بِسۡمِ ٱللَّهِ ٱلرَّحۡمَٰنِ ٱلرَّحِيمِ

دولة فلسطين
وزارة التربية والتعليم العالي

الرياضيات

الجزء الثاني

للصف الثاني الثانوي

العلمي

المؤلفون

د. حسن عبد الرحيم يوسف «منسقاً»
أ. محمد حلمي نجم
أ. علي خليل حمد
د. محمد صالح
د. عزو عفانة
أ. محمد عالية
أ. محمد يوسف الجمل

قررت وزارة التربية والتعليم العالي في دولة فلسطين
تدريس كتاب الرياضيات للصف الثاني الثانوي العلمي في مدارسها للعام الدراسي ٢٠٠٦ / ٢٠٠٧م

الإشراف العام

رئيس لجنة المناهج:	د. نعيم أبو الحمص
مدير عام مركز المناهج:	د. صلاح ياسين

مركز المناهج

إشراف تربوي :	د.عمر أبوالحمص

الدائرة الفنية

إشراف إداري:	أحمد سياعرة
تصميم:	كمال محمود فحماوي
الإعداد المحوسب للطباعة:	حمدان بحبوح
تنضيد:	أسمهان فوزي الديسي، سمر محمود عامر، سيراء غسان سرحان

الفريق الوطني لمنهاج الرياضيات

د. فطين مسعد «منسقاً»	د. الياس ضبيط	شهناز الفار
علي خليل حمد	د. علي خليفة	ليانا جابر
د. محمد حمدان	محمد مقبل	وائل كشك

الطبعة الأولى التجريبية
٢٠٠٦م/١٤٢٧ هـ

مركز المناهج –حي المصيون–شارع المعاهد–أول شارع على اليمين من جهة مركز المدينة
ص .ب ٧١٩ – رام الله – فلسطين
تلفون ٢٩٦٩٣٥٠-٢-٩٧٠+ فاكس ٢٩٦٩٣٧٧-٢-٩٧٠+
الصفحة الالكترونية: www.pcdc.edu.ps – العنوان الالكتروني: pcdc@palnet.com

تمهيد

رأت وزارة التربية والتعليم العالي ضرورة وضع منهاج يراعي الخصوصية الفلسطينية؛ لتحقيق طموحات الشعب الفلسطيني حتى يأخذ مكانه بين الشعوب. إن بناء منهاج فلسطيني يعد أساساً مهمّاً لبناء السيادة الوطنية للشعب الفلسطيني، وأساساً لترسيخ القيم والديمقراطية، وهوحق إنساني، وأداة تنمية للموارد البشرية المستدامة التي رسختها مبادئ الخطة الخمسية للوزارة.

وتكمن أهمية المنهاج في أنه الوسيلة الرئيسة للتعليم، التي من خلالها تتحقق أهداف المجتمع؛ لذا تولي الوزارة عناية خاصة بالكتاب المدرسي، أحد عناصر المنهاج؛ لأنه المصدر الوسيط للتعلم، والأداة الأولى بيد المعلم والطالب، إضافة إلى غيره من وسائل التعلم: الإنترنت، والحاسوب، والثقافة المحلية، والتعلم الأسري، وغيرها من الوسائط المساعدة.

لقد قامت وزارة التربية والتعليم العالي بإتمام مرحلة تأليف جميع الكتب المدرسية (١ –١٢)، التي تُوِّجَت بتطبيق كتب الصف الثاني الثانوي (١٢) بجميع فروعه: العلمي، والعلوم الإنسانية، والمهني، والتقني، مع بداية العام الدراسي(٢٠٠٦ / ٢٠٠٧). وتعمل الوزارة حالياً على تنفيذ خطة تطوير شاملة في السنوات الثلاث القادمة، تغطي أربعة مجالات، وهي: أنشطة تطويرية (مراجعة جميع الكتب للصفوف(١ –١٢)، وأنشطة استكمالية (أدلة المعلم والوسائل المعينة)، وأنشطة مستقبلية (دراسات تقويمية وتحليلية لمناهج المراحل الثلاث في جميع المباحث أفقياً وعمودياً)، وأنشطة موازية (توسيع البنية التحتية في مجال الشبكات والتعليم الإلكتروني، وتحسين آلية امتحان الثانوية العامة).

وتعد الكتب المدرسية وأدلة المعلم التي أنجزت للصفوف الاثني عشر، وعددها يقارب ٤٥٠ كتاباً، ركيزة أساسية في عملية التعليم والتعلم، بما تشتمل عليه من معارف ومعلومات عُرضت بأسلوب سهل ومنطقي؛ لتوفير خبرات متنوعة، تتضمن مؤشرات واضحة، تتصل بطرائق التدريس، والوسائل والأنشطة وأساليب التقويم، وتتلاءم مع مبادئ الخطة الخمسية المذكورة أعلاه.

وتتم مراجعة الكتب وتنقيحها وإثراؤها سنويّاً بمشاركة التربويين والمعلمين والمعلمات الذين يقومون بتدريسها، وترى الوزارة الطبعات من الأولى إلى الرابعة طبعات تجريبية قابلة للتعديل والتطوير؛ كي تتلاءم مع التغيرات في التقدم العلمي والتكنولوجي ومهارات الحياة. إن قيمة الكتاب المدرسي الفلسطيني تزداد بمقدار ما يبذل فيه من جهود، ومن مشاركة أكبر عدد ممكن من المتخصصين في مجال إعداد الكتب المدرسية، الذين يحدثون تغييراً جوهريّاً في التعليم، من خلال العمليات الواسعة من المراجعة، بمنهجية رسخها مركز المناهج في مجالي التأليف والإخراج في طرفي الوطن الذي يعمل على توحيده.

إن وزارة التربية والتعليم العالي لايسعها إلا أن تتقدم بجزيل الشكر والتقدير إلى المؤسسات والمنظمات الدولية، والدول العربية والصديقة وبخاصة حكومة بلجيكا؛ لدعمها المالي لمشروع المناهج.

كما أن الوزارة لتفخر بالكفاءات التربوية الوطنية، التي شاركت في إنجاز هذا العمل الوطني التاريخي من خلال اللجان التربوية، التي تقوم بإعداد الكتب المدرسية، وتشكرهم على مشاركتهم بجهودهم المميزة، كلٌّ حسب موقعه، وتشمل لجان المناهج الوزارية، ومركزالمناهج، والإقرار، والمؤلفين، والمحررين، والمشاركين بورشات العمل، والمصممين، والرسامين، والمراجعين، والطابعين، والمشاركين في إثراء الكتب المدرسية من الميدان أثناء التطبيق.

وزارة التربية والتعليم العالي
مركز المناهج
أيلول ٢٠٠٦ م

بسم الله الرحمن الرحيم

مقدمة

الحمد لله رب العالمين وبعد . . .

يسرنا أن نقدم لزملائنا المعلمين والمعلمات، ولطلبتنا الأعزاء الجزء الثاني من كتاب الرياضيات للصف الثاني الثانوي العلمي، وفق الخطوط العريضة المعدلة لمبحث الرياضيات ضمن خطة المنهاج الفلسطيني الأول.

يشتمل الكتاب على ثلاث وحدات هي: التكامل وتطبيقاته، والقطوع المخروطية، والاحتمالات.

في الوحدة الرابعة (التكامل وتطبيقاته) قدمنا التكامل غير المحدود، والتجزئة ومجموع ريمان، والتكامل المحدود وخواصه، والنظرية الأساسية في التفاضل والتكامل، وطرق التكامل، وتطبيقات التكامل المحدود في المساحات والحجوم الدورانية.

وفي الوحدة الخامسة (القطوع المخروطية) قدمنا كلا من القطع المكافئ، والقطع الناقص، والقطع الزائد، في الوضع القياسي وفي وضع الانسحاب.

وفي الوحدة السادسة (الاحتمالات) قدمنا الاحتمال المشروط والاستقلال ونظرية بيز، والمتغير العشوائي المنفصل والمتصل وتوقعهما، وتوزيع ذات الحدين، والتوزيع الطبيعي.

