الدرس الأول: الأسس واللوغاريتمات

أولاً: قوانين الأسس:

إذا كانت أ>صفر ، م،ن أعداد حقيقية فإن:

تعريف: $أ^{ن} = أ \times أ \times أ \times ..... \times أ$ (ن من المرات) ، حيث يسمى أ بالأساس ، ن هو الأس

مثلاً: $٣^{٤} = ٣ \times ٣ \times ٣ \times ٣ = ٨١$ (نضرب الأساس ٣ في نفسه ٤ مرات وهي قيمة الأس)

القانون	مثال عليه
$أ^{ن} \times أ^{م} = أ^{ن+م}$	$٢^{٣} \times ٢^{٤} = ٢^{٧} = ٢ \times ٢ \times ٢ \times ٢ \times ٢ \times ٢ \times ٢ = ١٢٨$
$أ^{ن} \div أ^{م} = أ^{ن-م}$	$٥^{٨} \div ٥^{٦} = ٥^{٢} = ٥ \times ٥ = ٢٥$
$(أ^{ن})^{م} = أ^{ن \times م}$	$(١٠^{٢})^{٤} = ١٠^{٨} = ١٠٠٠٠٠٠٠٠$
$(أ \times ب)^{ن} = أ^{ن} \times ب^{ن}$	$(٢ \times ٣)^{٢} = ٢^{٢} \times ٣^{٢} = ٤ \times ٩ = ٣٦$
$\left(\frac{أ}{ب}\right)^{ن} = \frac{أ^{ن}}{ب^{ن}}$	$\left(\frac{٧}{٥}\right)^{٢} = \frac{٤٩}{٢٥}$
$أ^{-ن} = \frac{١}{أ^{ن}}$	$٤^{-٣} = \frac{١}{٤^{٣}} = \frac{١}{٦٤}$
$أ^{صفر} = ١$	$٦^{صفر} = ٥^{صفر} = (-٢)^{صفر} = ١$
$أ^{\frac{١}{ن}} = \sqrt[ن]{أ}$	$٨١^{\frac{١}{٤}} = \sqrt[٤]{٨١} = ٣$
$أ^{\frac{م}{ن}} = \sqrt[ن]{أ^{م}}$	$٨^{\frac{٢}{٣}} = \sqrt[٣]{٨^{٢}} = \sqrt[٣]{٦٤} = ٤$

نشاط (١) : جد قيمة كل من:

١) $٥^{٢} =$ ..... ٢) $٤^{-٣} =$ .....

٣) $٢^{٣} \times ٢^{٥} =$..... ٤) $(٠,٧)^{-٢} =$.....

٥) $٥^{٦} \times ٢^{٦} =$..... ٦) $\frac{٣^{٥} \times ٣^{٧}}{٣^{٩} \times ٣^{٢}} =$ .....

٧) $(-١٢٥)^{\frac{١}{٣}} =$ ..... ٨) $(\frac{٤}{٩})^{\frac{-١}{٢}} =$ .....

نشاط (٢): حل المعادلات الأسية التالية:

١) $٣^{٢س+٥} = ٨١$ .....

٢) $٥^{٢-٣س} = ١$ .....

٣) $٢^{٣} \times ٤^{س} = ٣٢$ .....

.....

٤) $٣^{٢س} \times ٣^{س+١} = ٩$ .....

.....

٥) $\frac{٥^{٣س-١}}{٥^{س-٢}} = \frac{١}{١٢٥}$ .....

.....

ثانياً: قوانين اللوغاريتمات:

تعريف: لو$_{م}$ س = ب تعني أن م^{ب} = س مثلاً : لو$_{٥}$ ٢٥ = ٢ لأن ٥ ^{٢} = ٢٥

ملاحظة: إذا كان الأساس م= ١٠ فإنه لا يكتب تحت رمز لو **(و يطلق عليه اسم اللوغاريتم العادي)**

