times(4)^2\right] - \left[\frac{1}{2}\times1\times(10)^2+0\right] = 34-50 = -16\ J$

الطاقة الضائعة $= |\Delta K| = 16\ J$ ⟸ التصادم غير مرن لانه ضاع طاقة حركية ضائعة

HUSAM JABER

س) اصطدمت كرة ($m_1 = 4kg$) تتحرك بسرعة ($12.5\ m/s$) بكرة أخرى ساكنة ($m_2 = 6kg$) وبعد التصادم انحرفت الأولى بزاوية $37°$ وبسرعة $10\ m/s$ ، جد سرعة الكرة الثانية بعد التصادم مقداراً واتجاهاً .



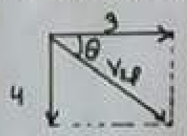
الحل:

$\Sigma P_{xi} = \Sigma P_{xf} \Rightarrow (4\times12.5)+0 = (4\times10\cos37) + 6\times V_{2fx}$

$\Rightarrow 50 = 40\times0.8 + 6\times V_{2fx} \Rightarrow V_{2fx} = 3\ m/s$

$\Sigma P_{yi} = \Sigma P_{yf} \Rightarrow 0 = 4\times10\sin37 + 6\times V_{2fy}$

$\Rightarrow 0 = 40\times0.6 + 6\times V_{2fy} \Rightarrow V_{2fy} = -4\ m/s$



$V_{2f} = \sqrt{(3)^2+(4)^2} = 5\ m/s$

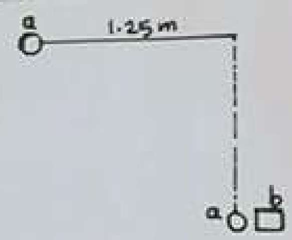
الاتجاه $\tan\theta = \frac{4}{3}$

ملاحظة

• عندما تكون السرعة معلومة الزاوية نحلل الى cos ، sin

• عندما تكون السرعة مجهولة الزاوية نحلل الى V_x ، V_y

كرة كتلتها (2 kg) مربوطة أفقياً بخيط شعوره طوله (1.25 m)، أفلتت لتصطدم عند أسفل نقطة في مسارها بجسم آخر ساكن كتلته (7 kg)، وبعد التصادم ارتدت الكرة إلى ارتفاع (0.2 m)
1) احسب سرعة الجسم (b) بعد التصادم
2) ما نوع التصادم



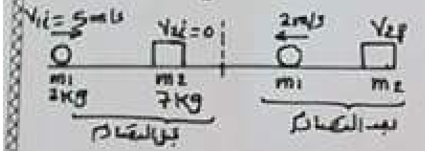
الحل:

• لنجد سرعة الكرة قبل التصادم مباشرة:

$$U \to K \Rightarrow mgh = \frac{1}{2}mv^2 \Rightarrow v = \sqrt{2gh} = \sqrt{2 \times 10 \times 1.25} = \sqrt{25} = 5\,m/s$$

• لنجد سرعة الكرة بعد التصادم مباشرة:

$$K \to U \Rightarrow \frac{1}{2}mv^2 = mgh \Rightarrow v = \sqrt{2gh} = \sqrt{2 \times 10 \times 0.2} = \sqrt{4} = 2\,m/s$$



• مرحلة التصادم

$$\Sigma P_i = \Sigma P_f \Rightarrow m_1 v_{1i} + 0 = m_1 v_{1f} + m_2 v_{2f}$$

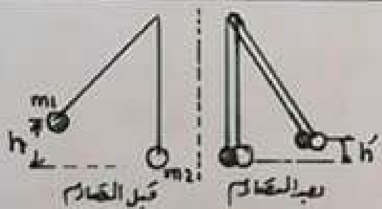
$$\Rightarrow (2 \times 5) + 0 = (2 \times -2) + 7 \times v_{2f} \Rightarrow v_{2f} = 2\,m/s \text{ «لليمين»}$$

2)

$$\Delta K = \Sigma K_f - \Sigma K_i = \left[\frac{1}{2} \times 2 \times (2)^2 + \frac{1}{2} \times 7 \times (2)^2\right] - \left[\frac{1}{2} \times 2 \times (5)^2 + 0\right] = 18 - 25 = -7\,J$$