أما من حيث الأسلوب، فقد حرصنا على التسلسل المنطقي للمفاهيم والنظريات، وعلى الدقة العلمية، دون تركيز زائد على براهين النظريات، واعتمدنا بدلاً من ذلك الرسوم التوضيحية والأمثلة المنوعة مع وضع استراتيجيات عامة للحل، حيثما أمكن.

ولقناعتنا أن طلبة الثانوية العامة حريصون كل الحرص على المعرفة والتعمق والاستزادة لتحقيق أفضل النتائج في امتحان الثانوية العامة تمهيداً لدراساتهم الجامعية، أتبعنا كل وحدة بمجموعة من التمارين والأسئلة المنوعة الموضوعية والمقالية التي تغطي المفاهيم والتعميمات والقوانين والمهارات الواردة في الوحدة، بالإضافة إلى التمارين والمسائل في نهاية كل بند من بنود الوحدات الثلاث.

نتمنى لأبنائنا الطلبة كل توفيق ونجاح، ونتقدم من زملائنا في الميدان، مشرفين ومشرفات، ومعلمين ومعلمات، من جميع محافظات الوطن الذين شاركوا في إثراء مسودات هذا الكتاب، بكل الاحترام والتقدير، سائلين المولى عز وجل أن يوفقهم في إكمال مسيرتهم النبيلة بتعليم طلبتنا الأعزاء وتوجيههم بكل صدق وأمانه، وتقديم التغذية الراجعة لمركز المناهج بعد وضع الكتاب موضع التنفيذ لإصدار طبعة جديدة منقحة.

والله ولي التوفيق

المؤلفون

المحتويات

الوحدة

٤

التكامل وتطبيقاته

٤-١ التكامل غير المحدود (Indefinite Integral)

تعرفنا فيما سبق عملية التفاضل التي تناولت أساساً إيجاد المشتقة الأولى لاقتران معلوم، واستخدمنا المشتقة في تطبيقات كثيرة منها إيجاد السرعة اللحظية لجسم متحرك، وميل المماس لمنحنى اقتران معلوم عند أي نقطة؛ وفي هذه الوحدة سنتعرف العملية العكسية لعملية التفاضل، أي إيجاد الاقتران الذي علمت مشتقته الأولى، وتسمى هذه العملية عملية التكامل. وكما سمينا الاقتران الناتج عن تفاضل اقتران معلوم الاقتران المشتق، فإننا نسمي الاقتران الأصلي الذي علمت مشتقته الأولى اقتراناً بدائياً (أو عكس المشتقة)، فمثلاً الاقتران $س^{٣}$ هو اقتران بدائي (أو عكس المشتقة) للاقتران $٣س^{٢}$، والاقتران جاس هو اقتران بدائي للاقتران جتاس، وهكذا.

بوجه عام:

تعريف:

يسمى الاقتران م(س) اقترانا بدائياً (أو عكس المشتقة) للاقتران ق(س) إذا كان $م'(س) = ق(س)$.

مثال (١): ليكن ق(س) = ٢. أكتب ثلاثة اقترانات بدائية للاقتران ق(س).

الحل: من معلوماتنا في التفاضل يكون كلٌّ من الاقترانات الآتية اقتراناً بدائياً للاقتران ق(س):

$م_{١}(س) = ٢س$

$م_{٢}(س) = ٢س + ٢$

$م_{٣}(س) = ٢س - ١$

وذلك لأن $م'_{١}(س) = م'_{٢}(س) = م'_{٣}(س) = ٢ = ق(س)$.

لاحظ أنه توجد اقترانات بدائية أخرى للاقتران ق(س) = ٢؛ وفي الواقع يوجد عدد لانهائي من هذه الاقترانات، وبالتأمل فيها نجد أنها تتخذ الصورة العامة ٢س + جـ، حيث جـ عدد حقيقي.

وتسمى هذه الصورة التكامل غير المحدود للاقتران ق(س) = ٢

تعريف:

إذا كان م(س) اقتراناً بدائياً للاقتران ق(س) (أي أن م َ(س) = ق(س)) فإن التكامل غير المحدود للاقتران ق(س)، ويرمز له بالرمز $\int$ ق(س)ءس، (ويُقرأ: تكامل ق(س) دال س) هو مجموعة جميع الاقترانات البدائية للاقتران ق(س) أي أن: $\int$ ق(س) ءس = م(س) + جـ

مثال (٢): باستخدام معلوماتك في التفاضل، أوجد كلاً من التكاملين غير المحدودين التاليين:

أ $\int$ ٤س^{٣} ءس

ب $\int$ قا^{٢}س ءس

الحل:

أ $\int$ ٤س^{٣} ءس = س^{٤} + جـ لأن $\frac{ء}{ءس}$ (س^{٤} + جـ) = ٤س^{٣}

ب $\int$ قا^{٢}س ءس = ظاس + جـ لأن $\frac{ء}{ءس}$ (ظاس + جـ) = قا^{٢}س

بالاعتماد على قوانين الاشتقاق المعروفة يمكنك التحقق من صحة قواعد التكامل غير المحدود الآتية:

١ $\int$ أ ءس = أ س + جـ ، أ، جـ $\in$ ح

٢ $\int$ س^{ن} ءس = $\frac{س^{ن+١}}{ن + ١}$ + جـ ، ن عدد حقيقي $\neq$ −١

٣ $\int$ جاس ءس = −جتاس + جـ

٤ $\int$ جتاس ءس = جاس + جـ

٥ $\int$ قا^{٢}س ءس = ظاس + جـ

٦ $\int$ قتا^{٢}س ءس = −ظتاس + جـ

٧ $\int$ قاس ظاس ءس = قاس + جـ

٨ $\int$ قتاس ظتاس ءس = −قتاس + جـ

كما يمكنك التحقق من صحة الخواصّ الآتية:

١ $\int أ\,ق(س)\,ءس = أ\int ق(س)\,ءس$ ، $أ \in ح$

٢ $\int \left(ق(س) \mp هـ(س)\right)ءس = \int ق(س)\,ءس \mp \int هـ(س)\,ءس$

(ويمكن تعميم هذه القاعدة لتشمل أكثر من اقترانين)

مثال (٣): جد التكاملات غير المحدودة الآتية:

أ $\int ٥\,ءس$

ب $\int ٨س^{٣}\,ءس$

جـ $\int (٦س^{٤} + جتاس)\,ءس$

د $\int (٣س^{٢} - ٥س^{-٢} + ٧)\,ءس$

الحل:

أ $\int ٥\,ءس = ٥س + جـ$

ب $\int ٨س^{٣}\,ءس = ٨\int س^{٣}\,ءس$

$= ٨ \times \frac{س^{٤}}{٤} + جـ = ٢س^{٤} + جـ$

جـ $\int (٦س^{٤} + جتاس)\,ءس = \int ٦س^{٤}\,ءس + \int جتاس\,ءس$

$= \frac{٦س^{٥}}{٥} + جـ_{١} + جاس + جـ_{٢} = \frac{٦س^{٥}}{٥} + جاس + جـ$

د $\int (٣س^{٢} - ٥س^{-٢} + ٧)\,ءس = ٣\int س^{٢}\,ءس - ٥\int س^{-٢}\,ءس + \int ٧\,ءس$

$= ٣ \times \frac{س^{٣}}{٣} - ٥ \times \frac{س^{-١}}{-١} + ٧س + جـ$

$= س^{٣} + ٥س^{-١} + ٧س + جـ$

تطبيقات:

يستخدم التكامل غير المحدود في تطبيقات هندسية وفيزيائية متعددة، مثل إيجاد معادلة منحنى اقتران إذا عُلم ميل المماس له عند أية نقطة عليه، أو إيجاد سرعة جسم متحرك إذا عُلم تسارعه، كما يتبين في الأمثلة التالية:

مثال (٤): جد قاعدة الاقتران ق (س) إذا علمت أن ميل المماس له عند أي نقطة (س، ص) عليه هو ٢س، وأن منحنى الاقتران ق (س) يمر بالنقطة (٢ ، ٥).