القانون	مثال عليه
لو$_{م}$ س + لو $_{م}$ص = لو$_{م}$ (س×ص)	لو$_{٦}$ ٤ + لو$_{٦}$ ٩ = لو$_{٦}$ (٤×٩) = لو$_{٦}$ ٣٦ = ٢
لو$_{م}$ س – لو $_{م}$ص = لو$_{م}$ (س÷ص)	لو$_{٢}$ ١٠ – لو$_{٢}$ ٥ = لو$_{٢}$ (١٠÷٥) = لو$_{٢}$ ٢ = ١
لو$_{م}$ م = ١	لو$_{٧}$ ٧ = ١
لو$_{م}$ ١ = صفر	لو$_{٨}$ ١ = صفر
لو$_{م}$ س ^{ن} = ن لو$_{م}$ س	لو$_{٣}$ ٩ ^{٥} = ٥ لو$_{٣}$ ٩ = ٥×٢ = ١٠
لو$_{م}$ م ^{ن} = ن لو$_{م}$ أ = ن	لو١٠ ^{٤} = ٤ لو ١٠ = ٤
لو$_{م}$ $(\frac{١}{س})$ = – لو$_{م}$ س	لو$_{٢}$ $(\frac{١}{٨})$ = – لو$_{٢}$ ٨ = –٣

✍ **نشاط(١): حول من الصيغة الأسية للوغاريتمية:**

١) ٤^{٣}=٦٤ .....

٢) ٢^{س}= ٣٢ .....

(٢) حول من الصيغة اللوغاريتمية للأسية:

١) لو$_{٦}$ ٣٦ =٢ .....

٢) –٢لو$_{٥}$ س = ٣ .....

✍ **نشاط (٢): جد قيمة ما يلي:**

١) لو$_{٣}$ ٨١ = ...

٢) لو$_{٤}$ (٠,٢٥) = ...

٣) لو٢ + لو ٥٠ = ...

٤) لو (٠,٠٠١)= .....

٥) لو$_{٣}$ $\sqrt[٣]{٢٧}$ = ...

٦) لو$_{٥}$ ١٢٥ – لو$_{٥}$ ٢٥=.....

٧) لو$_{٤٩}$ ٧ = ...

٨) لو$_{٢}$ ١٢ – لو$_{٢}$ ٣ = ...

✍ **نشاط(٣) حل المعادلات اللوغاريتمية التالية:**

١) لو$_{٢}$ (س–٣) = ٥ .....

٢) لو$_{٣}$ (س–٦)+لو$_{٣}$ س = ٢ .....

.....

٣) لو$_{٥}$ (٢س) – لو$_{٥}$ (س+١٨) = –١ .....

.....

٤) لو$_{٤}$ $\sqrt[٣]{س+٣}$ = ٣ .....

.....

نشاط(٤): إذا كان لو$_{٢}$ ٥ = ٢,٣ ، لو$_{٢}$ ٧ = ٢,٨ فإن :

١) لو$_{٢}$ ٢٥ = ... ، ٢) لو$_{٢}$ ١٤ = ...

٣) لو$_{٢}$ ٣٥ = ... ، ٤) لو$_{٢}$ ٠,٧ = ...

الدرس الثاني : الاقتران الأسي:

الهدف
- يعرف الاقتران الأسي
- يمثل الاقتران الأسي بيانياً
- يدرس خصائص الاقتران الأسي
- يتعرف إلى العدد النيبيري

تعريف

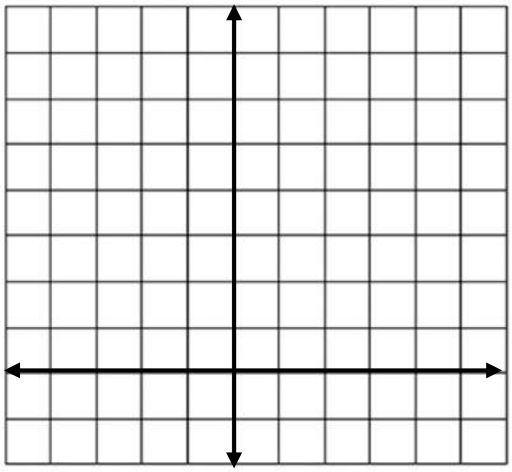
الاقتران الأسي هو أي اقتران يمكن كتابته على الصورة

ق(س) = $أ^{س}$ حيث أ > صفر، أ ≠ ١ ، س ∈ ح

أولاً : عندما تكون أ > صفر

نشاط (١): مثل الاقتران : ق(س) = $٢^{س}$ بيانياً من خلال الجدول التالي:

س	−٢	−١	٠	١	٢
ق(س)					



من خلال الرسم لاحظ أن :

١- الاقتران يقطع محور الصادات عند النقطة .....