⇐ الطاقة الضائعة $= |\Delta K| = 7\,J$ ⇐ التصادم غير مرن

س) كرتان متساويتان في الكتلة مربوطتين بخيطين متساويين في الطول رفعت الأولى مسافة رأسية (h) ثم تركت لتصطدم بالكرة الثانية وتلتحم بها مما أدى الى ارتفاع الجسم الملتحم مسافة رأسية (h') عن مستواه الأصلي، اثبت أن $h' = \frac{h}{4}$



الحل:

• قبل التصادم: تتحول طاقة الوضع للكرة الأولى الى طاقة حركة:

$$U \to K \Rightarrow mgh = \frac{1}{2}mv^2 \Rightarrow v = \sqrt{2gh}$$

• مرحلة التصادم عديم المرونة:

$$\Sigma P_i = \Sigma P_f \Rightarrow m_1 v_{1i} + m_2 v_{2i} = (m_1 + m_2) v_f$$

$$+0 = 2m \times v_f \Rightarrow v_f = \frac{1}{2}v = \frac{1}{2} \times \sqrt{2gh}$$

• بعد التصادم: تتحول الطاقة الحركية للجسم الملتحم الى طاقة وضع:

$$K \to U \Rightarrow \frac{1}{2}(\cancel{m_1 + m_2}) v_f^2 = (\cancel{m_1 + m_2}) g h'$$

$$\frac{1}{2} \times \frac{1}{4} \times 2gh = gh' \Rightarrow h' = \frac{h}{4}$$

العزم (Torque)

" العزم الدوراني "

" مدى مقدرة القوة على احداث دوران لجسم حول محور ثابت "

$\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F} \Rightarrow \tau = rF\sin\theta$ وحدته (N.m)

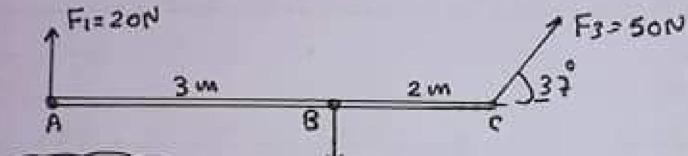
⇐ عزم القوة يساوي حاصل الضرب التقاطعي بين بعد نقطة تأثير القوة عن محور الدوران والقوة .

• **تحديد اتجاه العزم** : حسب قاعدة اليد اليمنى حيث نجعل اتجاه الاصابع باتجاه متجه الموضع $(\vec{r})$ وتدوير الاصابع باتجاه القوة بأصغر زاوية فيشير الابهام الى متجه العزم $(\vec{\tau})$

• اذا اعتبرنا الدوران يتم في المستوى (xy) وكان باتجاه عقارب الساعة ⇐ $\vec{\tau}$ باتجاه (z) السالب (عمودي على الصفحة للداخل) (−)

واذا كان الدوران ضد عقارب الساعة ⇐ $\vec{\tau}$ باتجاه (z) الموجب (عمودي على الصفحة للخارج) (+)

س) يبين الشكل ذراعاً أثرت فيه القوى F_1، F_2، F_3 احسب محصلة عزوم هذه القوى
1) حول A 2) حول B 3) حول C



$\sin 37 = 0.6$

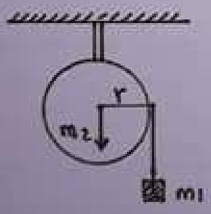
الحل:

1) $\Sigma\tau_A = (20\times0) - (30\times3) + (50\times5\sin37) = 60\ N.m$ باتجاه $\overset{+}{z}$ (خارج من الصفحة)

2) $\Sigma\tau_B = (30\times0) - (20\times3) + (50\times3\sin37) = 30\ N.m$ باتجاه $\overset{+}{z}$ (خارج من الصفحة)

3) $\Sigma\tau_C = (50\times0) - (20\times5) + (30\times2) = -40\ N.m$ (باتجاه $\bar{z}$) (داخل في الصفحة)

س) (كتاب) يعلق جسم كتلته m_1 بنهاية خيط يمر حول بكرة خشنة كتلتها m_2 ونصف قطرها (r) مثبتة بحيث يمكنها الدوران حول محور أفقي يمر من مركزها ما عزم القوى المؤثرة على البكرة ؟



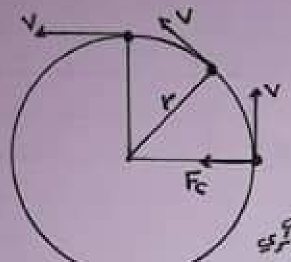
الحل:

عزم وزن الجسم m_1 : $\tau_1 = -(m_1 g)\times r$ $(\bar{z})$

عزم وزن البكرة m_2 : $\tau_2 = 0$ لأن القوة تمر بمحور الدوران

حسام جابر
0599047654

التحريك الدوراني
Rotational Dynamics



القوة المركزية : هي القوة التي تنشأ عندما يتحرك الجسم في مسار دائري (Centripetal force) واتجاهها باتجاه مركز الدائرة .