الحل:

م = قَ (س) = ٢س

∴ ق (س) = $\int$ ٢س ءس = س^{٢} + جـ

وبما أن منحنى الاقتران ق (س) يمر بالنقطة (٢ ، ٥) فإن هذه النقطة تحقق معادلة المنحنى،

أي أن ٥ = (٢)^{٢} + جـ ومنها جـ = ١

∴ ق (س) = س^{٢} + ١

مثال (٥): تحرك جسم من السكون من نقطة الأصل في خط مستقيم بتسارع ت = ٢ن + ١ سم/ث^{٢}. جد:

أ السرعة عند ن = ٣. ب المسافة المقطوعة في الثواني الثلاث الأولى من بدء الحركة.

الحل:

أ التسارع ت = $\frac{ءع}{ءن}$ = ٢ن + ١

∴ ع = $\int$ (٢ن + ١) ءن = ن^{٢} + ن + جـ

وحيث إن ع = ٠ عند ن = ٠، فإن ٠ = ٠ + ٠ + جـ ، ومنها جـ = ٠

أي أن ع = ن^{٢} + ن

∴ ع $|_{ن = ٣}$ = ٣^{٢} + ٣ = ١٢ سم/ث

ب ع = $\frac{ءف}{ءن}$ = ن^{٢} + ن

∴ ف = $\int$ (ن^{٢}+ن) ءن = $\frac{ن^{٣}}{٣}$ + $\frac{ن^{٢}}{٢}$ + جـ$_{١}$

وحيث إن ف = ٠، عندما ن = ٠

∴ ٠ = ٠ + جـ$_{١}$، ومنها جـ$_{١}$ = ٠

أي أن ف = $\frac{١}{٣}$ ن^{٣} + $\frac{١}{٢}$ ن^{٢}

∴ ف $|_{ن = ٣}$ = $\frac{١}{٣}$ × ٣^{٣} + $\frac{١}{٢}$ × ٣^{٢}

= ٩ + ٤,٥ = ١٣,٥ سم

تمارين (٤-١)

١ تحقق من أن الاقتران م(س) هو اقتران بدائي للاقتران ق(س) في الحالات التالية:

أ) م(س) = $\frac{\text{س}}{\text{١ + س}^{٢}}$ ، ق(س) = $\frac{\text{١ − س}^{٢}}{\text{(١ + س}^{٢}\text{)}^{٢}}$

ب) م(س) = جاس^{٢} ، ق(س) = ٢س جتاس^{٢}

٢ جد كلاً من التكاملات غير المحدودة الآتية:

أ) $\int$ (س^{٣} + ٥) ءس

ب) $\int \frac{\text{١}}{\text{(٢س)}^{٣}}$ ءس

جـ) $\int \left(\sqrt{\text{س}} + \frac{\text{١}}{\text{٢}\sqrt{\text{س}}}\right)$ ءس

د) $\int$ ص$^{٢}\sqrt{\text{ص}}$ ءص

هـ) $\int \frac{\text{س}^{٣}\text{ − ١}}{\text{س − ١}}$ ءس

و) $\int$ (٢جاس − ٣جتا س) ءس

ز) $\int$ (٦ + ٦ظا^{٢}س) ءس

ح) $\int \left(\frac{\text{جا س}}{\text{١ − جا}^{٢}\text{س}}\right)$ ءس

٣ أوجد الاقتران ق(س) الذي يحقق الشروط المعطاة في كل حالة:

أ) قَ(س) = ٦س^{٢} − ٨س + ٧ ، ق(١) = ٣

ب) قً(س) = ٦س − ٤ ، قَ(٢) = ٥ ، ق(٢) = ٤

٤ إذا كان ميل المماس لمنحنى الاقتران ص = ق(س) عند أي نقطة عليه (س ، ص) يعطى بالقاعدة:

$\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ = ٣س^{٢} − ٦س − ٢ ، فأوجد قاعدة الاقتران ق(س)، علماً بأن منحناه يمر بالنقطة (٣ ، −٢).

٥ جد معادلة المنحنى ص = ق(س)، علماً بأن صً = ٢٤س − ٤ ، وأن المنحنى يمر بالنقطتين أ(٠، ١) ، ب(−١، −٥).

٦ إذا كان صَ = $\frac{\text{٥}}{\sqrt{\text{س}}}$ عند أي نقطة (س ، ص) على المنحنى ص = ق(س)، وكان المنحنى يمر بالنقطة أ(٤ ، ٠)، وكان ميل المماس للمنحنى عند هذه النقطة يساوي ١ ، فجد معادلة المنحنى.

٧ إذا كانت صً للمنحنى ص = ق(س) تساوي ٦س − ٤ ، وكان للاقتران ص = ق(س) قيمة صغرى محلية تساوي ٥ عند س = ١ ، فجد معادلة المنحنى والقيمة العظمى المحلية للاقتران.

٨ إذا كان ميل المماس لمنحنى الاقتران ق(س) عند النقطة (١ ، ٨) عليه يساوي ٤ ، فأوجد معادلة هذا المنحنى علماً بأن قً(س) = ١٢س − ١٠ .

٩ يتحرك جسم في خط مستقيم بتسارع ت = ٣ن^{٢}. جد اقتران الإزاحة ف(ن) علماً بأن ع(٠) = ١٦سم/ث ، ف(٠) = ٩سم.

٤-٢ التجزئة ومجموع ريمان (Partition & Riemann Sum)

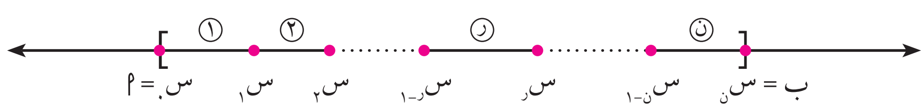
تعرفنا في البند السابق مفهوماً للتكامل هو التكامل غير المحدود، وستتعرف في هذا البند التجزئة ومجموع ريمان تمهيداً لتقديم مفهوم آخر للتكامل وهو التكامل المحدود.

التجزئة:

تعريف:

إذا كانت [أ ، ب] فترة مغلقة من الأعداد الحقيقية فإن المجموعة $\sigma_{ن} = \{س_{٠}، س_{١}، س_{٢}، . . . .، س_{ن}\}$،

حيث $أ = س_{٠} < س_{١} < س_{٢} < . . . < س_{ن} = ب$ ، تسمى تجزئة نونية للفترة [أ ، ب].



الشكل (٤-١)

يوضح الشكل (٤-١) التجزئة $\sigma_{ن}$ للفترة المغلقة [أ ، ب]، ويتبين منه :

١ الفترة الجزئية الأولى هي $[س_{٠} ، س_{١}]$، وطولها $س_{١} - س_{٠}$ ، ويرمز له بالرمز $\Delta س_{١}$

الفترة الجزئية الثانية هي $[س_{١}، س_{٢}]$، وطولها $س_{٢} - س_{١}$ ، ويرمز له بالرمز $\Delta س_{٢}$

⋮

الفترة الجزئية الرائية هي $[س_{ر-١}، س_{ر}]$، وطولها $س_{ر} - س_{ر-١}$ ، ويرمز له بالرمز $\Delta س_{ر}$

⋮

الفترة الجزئية النونية (الأخيرة) هي $[س_{ن-١}، س_{ن}]$، وطولها $س_{ن} - س_{ن-١}$، ويرمز له بالرمز $\Delta س_{ن}$

٢ عدد الفترات الجزئية الناتجة عن التجزئة $\sigma_{ن}$ يساوي ن، وعدد عناصر التجزئة يساوي ن + ١

مثال (١): إذا كانت $\sigma_{٣} = \{-١ ، ٢ ، ٣ ، ١٠\}$ تجزئة ثلاثية للفترة المغلقة [-١ ، ١٠] فعين الفترات الجزئية الناتجة عن $\sigma_{٣}$ وأطوالها .