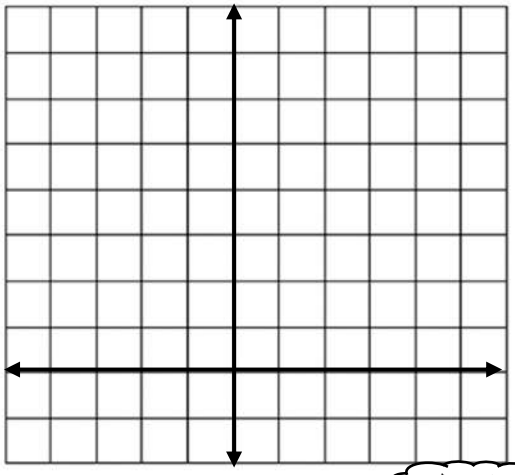
٢- كلما زادت قيم س ..... قيم ص المناظرة لها .

بمعنى أن الاقتران .....

٣- مجال الاقتران هو ..... ، ومداه هو ..... .

نشاط (٢) : مثل بيانياً الاقتران ق(س) = $٣^{س}$ ثم ادرس خصائصه

س	−٢	−١	٠	١	٢
ق(س)					



.....

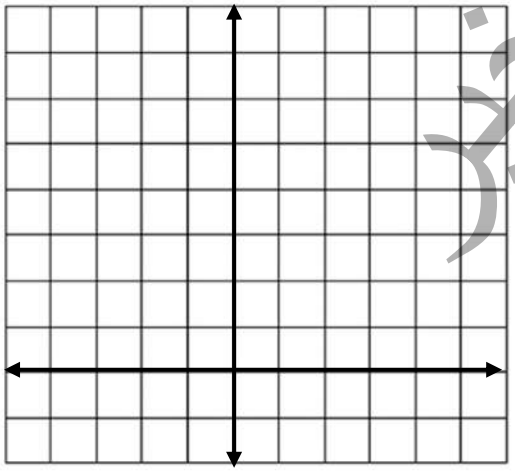
.....

.....

ثانياً: عندما تكون صفر < أ < ١

نشاط (٣) : مثل بيانياً الاقتران ق(س) =$(\frac{١}{٢})^{س}$

س	−٢	−١	٠	١	٢
ق(س)					



لاحظ

$(\frac{١}{٢})^{س}$ = $٢^{-س}$ ، لماذا ؟

من خلال الرسم لاحظ أن :

١- الاقتران يقطع محور الصادات عند النقطة .....

٢- كلما زادت قيم س ..... قيم ص المناظرة لها .

بمعنى أن الاقتران .....

٣- مجال الاقتران هو ..... و مداه هو ..... .

٤- الاقتران ق(س) =$(\frac{١}{٢})^{س}$ هو انعكاس للاقتران .....

حول محور .....

** هل يمكنك استنتاج خصائص الاقتران ق(س) = $(\frac{١}{٣})^{س}$ دون رسمه ؟

سامي أبو الخير

ملاحظة

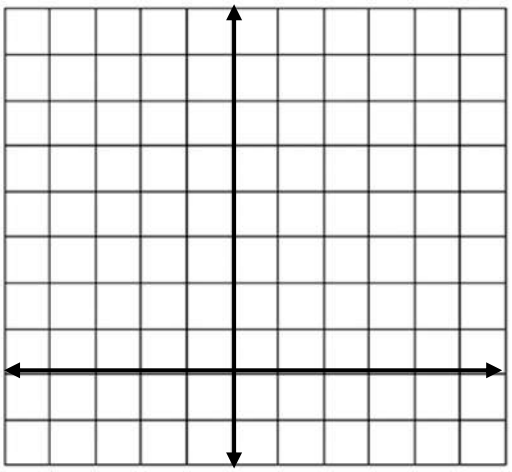
– العدد النيبيري هـ هو عدد غير نسبي يساوي تقريباً ٢,٧٢

– الاقتران الأسي الطبيعي هو اقتران أسي أساسه العدد هـ

نشاط (١) : باستخدام الآلة الحاسبة جد قيمة كل من :

(١) هـ +٣ = ... (٢) هـ^{٢} = ... (٣) هـ$^{\sqrt{٦}}$ = ... (٤) هـ$^{-٢}$ = ...