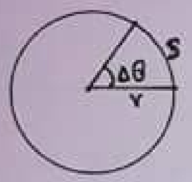
- التسارع المركزي (a_c) $a_c = \frac{v^2}{r}$ واتجاهه باتجاه مركز الدائرة

v: السرعة الخطية التي يتحرك بها الجسم على المسار الدائري

- القوة المركزية (F_c) $F_c = m a_c = m\frac{v^2}{r} = m r \omega^2$

- السرعة الزاوية (ω): وحدتها rad/s (راديان/ث)

"الإزاحة الزاوية التي يدورها الجسم في وحدة الزمن"



$\omega = \frac{\Delta\theta}{\Delta t}$ → الزاوية المقطوعة بالتقدير الدائري

$\Delta\theta = \frac{S}{r}$ → طول القوس

$\omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T}$

حيث f: التردد (Hz) (دورة/ث) (rev/s)

T: الزمن الدوري (s)

$V = \omega r$

س كرة كتلتها (2 kg) مربوطة بخيط طوله (0.5m) وتدور في مسار دائري بمعدل 300rev/min ، احسب

1) السرعة الزاوية للكرة 2) السرعة الخطية للكرة 3) التسارع المركزي للكرة

4) القوة المركزية على الكرة 5) المسافة المقطوعة خلال 5 دورات 6) الزاوية الممسوحة خلال (0.2)s

الحل،

1) $\omega = \frac{\Delta\theta}{\Delta t} = \frac{300\times2\pi}{60} = 10\pi$ rad/s

أو) $f = \frac{300}{60} = 5$ rev/s (Hz) $\Rightarrow \omega = 2\pi f = 2\pi\times5 = 10\pi$ rad/s

2) $V = \omega r = (10\pi)\times0.5 = 5\pi$ m/s

3) $a_c = \frac{V^2}{r} = \frac{(5\pi)^2}{0.5} = 50\pi^2$ m/s²

أو) $a_c = \omega^2 r = (10\pi)^2\times0.5 = 50\pi^2$ m/s²

4) $F_c = m a_c = 2\times50\pi^2 = 100\pi^2$ N

5) $\Delta\theta = \frac{S}{r} \Rightarrow S = r\Delta\theta = 0.5(5\times2\pi) = 5\pi$ (m)

6) $\omega = \frac{\Delta\theta}{\Delta t} \Rightarrow \Delta\theta = \omega\Delta t = (10\pi)(0.2) = 2\pi$ rad

---

ملاحظة: التسارع الزاوي (rad/s²) $\alpha = \frac{\Delta\omega}{\Delta t}$

$a = r\alpha$

، التسارع الخطي (التسارع المماسي) $a = \frac{\Delta v}{\Delta t}$ m/s²

في السؤال السابق: الكرة تدور بسرعة خطية ثابتة ← وتدور بسرعة زاوية ثابتة ← لكن يبقى التسارع المركزي الذي يعمل على تغير اتجاه الحركة

$a_{مماسي} = \frac{\Delta v}{\Delta t} = 0$

$\alpha = \frac{\Delta\omega}{\Delta t} = 0$

$a_c = \frac{v^2}{r} = \omega^2 r = 50\pi^2$ m/s² وباتجاه مركز الدائرة

تذكر:

معادلات الحركة بخط مستقيم بتسارع خطي ثابت

$$v_f = v_i + at$$

$$r = v_i t + \frac{1}{2} a t^2$$

$$v_f^2 = v_i^2 + 2ar$$

معادلات الحركة الدائرية بتسارع زاوي ثابت (α)

$$\omega_f = \omega_i + \alpha t$$

$$\theta = \omega_i t + \frac{1}{2} \alpha t^2$$

$$\omega_f^2 = \omega_i^2 + 2\alpha\theta$$

س) بدأ جسم الدوران بسرعة زاوية (4 rad/s) وبتسارع زاوي ثابت (2 rad/s²) احسب

1) الإزاحة الزاوية (الزاوية الممسوحة) بعد مرور s (3)

2) السرعة الزاوية بعد مرور s (3)

الحل:

1) $\theta = \omega_i t + \frac{1}{2}\alpha t^2 = (4 \times 3) + \frac{1}{2} \times 2 \times (3)^2 = 21 \text{ rad}$