الحل:

الفترة الجزئية الأولى هي [-١ ، ٢] ، وطولها = ٢ - (-١) = ٣

الفترة الجزئية الثانية هي [٢ ، ٣] ، وطولها = ٣ - ٢ = ١

الفترة الجزئية الثالثة هي [٣ ، ١٠] ، وطولها = ١٠ - ٣ = ٧

لاحظ أن أطوال الفترات الجزئية في المثال السابق غير متساوية .

وفي الحالة الخاصة التي تكون فيها أطوال جميع الفترات الجزئية الناتجة عن التجزئة $\sigma_{ن}$ للفترة المغلقة [أ ، ب] متساوية ، أي أن Δس$_{١}$ = Δس$_{٢}$ = . . . = Δس $_{ن}$ = $\frac{ب - أ}{ن}$ ، فإننا نسمي التجزئة $\sigma_{ن}$ تجزئة نونية منتظمة ، وفي هذه الحالة يكون :

س. = أ

س$_{١}$ = أ + طول فترة جزئية واحدة = أ + $\frac{ب - أ}{ن}$ × ١

س$_{٢}$ = أ + طول فترتين جزئيتين = أ + $\frac{ب - أ}{ن}$ × ٢

⋮

س$_{ر}$ = طول (ر) من الفترات = أ + $\frac{ب - أ}{ن}$ × ر

مثال (٢): إذا كانت $\sigma_{٨}$ تجزئة منتظمة للفترة المغلقة [-١٢ ، ٢٠]، فأوجد كلاً ممايلي :

أ التجزئة $\sigma_{٨}$.   ب الفترة الجزئية الخامسة الناتجة عن $\sigma_{٨}$.

الحل:

أ طول الفترة الجزئية = $\frac{ب - أ}{ن}$ = $\frac{٢٠ - (-١٢)}{٨}$ = ٤

∴ $\sigma_{٨}$ = {-١٢ ، -٨ ، -٤ ، ٠ ، ٤ ، ٨ ، ١٢ ، ١٦ ، ٢٠}

ب الفترة الجزئية الخامسة الناتجة عن $\sigma_{٨}$ هي [س$_{٤}$ ، س$_{٥}$] .

س$_{ر}$ = أ + $\frac{ب - أ}{ن}$ × ر

س$_{٤}$ = -١٢ + $\frac{٣٢}{٨}$ × ٤ = ٤

س$_{٥}$ = -١٢ + $\frac{٣٢}{٨}$ × ٥ = ٨

∴ الفترة الجزئية الخامسة هي [٤ ، ٨] .

مثال (٣): ليكن ق(س) = ٢س + ١ اقتراناً معرفاً على الفترة المغلقة [٢ ، ٧]، ولتكن $\sigma_{٥}$ تجزئة منتظمة .

أ ارسم منحنى ق(س) على مجاله ، ثم ارسم المستطيلات التي قواعدها الفترات الجزئية الناتجة عن $\sigma_{٥}$ ، وارتفاعاتها قيم الاقتران ق(س) عند بدايات تلك الفترات .

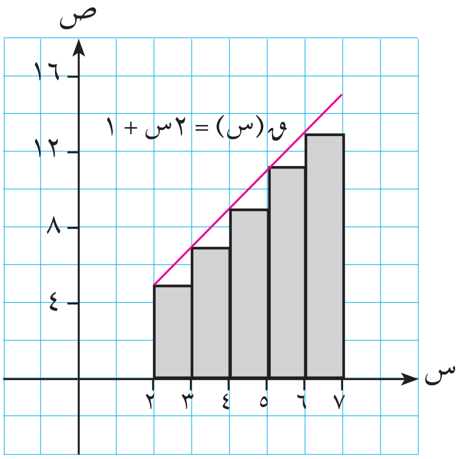
ب أوجد مجموع مساحات المستطيلات في الفرع (أ) .

الحل:

أ Δس = $\frac{ب - أ}{ن}$ = $\frac{٧ - ٢}{٥}$ = ١

$\sigma_٥$ = {٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥ ، ٦ ، ٧}

الشكل (٤-٢) يمثل منحنى ق(س) على الفترة [٢، ٧]، والمنطقة المظللة تمثل المستطيلات التي قواعدها الفترات الجزئية الناتجة عن $\sigma_٥$، وارتفاعاتها قيم الاقتران عند بدايات تلك الفترات.



الشكل (٤-٢)

ب لإيجاد مجموع مساحات المستطيلات نكوّن الجدول الآتي:

الفترة الجزئية [س$_{ر-١}$ ، س$_ر$]	طول الفترة الجزئية Δس$_ر$	ارتفاع المستطيل ق(س$_{ر-١}$)	مساحة المستطيل ق(س$_{ر-١}$) × Δس$_ر$
[٢ ، ٣]	١	ق(٢) = ٥	٥
[٣ ، ٤]	١	ق(٣) = ٧	٧
[٤ ، ٥]	١	ق(٤) = ٩	٩
[٥ ، ٦]	١	ق(٥) = ١١	١١
[٦ ، ٧]	١	ق(٦) = ١٣	١٣
			٤٥

$\therefore$ مجموع مساحات المستطيلات = ٤٥ وحدة مربعة

لاحظ أن مجموع مساحات جميع المستطيلات في المثال السابق = $\sum_{ر=١}^{٥}$ ق(س$_{ر-١}$) × Δس$_ر$

يسمى هذا المجموع، مجموع ريمان للاقتران ق(س) بالنسبة للتجزئة $\sigma_٥$.

تعريف: مجموع ريمان

إذا كان ق(س) اقتراناً معرفاً على الفترة المغلقة [أ ، ب]، وكانت $\sigma_ن$ تجزئة نونية للفترة [أ ، ب]، وكان العدد س$^*_ر$ ينتمي للفترة الجزئية [س$_{ر-١}$ ، س$_ر$]؛ فإن مجموع ريمان للاقتران ق(س) بالنسبة للتجزئة $\sigma_ن$ ، ويرمز له بالرمز م($\sigma_ن$ ، ق)، يعرف كما يلي:

$$م(\sigma_ن ، ق) = \sum_{ر=١}^{ن} ق(س^*_ر) \times \Delta س_ر$$

وفي الحالة الخاصة عندما تكون $\sigma_{ن}$ تجزئة نونية منتظمة للفترة [أ ، ب]، يتخذ مجموع ريمان الصيغة

$$م(\sigma_{ن} ، ق) = \frac{ب - أ}{ن} \sum_{ر=1}^{ن} ق(س_{ر}^{*})$$

سنقتصر من الآن فصاعداً، في الحسابات المتعلقة بمجموع ريمان، على التجزئة النونية المنتظمة للاقتران كثير الحدود الذي لا تزيد درجته على ٢ .