نشاط (٢): مثل بيانياً الاقتران ق(س) = هـ^{س} مع بيان خصائصه.



س	−٢	−١	٠	١	٢
ق(س)					

.....

.....

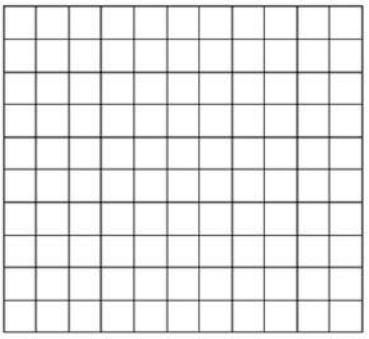
.....

** هل يمكنك ذكر خصائص الاقتران ق(س) = هـ$^{-س}$ دون رسمه ؟

.....

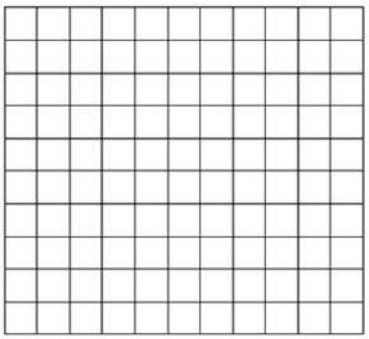
نشاط (٣): باستخدام التحويلات الهندسية ارسم منحنى كل من الاقترانات التالية مع إيجاد المدى .

(١) ق(س) = ٢^{س} +١ (٢) ق(س) = ٢ $^{(س-٣)}$ (٣) ق(س) = ٣ $^{(٢-س)}$



المدى = ... المدى = ... المدى = ...

(٤) ق(س) = هـ$^{-س}$ (٥) ق(س) = −٣ هـ^{س} (٦) ق(س) = −هـ$^{-س}$



المدى = ... المدى = ... المدى = ...

ماذا تلاحظ على مدى الاقترانات السابقة ؟ .....

الدرس الثاني : الاقتران اللوغاريتمي

الهدف

- يعرف الاقتران اللوغاريتمي
- يمثل الاقتران اللوغاريتمي بيانياً
- يجد مجال الاقتران اللوغاريتمي
- يحدد خصائص الاقتران اللوغاريتمي

تعريف

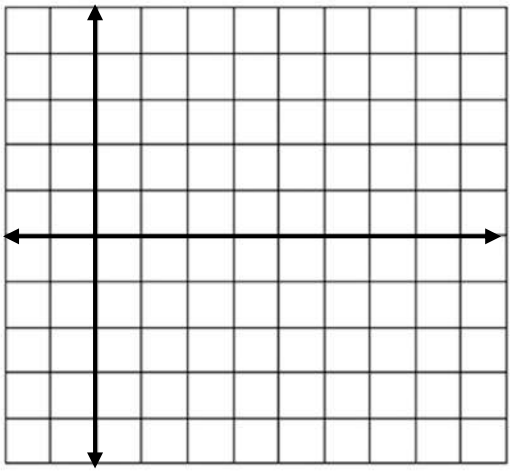
الاقتران اللوغاريتمي هو أي اقتران يمكن كتابته على الصورة:

ق(س) = لو$_{أ}$ س حيث أ > صفر، أ ≠ ١ ، س > صفر

تعالوا نتذكر بعض قوانين اللوغاريتمات من خلال ما يلي :

(١) لو$_{٣}$ ٨١ = ... لأن ..... = ٨١ ، (٢) لو$_{٢}$ $\frac{١}{٨}$ = ...

(٣) لو$_{٧}$ ١ = ... ، (٤) لو$_{٥}$ ١٢٥ = ...