2) $\omega_f = \omega_i + \alpha t = 4 + (2 \times 3) = 10 \text{ rad/s}$

س) يدور حجر طاحونة بدأً من السكون زاوية 180° خلال s (2) بتسارع زاوي ثابت، احسب التسارع الزاوي

الحل:

$\underbrace{\theta}_{\text{بالتقدير الدائري}} = \omega_i t + \frac{1}{2}\alpha t^2 \Rightarrow \pi = 0 + \frac{1}{2}\alpha (2)^2 \Rightarrow \alpha = \frac{\pi}{2} \text{ rad/s}^2$

س) تتسارع اسطوانة موسيقية نصف قطرها (15 cm) بدأً من السكون فتصبح سرعتها (33 rev/min) خلال s (20) احسب

1) السرعة الخطية والتسارع المركزي لنقطة على محيطها

2) التسارع الزاوي لهذه النقطة . 3) التسارع المماسي لهذه النقطة

الحل:

1) $\omega = \frac{33 \times 2\pi}{60} = 3.45 \text{ rad/s}$

$v = \omega r = 3.45 \times 0.15 = 0.52 \text{ m/s}$

$a_c = \frac{v^2}{r} = \frac{(0.52)^2}{0.15} = 1.8 \text{ m/s}^2$ أو $a_c = \omega^2 r = (3.45)^2 \times 0.15 = 1.8 \text{ m/s}^2$

2) $\omega_f = \omega_i + \alpha t \Rightarrow 3.45 = 0 + \alpha(20) \Rightarrow \alpha = 0.17 \text{ rad/s}^2$

أو $\alpha = \frac{\Delta\omega}{\Delta t} = \frac{3.45 - 0}{20} = 0.17 \text{ rad/s}^2$

3) $a = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{0.52 - 0}{20} = 0.026 \text{ m/s}^2$

العزم (Torque)

"العزم الدوراني"

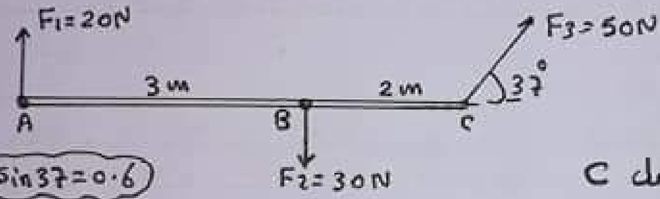
"مدى مقدرة القوة على احداث دوران لجسم حول محور ثابت"

$\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F} \Rightarrow \tau = rF\sin\theta$ وحدته (N.m)

⇐ عزم القوة يساوي حاصل الضرب التقاطعي بين بعد نقطة تأثير القوة عن محور الدوران والقوة .

• **تحديد اتجاه العزم** : حسب قاعدة اليد اليمنى حيث نجعل اتجاه الاصابع باتجاه متجه الموضع $(\vec{r})$ وتدوير الاصابع باتجاه القوة بأصغر زاوية فيشير الابهام الى متجه العزم $(\vec{\tau})$

• اذا اعتبرنا الدوران يتم في المستوى (xy) وكان باتجاه عقارب الساعة ⇐ $\vec{\tau}$ باتجاه (z) السالب (عمودي على الصفحة للداخل) (-)
واذا كان الدوران ضد عقارب الساعة ⇐ $\vec{\tau}$ باتجاه (z) الموجب (عمودي على الصفحة للخارج) (+)



س) يبين الشكل ذراعاً أثرت فيه القوى F_1 ، F_2 ، F_3 احسب محصلة عزوم هذه القوى
1) حول A 2) حول B 3) حول C

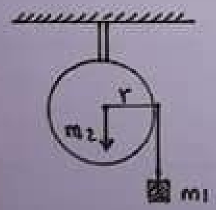
(sin37=0.6)

الحل:

1) $\Sigma\tau_A = (20\times0) - (30\times3) + (50\times5\sin37) = 60\ N.m$ باتجاه $\overset{+}{z}$ (خارج من الصفحة)

2) $\Sigma\tau_B = (30\times0) - (20\times3) + (50\times3\sin37) = 30\ N.m$ باتجاه $\overset{+}{z}$ (خارج من الصفحة)

3) $\Sigma\tau_C = (50\times0) - (20\times5) + (30\times2) = -40\ N.m$ (باتجاه $\bar{z}$) (داخل الصفحة)