مثال (٤): أوجد مجموع ريمان للاقتران $ق(س) = س^{٢} + ٢س + ٩$ بالنسبة للتجزئة المنتظمة $\sigma_{٤}$ للفترة [−٢ ، ٦] في كلٍّ من الحالتين الآتيتين:

أ باتخاذ $س_{ر}^{*} = س_{ر}$

ب باتخاذ $س_{ر}^{*} = \frac{س_{ر-1} + س_{ر}}{٢}$

الحل:

$\sigma_{٤} = \{-٢ ، ٠ ، ٢ ، ٤ ، ٦\}$

$م(\sigma_{ن} ، ق) = \frac{ب - أ}{ن} \sum_{ر=1}^{ن} ق(س_{ر}^{*})$

أ $س_{ر}^{*} = س_{ر}$:

$\therefore$ $م(\sigma_{٤} ، ق) = \frac{٦-(-٢)}{٤} \sum_{ر=1}^{٤} ق(س_{ر})$

$= ٢\big(ق(س_{1}) + ق(س_{2}) + ق(س_{3}) + ق(س_{4})\big)$

$= ٢\big(ق(٠) + ق(٢) + ق(٤) + ق(٦)\big)$

$= ٢(٩ + ١٧ + ٣٣ + ٥٧)$

$= ٢ \times ١١٦ = ٢٣٢$

ب $س_{ر}^{*} = \frac{س_{ر-1} + س_{ر}}{٢}$:

$\therefore$ $م(\sigma_{٤} ، ق) = ٢ \sum_{ر=1}^{٤} ق\left(\frac{س_{ر-1} + س_{ر}}{٢}\right)$

$= ٢ \big(ق(-١) + ق(١) + ق(٣) + ق(٥)\big)$

$= ٢ (٨ + ١٢ + ٢٤ + ٤٤)$

$= ٢ \times ٨٨ = ١٧٦$

مثال (٥): إذا كان ق(س) = ٥س معرفاً على الفترة [٠ ، ١] ، وكانت $\sigma_{\text{ن}}$ تجزئة نونية منتظمة للفترة [٠ ، ١]، فأوجد

أ) مجموع ريمان م ($\sigma_{\text{ن}}$ ، ق) متخذاً $\text{س}^*_{\text{ر}} = \text{س}_{\text{ر}}$ ، علماً بأن $\sum\limits_{\text{ر}=1}^{\text{ن}} \text{ر} = \frac{\text{ن}(\text{ن}+1)}{2}$

ب) $\lim\limits_{\text{ن}\to\infty}$ م ($\sigma_{\text{ن}}$ ، ق)

جـ) مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى ق(س) ومحور السينات والمستقيمين س = ٠ ، س = ١

الحل:

أ) طول الفترة الجزئية الواحدة $= \frac{\text{ب} - \text{أ}}{\text{ن}} = \frac{1}{\text{ن}}$

$$\text{س}^*_{\text{ر}} = \text{س}_{\text{ر}} = \text{أ} + \frac{\text{ب} - \text{أ}}{\text{ن}} \times \text{ر}$$

$$= 0 + \frac{1}{\text{ن}} \times \text{ر} = \frac{\text{ر}}{\text{ن}}$$

$$\text{م}(\sigma_{\text{ن}} ، \text{ق}) = \frac{\text{ب} - \text{أ}}{\text{ن}} \sum_{\text{ر}=1}^{\text{ن}} \text{ق}(\text{س}^*_{\text{ر}})$$

$$= \frac{1}{\text{ن}} \sum_{\text{ر}=1}^{\text{ن}} \text{ق}\left(\frac{\text{ر}}{\text{ن}}\right)$$

$$= \frac{1}{\text{ن}} \sum_{\text{ر}=1}^{\text{ن}} \frac{5\text{ر}}{\text{ن}} = \frac{5}{\text{ن}^2} \sum_{\text{ر}=1}^{\text{ن}} \text{ر}$$

$$= \frac{5}{\text{ن}^2} \times \frac{\text{ن}(\text{ن}+1)}{2} = \frac{5\text{ن}^2 + 5\text{ن}}{2\text{ن}^2}$$

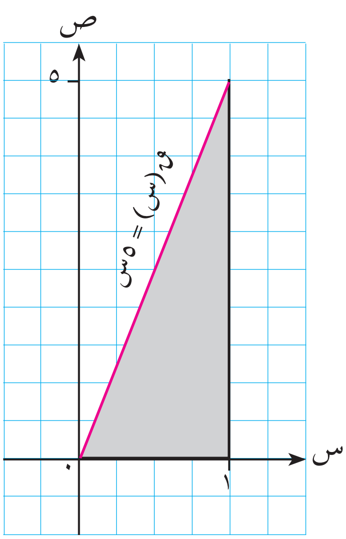
$$= \frac{5}{2} + \frac{5}{2\text{ن}}$$

ب) $$\lim_{\text{ن}\to\infty} \text{م}(\sigma_{\text{ن}} ، \text{ق}) = \lim_{\text{ن}\to\infty} \left(\frac{5}{2} + \frac{5}{2\text{ن}}\right)$$

$$= \frac{5}{2} + 0 = \frac{5}{2}$$

جـ) المساحة المطلوبة هي مساحة المنطقة المظللة في الشكل (٤-٣) وتساوي مساحة مثلث قائم الزاوية طول قاعدته = ١ ، وارتفاعه = ٥

∴ المساحة $= \frac{1 \times 5}{2} = \frac{5}{2}$ وحدة مربعة



الشكل (٤-٣)

نلاحظ في هذا المثال أن نهاية مجموع ريمان للاقتران ق(س) بالنسبة للتجزئة $\sigma_{\text{ن}}$ للفترة [٠ ، ١] تساوي عددياً مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى ق(س) ومحور السينات والمستقيمين س = ٠ ، س = ١ .

مثال (٦): إذا كان ق(س) = $س^{٢}$ معرفاً على الفترة [٠ ، ٢] وكانت $\sigma_{ن}$ تجزئة نونية منتظمة للفترة [٠ ، ٢]، فأوجد م($\sigma_{ن}$ ، ق) متخذا $س^{*}_{ر}$ = $س_{ر}$ ، علماً بأن $\sum_{ر=١}^{ن} ر^{٢} = \frac{ن(ن+١)(٢ن+١)}{٦}$

الحل:

طول الفترة الجزئية الواحدة = $\frac{ب - أ}{ن} = \frac{٢}{ن}$

$س^{*}_{ر} = س_{ر} \;=\; أ + \frac{ب-أ}{ن} \times ر$

$= ٠ + \frac{٢}{ن} \times ر = \frac{٢ر}{ن}$

م($\sigma_{ن}$ ، ق) $= \frac{ب-أ}{ن} \sum_{ر=١}^{ن}$ ق($س^{*}_{ر}$)

$= \frac{٢}{ن} \sum_{ر=١}^{ن}$ ق$\left(\frac{٢ر}{ن}\right)$

$= \frac{٢}{ن} \sum_{ر=١}^{ن} \frac{٤}{ن^{٢}} ر^{٢}$

$= \frac{٢}{ن} \times \frac{٤}{ن^{٢}} \sum ر^{٢}$

$= \frac{٢}{ن} \times \frac{٤}{ن^{٢}} \times \frac{ن(ن+١)(٢ن+١)}{٦}$

$= \frac{٨ن^{٢} + ١٢ن + ٤}{٣ن^{٢}}$

تمارين (٤-٢)

١ اكتب التجزئة المنتظمة الخماسية للفترة [-١ ، ٣]

٢ إذا كانت $\sigma_{٢٠}$ تجزئة منتظمة للفترة [-٢ ، ٣]، أوجد الفترة الجزئية السادسة عشرة الناتجة عن هذه التجزئة .

٣ أوجد مجموع ريمان للاقتران ق(س) بالنسبة للتجزئة $\sigma_{ن}$ في كلٍّ من الحالات الآتية :

(أ) ق(س) = ٣ ، $\sigma_{٤}$ تجزئة منتظمة للفترة [٠ ، ٦] ، $س^{*}_{ر} = س_{ر-١}$

(ب) ق(س) = ٢ − س ، $\sigma_{٦}$ تجزئة منتظمة للفترة [-٢ ، ٤] ، $س^{*}_{ر} = س_{ر}$

(جـ) ق(س) = ٦ + $س^{٢}$ ، $\sigma_{٤}$ تجزئة منتظمة للفترة [٠ ، ٤] ، $س^{*}_{ر} = \frac{س_{ر-١} + س_{ر}}{٢}$

٤ إذا كان ق(س) = ٣س − ١ معرفاً على الفترة المغلقة [٠ ، ٥]، $\sigma_{ن}$ تجزئة نونية منتظمة لهذه الفترة، فأوجد مجموع ريمان م($\sigma_{ن}$ ، ق) متخذاً $س^{*}_{ر} = س_{ر}$.