نشاط (١) : أكمل الجدول التالي ثم مثل الاقتران ق(س) = لو$_{٢}$ س بيانياً

س	٨	٤	٢	١	$\frac{١}{٢}$	$\frac{١}{٤}$	$\frac{١}{٨}$
ق(س)							

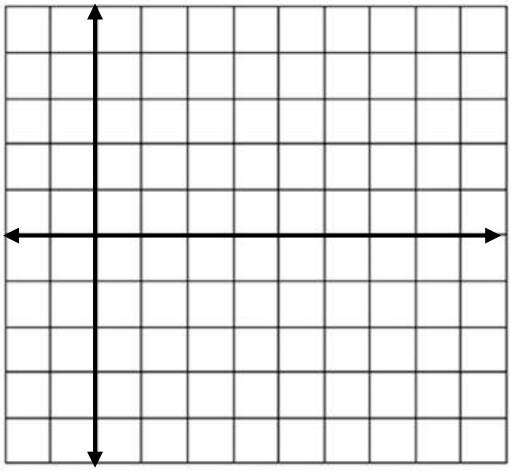
من خلال الرسم لاحظ أن :

١- مجال الاقتران هو ..... ، ومداه هو ..... .

٢- الاقتران يقطع محور السينات عند النقطة .....

٣- كلما زادت قيم س ..... قيم ص المناظرة، بمعنى أن الاقتران .....

٤- الاقتران ق (س) = لو$_{٢}$ س هز انعكاس للاقتران ق(س) = ٢^{س} حول .....



نشاط (٢) : ارسم منحنى الاقتران ق(س)= لو$_{\frac{١}{٢}}$ س

س	٨	٤	٢	١	$\frac{١}{٢}$	$\frac{١}{٤}$	$\frac{١}{٨}$
ق(س)							

١- مجال الاقتران هو ..... ، ومداه هو .....

٢- الاقتران يقطع محور السينات عند النقطة .....

٣- الاقتران متناقص لأنه .....

٤- الاقتران ق(س)= لو$_{\frac{١}{٢}}$ س انعكاس للاقتران ق(س) = لو$_{٢}$ س حول .....

نشاط (٣) دون رسم الاقتران احسب مجال كل من الاقترانات التالية:

١- ق(س)= لو$_{٢}$ (س + ٣) .....

٢- ق(س)= لو (٥-٢س) +١ .....

.....

٣- ق(س)= لو$_{٣}$ (س^{٢}-٧س) .....

.....

٤- ق(س)= لو$_{\frac{١}{٢}}$ (٩ – س^{٢}) .....

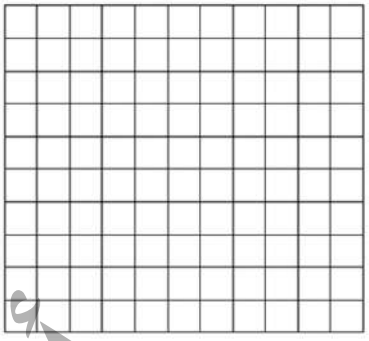
.....

٥- ق(س) = لو$_{٦}$ س – ٢ .....

.....

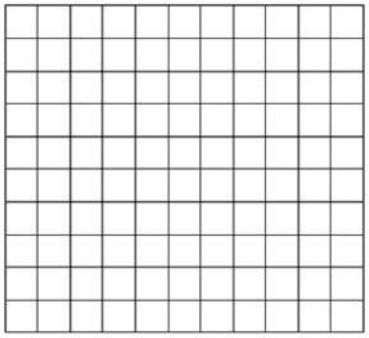
نشاط (٤) : باستخدام التحويلات الهندسية ارسم منحنى كل من الاقترانات التالية مع توضيح مجال كل اقتران

(١) ق(س) = لوهـ س



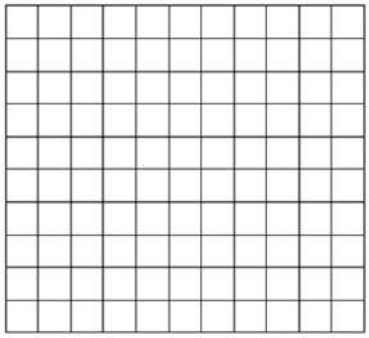
المجال .....