س)(كتاب) يعلق جسم كتلته m_1 بنهاية خيط يمر حول بكرة خشنة كتلتها m_2 ونصف قطرها (r) مثبتة بحيث يمكنها الدوران حول محور أفقي يمر من مركزها ما عزم القوى المؤثرة على البكرة ؟

الحل:

عزم وزن الجسم m_1 : $\tau_1 = -(m_1 g)\times r$ $(\bar{z})$

عزم وزن البكرة m_2 : $\tau_2 = 0$ لأن القوة تمر بمحور الدوران

القصور الدوراني (I): (Moment of Inertia) (عزم القصور الذاتي)

" مقاومة الجسم لعزم القوة التي تحاول احداث تغير في حالة حركة الجسم الدورانية "

توضيح: عندما تدير عجلة دراجة هوائية حول محورها من السكون فانك تشعر بصعوبة عند بدء ادارتها وكذلك تشعر بصعوبة عند محاولة ايقافها. [ان مقاومة العجلة لتغيير حالتها الدورانية يسمى بالقصور الدوراني]

• القصور الدوراني لجسم كتلته (m) ونصف قطر دورانه (r)

$$\boxed{I_{CM} = mr^2}$$

وحدته $(kg\,m^2)$ " كمية قياسية "

ويعتمد على كتلة الجسم ونصف قطر الدوران

• القصور الدوراني لنظام من الأجسام:

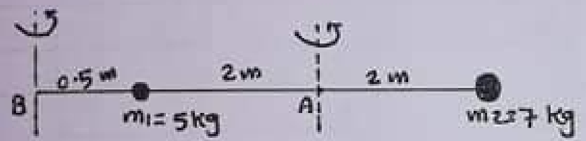
$$I_{CM} = \sum mr^2 = m_1r_1^2 + m_2r_2^2 + \dots$$

• القصور الدوراني في حالة جسم صلب كبير فيحسب عن طريق التكامل مثل كرة، اسطوانة، سلك رفيع، ...

س/ مثال: وضع جسمان كتلتاهما (5kg)، (7 kg) على بعد (4m) على ساق معدني خفيف (مهمل الوزن) احسب القصور الدوراني للنظام

1) عندما يدور حول محور في منتصف المسافة بينهما (حول A)

2) عندما يدور حول محور على بعد (0.5m) الى يسار الجسم الذي كتلته (5 kg)



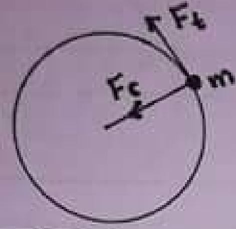
الحل:

1)
$$I_{CM\,(A\text{ حول})} = \sum mr^2 = 5\times(2)^2 + 7\times(2)^2 = 48\ kg\,m^2$$

2)
$$I_{CM\,(B\text{ حول})} = \sum mr^2 = 5\times(0.5)^2 + 7\times(4.5)^2 = 143\ kg\,m^2$$

نلاحظ أن القصور الدوراني لنظام معين يختلف باختلاف محاور الدوران

القانون الثاني لنيوتن في الحركة الدورانية ،



• اذا دار جسم كتلته (m) في مسار دائري نصف قطره (r) تحت تأثير قوة مماسية (F_t) فان قوة مركزية (F_c) تتولد أيضاً .

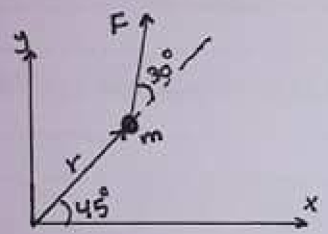
$\boxed{F_t = m a_t}$ حيث a_t : التسارع المماسي

تذكر: $\boxed{a_t = r\alpha}$

العزم الناتج: $\tau = F_t r = (m a_t) r = (m r \alpha) r = (m r^2)\alpha$

$\boxed{\tau = I_{cm}\alpha}$ ⇐ وهذه العلاقة هي القانون الثاني لنيوتن في الحركة الدورانية

<u>قانون نيوتن الثاني في الحركة الدورانية:</u> يتناسب التسارع الزاوي لجسم يتحرك دورانياً حول محور طردياً مع العزم المؤثر عليه بالنسبة لهذا المحور وعكسياً مع قصوره الدوراني بالنسبة لنفس المحور



س/ يتحرك جسم نقطي كتلته (2kg) في المستوى xy .بحيث أن موضعه في لحظة معينة (r=2m) والقوة المؤثرة عليه في تلك اللحظة (F=4N) كما موضح احسب