٥ إذا كان ق(س) = $س^{٢}$ + ١ معرفاً على الفترة [٠ ، ٣]، $\sigma_{ن}$ تجزئة نونية منتظمة لهذه الفترة، فأوجد م($\sigma_{ن}$ ، ق) متخذاً $س^{*}_{ر} = س_{ر}$.

٤-٣ التكامل المحدود (Definite Integral)

تعريف:

إذا كان $\text{ق}(\text{س})$ اقتراناً معرفاً ومحدوداً* على $[\text{أ} ، \text{ب}]$، وكانت $\sigma_{\text{ن}}$ تجزئة نونية منتظمة للفترة $[\text{أ} ، \text{ب}]$، وكانت $\lim\limits_{\text{ن} \to \infty} \text{م}(\sigma_{\text{ن}} ، \text{ق})$ موجودة ومتساوية لجميع قيم $\text{س}^*_{\text{ر}} \in [\text{س}_{\text{ر}-1} ، \text{س}_{\text{ر}}]$، فإنه يقال إن الاقتران $\text{ق}(\text{س})$ قابل للتكامل على الفترة $[\text{أ} ، \text{ب}]$، وتسمى النهاية المذكورة التكامل المحدود للاقتران $\text{ق}(\text{س})$ على $[\text{أ} ، \text{ب}]$، ويرمز له بالرمز $\int_{\text{أ}}^{\text{ب}} \text{ق}(\text{س})\,\text{ءس}$ ؛ أي أن $\int_{\text{أ}}^{\text{ب}} \text{ق}(\text{س})\,\text{ءس} = \lim\limits_{\text{ن} \to \infty} \text{م}(\sigma_{\text{ن}} ، \text{ق})$

ملاحظات:

١ في التكامل المحدود $\int_{\text{أ}}^{\text{ب}} \text{ق}(\text{س})\,\text{ءس}$ ، نسمي أ الحد السفلي للتكامل ونسمي ب الحد العلوي له .

٢ تتوقف قيمة التكامل المحدود $\int_{\text{أ}}^{\text{ب}} \text{ق}(\text{س})\,\text{ءس}$ على قاعدة الاقتران ق وعلى العددين أ ، ب ، أما المتغير س فليس له أهمية خاصة في عملية التكامل ويمكن أن يحل محله أي متغير آخر ، مثل ص ، ع ، . . . ، أي أن :

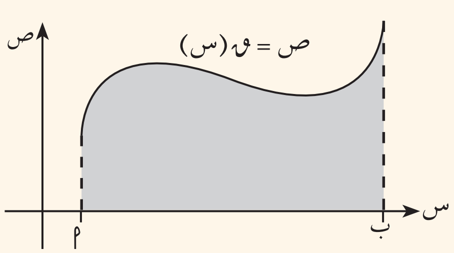
$$\int_{\text{أ}}^{\text{ب}} \text{ق}(\text{س})\,\text{ءس} = \int_{\text{أ}}^{\text{ب}} \text{ق}(\text{ص})\,\text{ءص} = \int_{\text{أ}}^{\text{ب}} \text{ق}(\text{ع})\,\text{ءع} = \ldots \text{ إلخ}$$

٣ إن تعريف التكامل المحدود $\int_{\text{أ}}^{\text{ب}} \text{ق}(\text{س})\,\text{ءس}$ الوارد في أعلاه يتضمن افتراض أن $\text{أ} < \text{ب}$، أي أن الحد السفلي للتكامل أصغر من الحد العلوي له . وفي الحالات الأخرى نستخدم التعريفين التاليين :

١ $\int_{\text{أ}}^{\text{أ}} \text{ق}(\text{س})\,\text{ءس} = 0$

٢ $\int_{\text{ب}}^{\text{أ}} \text{ق}(\text{س})\,\text{ءس} = - \int_{\text{أ}}^{\text{ب}} \text{ق}(\text{س})\,\text{ءس}$

٤ إذا كان $\text{ق}(\text{س})$ اقتراناً غير سالب على $[\text{أ} ، \text{ب}]$ وقابلاً للتكامل فإن التكامل المحدود $\int_{\text{أ}}^{\text{ب}} \text{ق}(\text{س})\,\text{ءس}$ يمثل مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى الاقتران $\text{ق}(\text{س})$ ومحور السينات والمستقيمين $\text{س} = \text{أ}$ ، $\text{س} = \text{ب}$. لاحظ الشكل (٤-٤) .



الشكل (٤-٤)

* يقال إن $\text{ق}(\text{س})$ اقتران معرف ومحدود على الفترة المغلقة $[\text{أ} ، \text{ب}]$ إذا وفقط إذا وجد عددان حقيقيان ل ، م بحيث إن : $\text{ل} \le \text{ق}(\text{س}) \le \text{م}$ لجميع قيم $\text{س} \in [\text{أ} ، \text{ب}]$.

مثال (١): استخدم تعريف التكامل المحدود لإيجاد $\int_{٠}^{٢} ٤ \, دس$.

الحل: لتكن $\sigma_{ن}$ تجزئة نونية منتظمة للفترة [٠ ، ٢]

$$م(\sigma_{ن} ، ق) = \frac{ب - أ}{ن} \sum_{ر=١}^{ن} ق(س^*_{ر})$$

وحيث إن $ق(س^*_{ر}) = ٤$ لجميع قيم $س^*_{ر} \in [س_{ر-١} ، س_{ر}]$؛ لأن $ق(س)$ ثابت

$$\therefore \quad م(\sigma_{ن} ، ق) = \frac{٢}{ن} \sum_{ر=١}^{ن} ٤ = \frac{٢}{ن} \times ٤ن = ٨$$

أي أن $\int_{٠}^{٢} ٤ \, دس = ٨$

لاحظ في هذا المثال أن $\int_{٠}^{٢} ٤ \, دس = ٨ = ٤(٢-٠)$

= قيمة الاقتران الثابت × (الحد العلوي - الحد السفلي)

بوجه عام:

قاعدة:

إذا كان $ق(س) = جـ$ ، لجميع $س \in [أ ، ب]$، جـ ثابت، فإن $\int_{أ}^{ب} جـ \, دس = جـ(ب - أ)$

مثال (٢): أوجد قيمة كل من:

أ $\int_{-١}^{٢} ٦ \, دس$ ب $\int_{٠}^{٢} \pi \, دس$

الحل:

أ $\int_{-١}^{٢} ٦ \, دس = ٦\big(٢-(-١)\big) = ٦ \times ٣ = ١٨$

ب $\int_{٠}^{٢} \pi \, دس = \pi(٢-٠) = ٢\pi$

نظرية:

إذا كان الاقتران $ق(س)$ متصلاً على الفترة المغلقة [أ ، ب] فإنه يكون قابلاً للتكامل على تلك الفترة.

مثال (٣): استخدم تعريف التكامل المحدود لإيجاد $\int_{أ}^{ب} س \, دس$

الحل: الاقتران ق(س) = س قابل للتكامل على [أ ، ب]، لأنه متصل (كثير حدود). لتكن $\sigma_ن$ تجزئة نونية منتظمة للفترة [أ ، ب].

$$م(\sigma_ن ، ق) = \frac{ب - أ}{ن} \sum_{ر=1}^{ن} ق(س^*_ر) = \frac{ب - أ}{ن} \sum_{ر=1}^{ن} ق(س_ر) \text{ ، باتخاذ } س^*_ر = س_ر$$

$$= \frac{ب - أ}{ن} \sum_{ر=1}^{ن} س_ر = \frac{ب - أ}{ن} \sum_{ر=1}^{ن} \left(أ + \frac{ب - أ}{ن} \times ر\right)$$

$$= \frac{ب - أ}{ن}\left[\sum_{ر=1}^{ن} أ + \frac{ب - أ}{ن} \times \sum_{ر=1}^{ن} ر\right] = \frac{ب - أ}{ن}\left[ن أ + \frac{ب - أ}{ن} \times \frac{ن(ن + 1)}{2}\right]$$

$$= أ(ب - أ) + \frac{(ب - أ)^2}{2} \times \frac{ن + 1}{ن}$$

$$\therefore \int_{أ}^{ب} س \, دس = \lim_{ن \leftarrow \infty} \left(أ(ب - أ) + \frac{(ب - أ)^2}{2} \times \frac{ن + 1}{ن}\right)$$

$$= أ(ب - أ) + \frac{(ب - أ)^2}{2} = \frac{ب^2 - أ^2}{2}$$

بوجه عام يمكن التوصل إلى القاعدة التالية:

قاعدة:

$$\int_{أ}^{ب} س^ن \, دس = \frac{ب^{ن+1} - أ^{ن+1}}{ن + 1} \text{ ، ن عدد طبيعي}$$

مثال (٤): جد قيمة كلٍّ من التكاملات التالية:

أ $\int_{1}^{3} س^4 \, دس$ ب $\int_{2}^{4} نق^2 \, دنق$

الحل:

أ $\int_{1}^{3} س^4 \, دس = \frac{3^{4+1} - 1^{4+1}}{4 + 1} = \frac{3^5 - 1^5}{5} = \frac{242}{5}$

ب $\int_{2}^{4} نق^2 \, دنق = \frac{4^{2+1} - 2^{2+1}}{2 + 1} = \frac{4^3 - 2^3}{3} = \frac{56}{3}$

نظرية:

إذا كان الاقتران ق(س) قابلاً للتكامل على الفترة المغلقة [أ ، ب]، وكان الاقتران هـ(س) = ق(س) لجميع قيم س ∈ [أ ، ب]، عدا مجموعة منتهية من قيم س في الفترة [أ ، ب]، فإن هـ(س) يكون قابلاً للتكامل على [أ ، ب]، ويكون $\int_{أ}^{ب} هـ(س) \, دس = \int_{أ}^{ب} ق(س) \, دس$

مثال (٥): إذا كان ق(س) = [س] معرفاً على الفترة [٠ ، ١]، فبين أن ق(س) قابل للتكامل على [٠ ، ١] ثم أوجد $\int_{٠}^{١}$ [س] ءس

الحل:

بفرض أن هـ(س) = ٠ لجميع س ∈ [٠ ، ١]

يكون ق(س) = هـ(س) لجميع س ∈ [٠ ، ١] عدا عند س = ١

وحيث إن هـ(س) = ٠ قابل للتكامل على [٠ ، ١]، لأنه اقتران ثابت

إذن ق(س) = [س] قابل للتكامل على [٠ ، ١]

ويكون $\int_{٠}^{١}$ [س] ءس = $\int_{٠}^{١}$ ٠ ءس = صفر

تمارين (٤-٣)

١ إذا كان ق(س) اقتراناً قابلاً للتكامل على [٢ ، ٥]، وكان م(σ ن ، ق) = ٤ + $\frac{١}{ن^{٢}}$ ، حيث σ ن تجزئة نونية منتظمة للفترة [٢ ، ٥]، فأوجد:

(أ) $\int_{٢}^{٥}$ ق(س) ءس (ب) $\int_{٥}^{٢}$ ق(س) ءس

٢ استخدم تعريف التكامل المحدود في إيجاد كلٍّ من:

(أ) $\int_{٠}^{٢}$ ٥ءس (ب) $\int_{١}^{٣}$ (س + ١) ءس (ج) $\int_{٢}^{٤}$ (س^{٢} − ١) ءس

٣ أوجد قيمة كلٍّ من:

(أ) $\int_{٢}^{٨}$ ءس (ب) $\int_{-١}^{٢}$ ٦ ءس (ج) $\int_{-٢}^{٢}$ س^{٥} ءس (د) $\int_{١,٣}^{١,٣}$ س^{٣} ءس

٤ بين السبب في قابلية كلٍّ من الاقترانات التالية للتكامل على الفترة المعطاة في كل حالة:

(أ) ق(س) = س^{٢} + ٣ ، على الفترة [−٢ ، ١]

(ب) ق(س) = جا س ، على الفترة [٠ ، ٢π]

(ج) ق(س) = $\begin{cases} \text{س}^{٢} & \text{، س} \neq ١ \\ ٥ & \text{، س} = ١ \end{cases}$ ، على الفترة [٠ ، ٢]

(د) ق(س) = [س + ١] ، على الفترة [١ ، ٢]

٥ عين الثابت الموجب ب في كلٍّ من الحالات التالية:

(أ) $\int_{٠,٥}^{٣}$ ب ءس = ١٥ (ب) $\int_{١}^{ب}$ س ءس = ٢٤ (ج) $\int_{٠}^{١}$ س^{ب} ءس = ٠,٢٥

٤-٤ خصائص التكامل المحدود

للتكامل المحدود خصائص مهمة تساعد في تسهيل حسابه لبعض الاقترانات في كثير من الحالات، ومن هذه الخصائص :

خاصيّة (١):

إذا كان ق(س) اقتراناً قابلاً للتكامل على [أ ، ب]، وكان جـ أي عدد حقيقي، فإن الاقتران جـ ق(س) يكون قابلاً للتكامل على [أ ، ب]، ويكون $\int_{أ}^{ب}$ جـ ق(س) ءس = جـ $\int_{أ}^{ب}$ ق(س) ءس

البرهان:

لتكن $\sigma_{ن}$ تجزئة نونية منتظمة للفترة [أ ، ب]

$$\int_{أ}^{ب} جـ ق(س)\, ءس = \underset{ن\to\infty}{نهـا} م(\sigma_{ن} ، جـ ق)$$

$$= \underset{ن\to\infty}{نهـا} \left(\frac{ب - أ}{ن} \sum_{ر=1}^{ن} جـ ق(س^*_{ر})\right)$$

$$= \underset{ن\to\infty}{نهـا} \left(\frac{ب - أ}{ن} \times جـ \sum_{ر=1}^{ن} ق(س^*_{ر})\right)$$

$$= جـ \times \underset{ن\to\infty}{نهـا} \left(\frac{ب - أ}{ن} \sum_{ر=1}^{ن} ق(س^*_{ر})\right) = جـ \int_{أ}^{ب} ق(س)\, ءس$$

مثال (١): أوجد $\int_{1}^{4} ٣س^{٢}\, ءس$

الحل:

$$\int_{1}^{4} ٣س^{٢}\, ءس = ٣ \int_{1}^{4} س^{٢}\, ءس$$

$$= ٣ \times \frac{٤^{٣} - ١^{٣}}{٣} = ٣ \times \frac{٦٣}{٣} = ٦٣$$

خاصيّة (٢):

إذا كان ق(س)، هـ(س) اقترانين قابلين للتكامل على [أ ، ب] فإن الاقترانين : ق(س) + هـ(س)، ق(س) − هـ(س) يكونان قابلين للتكامل على [أ ، ب]، ويكون :

$$\int_{أ}^{ب} \left(ق(س) \mp هـ(س)\right) ءس = \int_{أ}^{ب} ق(س)\, ءس \mp \int_{أ}^{ب} هـ(س)\, ءس$$

ويمكن تعميم هذه الخاصية لأكثر من اقترانين.