(٢) ق(س)= لو٢ (س−٢)



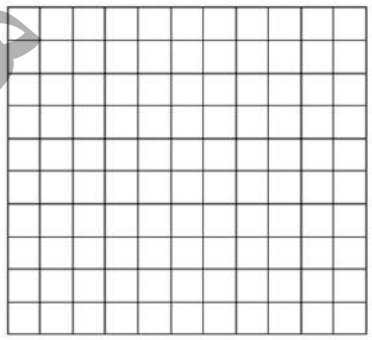
المجال .....

(٣) ق(س) = لو٣ (س) +٣



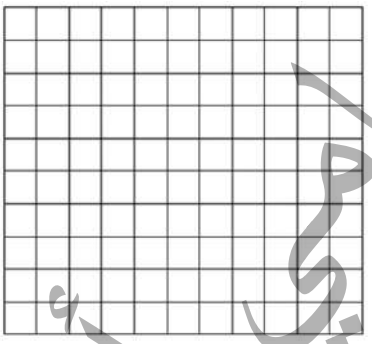
المجال .....

(٤) ق(س) = لو٢ (س+١) −٢



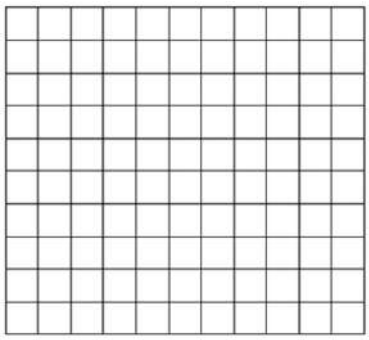
المجال .....

(٥) ق(س) = ١− لوهـ (س)



المجال .....

(٦) ق(س) = − لو١/٢ (س)



المجال .....

نشاط (٥) أكمل جدول المقارنات بين كل من الاقترانات التالية :

وجه المقارنة	ق(س) = ٢^س	ق(س)= (١/٢)^س	ق(س)= لو٢ س	ق(س)= لو١/٢ س
المجال				
المدى				
المقطع السيني	****	****		
المقطع الصادي			****	****
التزايد و التناقص				
الانعكاس	* ق(س)= (١/٢)^س حول	* ق(س) = ٢^س حول	* ق(س) = لو١/٢ س حول ..... * ق(س) = ٢^س حول	* ق(س)= لو٢ س حول .....

سامي أبو الخير

تمارين عامة

السؤال الأول : ضع علامة (✓) أو (✗)

١- ( ) الاقتران ق(س) = (-٢)^{س} يعتبر اقتراناً أسياً .

٢- ( ) يكون الاقتران ق(س) = ﻫ ^{س} متزايداً إذا كانت ﻫ > ١

٣- ( ) لو$_{ﻫ}$ س يسمى اللوغاريتم الطبيعي .

٤- ( ) الاقتران ق(س) = ٧^{س} يمر بالنقطة (١،٧) .

٥- ( ) الاقتران ق(س)= لو س يمر بالنقطة (١٠، ١) .

٦- ( ) الاقتران ق(س) = لو$_{١}$ س يعتبر اقتراناً لوغاريتمياً .

٧- ( ) إذا قلت قيم س كلما زادت قيم ص المتناظرة يكون الاقتران متناقصاً .

٨- ( ) مجال الاقتران ق(س) = لو$_{٢}$ (س^{٢} +٣) هو مجموعة الأعداد الحقيقية .

٩- ( ) الاقتران ق(س) = لو س هو انعكاس للاقتران هـ(س) = ١٠ ^{س} حول المستقيم ص= س

١٠-( ) الاقتران ق(س) = هـ ^{س} انعكاس للاقتران م(س) = لو$_{ﻫ}$ س حول محور السينات .

١١-( ) مدى الاقتران ق(س)= -هـ ^{س} هو ع$^{-}$

١٢-( ) إذا كان لو س = ١ فإن س = صفر .