1) العزم المؤثر على الجسم بالنسبة لمحور عمودي على المستوى xy

2) تسارع الجسم الزاوي

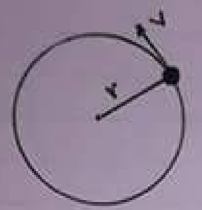
الحل:

1) $\tau = rF\sin\theta = 2\times 4\sin 30 = 8\times 0.5 = 4\ \text{N.m}$ باتجاه $\overset{+}{z}$ (عمودي على الصفحة للخارج)

2) $I_{cm} = mr^2 = 2\times(2)^2 = 8\ \text{kg m}^2$

$\tau = I_{cm}\alpha \Rightarrow 4 = 8\times\alpha \Rightarrow \alpha = 0.5\ \text{rad/s}^2$

الطاقة الحركية الدورانية :



تمهيد: اذا دار جسم كتلته (m) في مسار دائري بسرعة خطية (v)

طاقته الحركية $K=\frac{1}{2}mv^2$ ، لكن $v=\omega r$

$$\Rightarrow K=\frac{1}{2}mr^2\omega^2$$

لكن القصور الدوراني للجسم بالنسبة لمحور الدوران $I_{cm}=mr^2$

$$\Rightarrow K_R=\frac{1}{2}I_{cm}\omega^2$$

- اذا كان الجسم الذي يدور بحيث مركز كتلته يعمل حركة انتقالية سيكون له طاقة حركية واخرى دورانية

$$K=\frac{1}{2}mv_{cm}^2+\frac{1}{2}I_{cm}\omega^2$$

حيث v_{cm} : السرعة الخطية لمركز الكتلة ، I_{cm} : القصور الدوراني حول محور يمر بمركز الكتلة

س) احسب الطاقة الحركية الدورانية لدولاب كتلته (25 kg) يدور بمعدل (6) دورات في الثانية ، اذا كان نصف قطر التدوير الخاص به (22 cm)

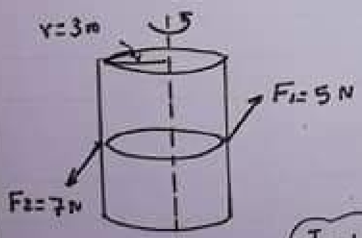
الحل:

- القصور الدوراني لقشرة اسطوانية رقيقة (دولاب) نصف قطرها R : $I=MR^2$

$$I=25\times(0.22)^2=1.12\ kg.m^2$$

- $f=6\ rev/s$ ⟸ $\omega=2\pi f=2\pi\times 6=12\pi\ rad/s$

- $K_R=\frac{1}{2}I\omega^2=\frac{1}{2}\times 1.12\times(12\pi)^2=795.9\ J$



س) يبين الشكل اسطوانة قصورها الدوراني حول محور الدوران ($2 kg.m^2$) ونصف قطر قاعدتها (3 m) ، بدأت حركتها من السكون تحت تأثير قوتين $F_1=5N$ ، $F_2=7N$ ، جد الطاقة الحركية الدورانية للاسطوانة بعد ثانيتين من بدء حركتها.

الحل:

- القصور الدوراني لاسطوانة مصمتة نصف قطرها (R) حول محورها الطولي $I=\frac{1}{2}MR^2$
لكن في هذا السؤال $I=2\ kg\,m^2$ «معطاة»

- عزم كل قوة يتجه الى أعلى:

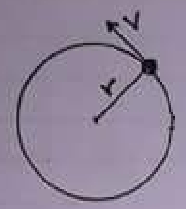
$\tau_1=rF_1\sin 90=3\times5\times1=15\ N.m$ | $\tau_2=rF_2\sin 90=3\times7\times1=21\ N.m$ | $\tau_{net}=15+21=36\ N.m$

- $\tau_{net}=I\alpha \Rightarrow 36=2\times\alpha \Rightarrow \alpha=18\ rad/s^2$

- $\omega_2=\omega_1+\alpha t \Rightarrow \omega_2=0+18\times2=36\ rad/s$

- $K_R=\frac{1}{2}I\omega^2=\frac{1}{2}\times2\times(36)^2=1296\ J$

الزخم الزاوي:



لنفرض أن جسم نقطي كتلته (m) يتحرك بسرعة (v) في مسار دائري نصف قطره (r)

الزخم الزاوي: $\boxed{L = \vec{r} \times \vec{p}}$ لكن الزخم الخطي $P = mv$

$\Leftarrow$ $\boxed{L = mvr}$ وحدته $kg\,m^2/s$

اتجاه الزخم الزاوي حسب قاعدة اليد اليمنى:
- إذا كان الدوران عكس عقارب الساعة $\Leftarrow$ باتجاه $\hat{Z}^{+}$
- إذا كان الدوران بعكس عقارب الساعة $\Leftarrow$ باتجاه $\hat{Z}^{-}$

• لكن $v = \omega r$ $\Leftarrow$ $L = mr^2\omega$ $\Leftarrow$ $\boxed{L = I\omega}$

بملاحظة حسب قانون نيوتن الثاني $F_{net} = \dfrac{\Delta P}{\Delta t}$

ومن التماثل بين الحركتين الدورانية والانتقالية $\Leftarrow$ $\boxed{\tau_{net} = \dfrac{\Delta L}{\Delta t}}$

حيث τ_{net}: العزم الكلي الذي يعمل على تدوير الجسم

ΔL: التغير في الزخم الزاوي خلال الفترة الزمنية Δt

س) منشار يستخدم لتقطيع الأحجار على شكل قرص مستدير يدور بسرعة منتظمة حول محور يمر من مركزه وعمودي على وجهيه، فإذا كان ينجز 100 دورة خلال ثلث دقيقة وكان قصوره الدوراني $7\,kg\,m^2$ احسب

1) سرعته الزاوية 2) زخمه الزاوي

الحل:

1) $f = \dfrac{100}{\frac{1}{3} \times 60} = \dfrac{100}{20} = 5\ HZ$ (rev/s) $\Rightarrow \omega = 2\pi f = 2\pi \times 5 = 10\pi\ rad/s$

2) $L = I\omega = 7 \times (10\pi) = 70\pi = 70 \times 3.14 = 220\ kg\,m^2/s$

قانون حفظ الزخم الزاوي :

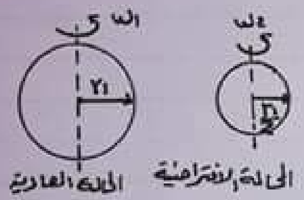
اذا كان العزم الكلي (τ_{net}) يساوي صفراً فان

$$\tau_{net} = \frac{\Delta L}{\Delta t} = 0 \Rightarrow \Delta L = 0 \Rightarrow L_2 - L_1 = 0 \Rightarrow \begin{matrix} L_1 = L_2 \\ I_1 \omega_1 = I_2 \omega_2 \end{matrix}$$

- نص قانون حفظ الزخم الزاوي "الزخم الزاوي لجسم أو مجموعة من الأجسام ثابت مالم تؤثر عليه عزوم دوران خارجية"
- شروط حفظ الزخم الزاوي
  1) ان تكون محصلة العزوم المؤثرة على الجسم أو المنظومة تساوي صفراً
  2) أن يبقى محور الدوران ثابتاً دون تغيير.

مثال: تدور الأرض حول محورها دورة واحدة في كل يوم ، افترض أن الأرض قد انكمشت بطريقة ما بحيث أصبح قطرها مساوياً لنصف قيمته الحالية، ما سرعة الأرض في الحالة الافتراضية.

الحل:



- المقصور الدوراني لكرة صلبة مصمتة نصف قطرها R حول محورها = $\frac{2}{5} M R^2$

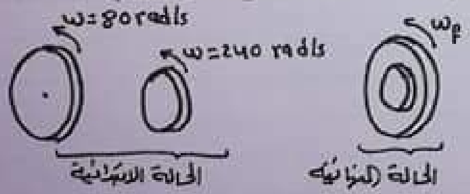
$$L_1 = L_2 \Rightarrow I_1 \omega_1 = I_2 \omega_2$$

$$\Rightarrow \left(\frac{2}{5} m r_1^2\right) \times \omega_1 = \frac{2}{5} m \times \left(\frac{r_1}{2}\right)^2 \times \omega_2 \Rightarrow \omega_2 = 4\omega_1$$

أي 4 دورة/يوم (أي ان طول اليوم سوف يصبح 6 ساعات)

مثال: قرصان الأول كتلته (1kg) ونصف قطره (0.2m) والآخر كتلته (4kg) ونصف قطره (0.15m)، يدور القرص الأخف بسرعة زاوية ابتدائية (80 rad/s) بينما يدور القرص الأثقل بسرعة زاوية ابتدائية 240 rad/s اذا التصق القرصان معاً وسارا بنفس السرعة الزاوية فاحسب مقدار هذه السرعة الزاوية؟