١٣-( ) إذا كان ٣ $^{٢س+٤}$ = ١ فإن س= -٢

١٤-( ) الصورة اللوغاريتمية للمقدار: هـ$^{(٢-س)}$ = ٣ هي: لو$_{ﻫ}$ (٢-س) = ٣

١٥-( ) إذا كان لو$_{٢}$ (٤س) = صفر فإن س= -٤

السؤال الثاني: اختر الإجابة الصحيحة

١- صورة الاقتران ق(س) = ٣ ^{س} بالانسحاب وحدتين للأسفل هي :

(أ) م(س)= ٣ ^{س} +٢ (ب) م(س)= ٣ $^{(س+٢)}$ (ج) م(س)= ٣ $^{(س-٢)}$ (د) م(س)= ٣ ^{س} -٢

٢- واحد من الاقترانات التالية يعتبر اقتراناً لوغاريتمياً :

(أ) ق(س)= لو$_{-٢}$ (س) (ب) ق(س)= لو$_{س}$ (هـ) (ج) ق(س) = لو$_{ﻫ}$ (هـ) (د) ق(س)= - لو س

٣- واحد من الاقترانات التالية هو انعكاس للاقتران ق(س) = هـ ^{س} في محور السينات .

(أ) م(س)= هـ$^{-س}$ (ب) م(س)= -هـ^{س} (ج) م(س)= لو$_{ﻫ}$ س (د) م(س) = -لو$_{ﻫ}$ س

٤- إحدى الخصائص التالية لا تنطبق على الاقتران ق(س) = ٢$^{-س}$

(أ) يمر بالنقطة (٠، ١) (ب) الاقتران متناقص (ج) مداه هو ع (د) مجاله هو ع

٥- واحدة من العبارات التالية صحيحة بشأن الاقتران ق(س) = لو$_{٢}$ س

(أ) يمر بنقطة الأصل (ب) يقطع محور الصادات في النقطة (٠، ١)

(ج) يقطع محور السينات في النقطة (١،٠) (د) لا يقطع أي من المحورين

٦- مجال الاقتران ق(س) = لو (س^{٢} +٢س) هو

(أ) ع - [-٢، ٠] (ب) [-٢، ٠] (ج)]-٢،٠[(د) ع -] -٢،٠[

٧- مجال الاقتران ق(س)= لو (٤-س^{٢}) هو

(أ)]-٢، ٢[(ب) [-٢، ٢] (ج) ح - [-٢، ٢] (د) ح -]-٢، ٢[

٨- صورة الاقتران ق(س)= لو$_{٢}$ س بالانعكاس في محور السينات ثم الانسحاب ٣ وحدات للأعلى هي :

(أ) هـ(س)=٣- لو$_{٢}$ س (ب) هـ(س)= - لو$_{٢}$ (س-٣) (ج) هـ(س)= لو$_{٢}$ س -٣ (د) هـ(س)= لو$_{٢}$ (٣-س)

٩- أي من الاقترانات التالية هو انعكاس للاقتران ق(س) = ٣^{س} حول المستقيم ص= س

(أ) هـ(س)= ٣$^{-س}$ (ب) هـ(س)= -(٣)^{س} (ج) هـ(س)= لو$_{٣}$ س (د) هـ(س)= -لو$_{٣}$ س

١٠- واحد من الاقترانات التالية يعتبر اقتراناً أسياً

(أ) ق(س)=(-$\frac{١}{٢}$)^{س} (ب) ق(س)= ($\frac{١}{٢}$)^{س} (ج) ق(س)= س^{س} (د) ق(س)= س^{٣}

١١- إذا كان ٣$^{٤-س}$ = ٢٧ فإن س =

(أ) ١ (ب) ٧ (ج) -١ (د) -٧

١٢- إذا كان لو$_{٢}$ س – لو$_{٢}$ ص = ١ فإن :

(أ) س=ص (ب) س=٢ص (ج) ٢س=ص (د) س-ص=١

١٣- مدى الاقتران ق(س)= ٢-هـ^{س}

(أ) ح$^{+}$ (ب) ح$^{-}$ (ج)]٢،∞[(د)]-∞، ٢[

١٤- إذا كان لوم س = ٥ ، لوم ص = ٧ فإن لوم (س×ص) =

(أ) ١٢ (ب) ٣٥ (ج) ٢ (د) -٢

١٥- الصورة الأسية للوغاريتم : ٣لوم (س+١) = ٢ هي :

(أ) م$^{(س+١)}$ = $\frac{٢}{٣}$ (ب) م^{٢} = (س+١)^{٣} (ج) م^{٢} = ٣$^{(س+١)}$ (د) م^{٢} = ٣(س+١)

السؤال الثالث: أكمل ما يلي

١- الاقتران و(س)= ٣$^{(س-٢)}$ +٥ هو انسحاب للاقتران ق(س)= ٣^{س} بمقدار ..... وحدة إلى .....
و ..... وحدة إلى ..... .