الحل:



- المقصور الدوراني لقرص رقيق مصمت نصف قطره R حول محور يمر من المركز عمودياً على مستواه = $\frac{1}{2} M R^2$

$$I_1 = \frac{1}{2} M R^2 = \frac{1}{2} \times 1 \times (0.2)^2 = 0.02\ kg\,m^2$$

$$I_2 = \frac{1}{2} M R^2 = \frac{1}{2} \times 4 \times (0.15)^2 = 0.045\ kg\,m^2$$

$$\Sigma L_i = \Sigma L_f$$

$$I_1 \omega_{1i} + I_2 \omega_{2i} = (I_1 + I_2)\,\omega_f$$

$$0.02 \times 80 + 0.045 \times 240 = (0.02 + 0.045) \times \omega_f$$

$$\Rightarrow \omega_f = 190.8\ rad/s$$

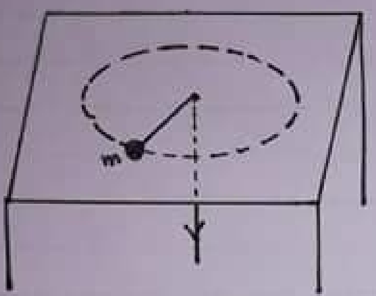
مثال: تدور متزلجة على الجليد حول نفسها بذراعين مفتوحتين بمعدل (1.9) دورة في الثانية فيكون عزم القصور الذاتي (القصور الدوراني) لها ($1.33\ kg.m^2$) ، واذا ضمت ذراعيها بعد ذلك بهدف زيادة سرعة دورانها حول نفسها فأصبح عزم القصور الذاتي (القصور الدوراني) لها ($0.48\ kg.m^2$) ، ما السرعة الزاوية في هذه الحالة

الحل:

$$\omega_1 = 2\pi f_1 = 2\pi \times 1.9 = 11.9\ rad/s \Rightarrow I_1 \omega_1 = I_2 \omega_2$$

$$\Rightarrow 1.33 \times 11.9 = 0.48 \times \omega_2 \Rightarrow \omega_2 = 33\ rad/s$$

س) تدور كرة صغيرة كتلتها (m) مشبكة في نهاية خيط في مسار دائري على سطح طاولة أفقي أملس ويمر الطرف الآخر للخيط عبر ثقب في سطح الطاولة كما في الشكل المجاور



اذا كانت تدور بسرعة (2.4 m/s) في مسار دائري نصف قطره (0.8 m) ثم سحب الخيط ببطء عبر الثقب بحيث يقل نصف القطر الى (0.48m) فكم تصبح سرعة الكرة (V_2)

الحل:

بما أن القوة تمر في مركز كتلة الكرة فان ذراع القوة يساوي صفراً وبالتالي فان عزم الدوران المحصل يساوي صفراً أي أن الزخم الزاوي محفوظ

• عزم القصور الذاتي للكرة حول مركز الدوران: $I = m r^2$

$$I_1 \omega_1 = I_2 \omega_2 \Rightarrow \cancel{m} r_1^2 \times \omega_1 = \cancel{m} r_2^2 \times \omega_2$$

لكن $v = \omega r \Rightarrow \omega = \frac{v}{r} \Rightarrow r_1^2 \times \frac{v_1}{r_1} = r_2^2 \times \frac{v_2}{r_2} \Rightarrow r_1 v_1 = r_2 v_2$

$$\Rightarrow 0.8 \times 2.4 = 0.48 \times v_2$$

$$\Rightarrow v_2 = 4 \text{ m/s}$$

س) علل: يقوم الغطاس عند القفز بلوي جسمه وضم صدره الى ركبتيه، وعندما يقترب من الماء يقوم بفرد جسمه

الجواب: عندما يلوي جسمه ويضم صدره الى ركبتيه يجعل عزم قصوره الذاتي أصغر ما يمكن فتزداد سرعته الزاوية وقبل وصوله للماء بقليل يفرد جسمه فيزداد عزم قصوره الذاتي وتتناقص سرعته الزاوية.

س) علل: يقوم الراقص على الجليد بضم يديه الى صدره عند الدوران ويفردهما عندما يريد التوقف عن الدوران

الجواب:

عندما يضم يديه الى صدره يتناقص عزم القصور الذاتي لديه فيدور بسرعة زاوية كبيرة، وعندما يريد التباطؤ أو التوقف يفرد يديه فيزيد عزم قصوره الذاتي وتتناقص سرعته الزاوية.