٢- الاقتران و(س)= لو$_{٢}$ (س+٤)-٣ هو انسحاب للاقتران ق(س)= ..... بمقدار .....وحدة إلى
..... و ..... وحدة إلى ..... .

٣- الاقتران و(س)= ٣-هـ$^{(س)}$ هو ..... للاقتران ق(س)= هـ^{س} حول ..... متبوعاً بانسحاب مقداره ..... إلى ..... .

السؤال الرابع: إذا كان لو$_{٢}$ س = ٨ ، لو$_{٢}$ ص = ١٤ جد قيمة ما يلي:

١) لو$_{٢}$ س×ص = ...

٢) لو$_{٢}$ ٤ص^{٣} = ...

٣) لو$_{٢}$ $\frac{ص}{س}$ = ...

٤) لو$_{٢}$ $\frac{١}{٢س}$ = ...

٥) لو$_{٢}$ $\sqrt{ص}$×$\sqrt[٤]{س}$ = ...

السؤال الخامس : جد قيمة كل من :

١) لو$_{٥}$ $\frac{١}{٢٥}$ = ...

٢) لو$_{هـ}$ هـ^{٣} = ...

٣) لو$_{٦}$ ٤ + لو$_{٦}$ ٩ = ...

٣) لو$_{٢}$ $\sqrt{٣٢}$ + لو$_{٢}$ $\sqrt{١٢٨}$ = ...

٤) لو ٠,٠٠١ = ...

٥) لو$_{٢}$ ٠,٥ = ...

٦) هـ$^{-٢}$ +٣ = ...

٧) ٢ $\sqrt{هـ^{-}}$ +٥ = ...

٨) ٢٥^{٧} × ٤^{٧} = ...

٩) $\sqrt[٨]{٣}$ = ...

١٠) $\frac{٤^{٧} \times ٢^{-٣}}{٨ \times ٤^{٥}}$ = ...

السؤال السادس: حل المعادلات التالية:

١) لو$_{٥}$ (س+٢)+لو$_{٥}$ (س−٢)= ١ .....

.....

.....

٢) لو$_{٧}$ (٤س) = لو$_{٧}$ (س^{٢}+٣) .....

.....

.....

٣) لو (س^{٢}) – لو ٣س = ١ .....

.....

.....

٤) ٣ ^{٢س} × ٣ $^{(س+١)}$ = $\frac{١}{٢٧}$ .....

.....

.....

٥) ٢ $^{٣س+١}$ × ٤ $^{س+٢}$ = ٣٢ .....

.....

.....

٦) ٢ ^{٢س} – ٣× ٢ ^{س}+٢ = ٠ .....

.....

.....

.....

أ. سامي أبو الخير

السؤال الخامس : أدرس سلوك الاقترانات التالية حسب المطلوب:

(١) ق(س)= لو٢ (٣س+٥)

المجال : .....

المدى: .....

التزايد والتناقص : .....

(٢) ق(س)= ٣ $^{-س}$ – ٤

المجال : .....

المدى: .....

التزايد والتناقص : .....

السؤال السادس:

(١) جد قيمة كل من أ،ب التي تجعل منحنى الاقتران ق(س)= أ(٣)^{س}+ب يمر بالنقطتين **(١، ٣)** ، **(٠، ٢)**

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

(٢) جد قيمة أ ، ب التي تجعل الاقتران ق(س) = أ(٢)^{س} + ب يمر بالنقطتين (٢، ٧) ، (١، ٥)

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

مع تمنياتنا لكم بالتفوق الدائم

أ. سامي عبد العزيز أبو الخير