مثال (٢): أوجد قيمة $\int_{.}^{٣} (س^٢ - ٢س) \, ء س$

الحل:

$$\int_{.}^{٣} (س^٢ - ٢س) \, ء س = \int_{.}^{٣} س^٢ \, ء س - \int_{.}^{٣} ٢س \, ء س$$

$$= \frac{٣^٣ - .^٣}{٣} - ٢ \times \frac{٣^٢ - .^٢}{٢}$$

$$= ٩ - ٩ = .$$

خاصيّة (٣) (خاصية الإضافة):

إذا كان ق(س) اقتراناً قابلاً للتكامل على فترة مغلقة، وكانت أ ، ب ، جـ ، أية ثلاثة أعداد تنتمي لتلك الفترة، فإن:

$$\int_{أ}^{ب} ق(س) \, ء س = \int_{أ}^{جـ} ق(س) \, ء س + \int_{جـ}^{ب} ق(س) \, ء س$$

مثال (٣): أوجد $\int_{.}^{٥} |س - ٢| \, ء س$

الحل:

$$|س - ٢| = \begin{cases} ٢ - س & ، \quad . \leq س \leq ٢ \\ س - ٢ & ، \quad ٢ \leq س \leq ٥ \end{cases}$$

$$\int_{.}^{٥} |س - ٢| \, ء س = \int_{.}^{٢} (٢ - س) \, ء س + \int_{٢}^{٥} (س - ٢) \, ء س$$

$$= ٢(٢ - .) - \frac{٢^٢ - .^٢}{٢} + \frac{٥^٢ - ٢^٢}{٢} - ٢(٥ - ٢)$$

$$= ٤ - ٢ + ١٠,٥ - ٦ = ٦,٥$$

مثال (٤): أكتب في صورة تكامل واحد: $\int_{١}^{٦} ق(س) \, ء س - \int_{٩}^{٦} ق(س) \, ء س$

الحل:

$$\int_{١}^{٦} ق(س) \, ء س - \int_{٩}^{٦} ق(س) \, ء س = \int_{١}^{٦} ق(س) \, ء س + \int_{٦}^{٩} ق(س) \, ء س$$

$$= \int_{١}^{٩} ق(س) \, ء س$$

خاصيّة (٤) (خاصية المقارنة):

إذا كان ق(س) ، هـ(س) اقترانين قابلين للتكامل على [أ ، ب] ، وكان ق(س) ≤ هـ(س) لجميع قيم س ∈ [أ ، ب]، فإن:

$$\int_{أ}^{ب} ق(س)\, دس \le \int_{أ}^{ب} هـ(س)\, دس$$

نتيجة:

إذا كان ق(س) اقتراناً قابلاً للتكامل على [أ ، ب]، وكان ق(س) ≥ ٠ لجميع قيم س ∈ [أ ، ب]، فإن:

$$\int_{أ}^{ب} ق(س)\, دس \ge ٠$$

مثال (٥): بين أن $\int_{-١}^{٦} (س^٢ + ٥)\, دس \ge \int_{-١}^{٦} ٢س\, دس$، دون حساب قيمة كلٍّ من التكاملين.

الحل:

يكفي لإثبات صحة المتباينة أن نبرهن أن الاقتران (س^٢ + ٥) ≥ ٢س لجميع س ∈ [-١ ، ٦]

أي أن المقدار س^٢ + ٥ − ٢س ≥ ٠ ، لجميع س ∈ [-١ ، ٦]

س^٢ + ٥ − ٢س = س^٢ − ٢س + ١ + ٤

= (س − ١)^٢ + ٤ ≥ ٤

أي أن س^٢ + ٥ − ٢س ≥ ٠ لجميع س ∈ ح

∴ س^٢ + ٥ ≥ ٢س لجميع س ∈ [-١ ، ٦]

$$\Leftarrow \int_{-١}^{٦} (س^٢ + ٥)\, دس \ge \int_{-١}^{٦} ٢س\, دس$$

مثال (٦): بين أن $\int_{٠}^{\pi} (٣ + جا^٣س)\, دس$ يقع بين القيمتين ٢π ، ٤π

الحل:

-١ ≤ جاس ≤ ١ ∴ -١ ≤ جا^{٣}س ≤ ١

∴ ٢ ≤ ٣ + جا^{٣}س ≤ ٤

$$∴ \int_{٠}^{\pi} ٢\, دس \le \int_{٠}^{\pi} (٣ + جا^٣س)\, دس \le \int_{٠}^{\pi} ٤\, دس$$

$$∴ ٢\pi \le \int_{٠}^{\pi} (٣ + جا^٣س)\, دس \le ٤\pi$$

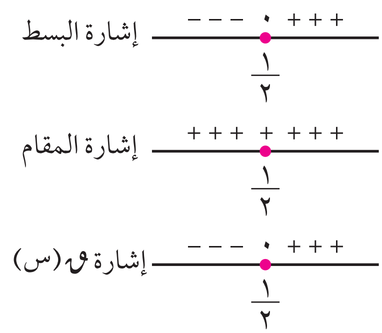
مثال (٧): عين إشارة التكامل $\int_{١}^{٤} \frac{٢س - ١}{س^{٢} + ١} \, دس$

الحل: ندرس إشارة الاقتران $ق(س) = \frac{٢س - ١}{س^{٢} + ١}$ ،

كما في الشكل (٤-٥)

∴ إشارة الاقتران $\frac{٢س - ١}{س^{٢} + ١}$ موجبة في الفترة [١ ، ٤]

∴ $\int_{١}^{٤} \frac{٢س - ١}{س^{٢} + ١} \, دس > ٠$



الشكل (٤-٥)

تمارين (٤-٤)

١ إذا كان $\int_{١}^{٢} ق(س) \, دس = -٤$ ، $\int_{١}^{٥} ق(س) \, دس = ٦$ ، $\int_{١}^{٥} هـ(س) \, دس = ٨$ فأوجد كلاً من :

(أ) $\int_{١}^{٢} ٣ق(س) \, دس$ (ب) $\int_{٢}^{٥} ق(س) \, دس$ (جـ) $\int_{١}^{٥} \left(٤ق(س) - هـ(س)\right) \, دس$

٢ أكتب في صورة تكامل واحد :

(أ) $\int_{٦}^{٣} ق(س) \, دس + \int_{-٢}^{٦} ق(س) \, دس$ (ب) $\int_{١}^{٧} ق(س) \, دس - \int_{١}^{٣} ق(س) \, دس$

٣ دون حساب التكاملات في كلٍّ من الحالات التالية بين أن :

(أ) $\int_{١}^{٤} (٢س + ٦) \, دس \geq \int_{١}^{٤} (٣س + ٥) \, دس$ (ب) $\int_{٠}^{٢\pi} (١ + جاس) \, دس \geq ٠$

(جـ) $\int_{-١}^{٦} |س^{٢} - ٥| \, دس \geq ٠$ (د) $\int_{٢}^{٦} (-س^{٢} - ١٠س + ١٦) \, دس \leq ٠$

٤ جد قيمة كلٍّ من :

(أ) $\int_{-١}^{٢٠} \sqrt{٢} \, دس$ (ب) $\int_{١}^{٢} (٢س - ٥)^{٢} \, دس$ (جـ) $\int_{-٣}^{٠} |س - ٢| \, دس$

٥ إذا كان $ق(س) = \begin{cases} س^{٢} + ١ & ، ٠ \leq س \leq ١ \\ ٢ - س & ، ١ \leq س \leq ٢ \end{cases}$ فأوجد قيمة $\int_{٠}^{٢} ق(س) \, دس$

٦ إذا كان $\int_{١}^{٣} \left(٤ق(س) + ٧هـ(س)\right) \, دس = ١٩$ ، وكان $\int_{١}^{٣} ٣ق(س) \, دس = ٩$ ، فما قيمة $\int_{١}^{٣} ٥ \, هـ(س) \, دس$؟

٧ إذا كان $\int_{٠}^{جـ} س(١ - س) \, دس = ٠$ فما قيمة/ قيم جـ؟

٨ أوجد كثير الحدود من الدرجة الثانية ق(س)، بحيث إن : ق(٠) = ق(١) = ٠ ، $\int_{٠}^{١} ق(س) \, دس = ١$

٤-٥ النظرية الأساسية في التفاضل والتكامل (Fundamental Theorem of Calculus)

ستتعرف في هذا البند إحدى أهم نظريات علم التفاضل والتكامل، وتعود أهمية هذه النظرية إلى ما تسهم به في إيجاد التكاملات غير المحدودة من جهة، وحساب قيمة التكامل المحدود من جهة أخرى؛ وقد اكتشف هذه النظرية العالمان نيوتن ولايبنز منفردين، مما جعلهما جديرين، بحق، باعتبارهما واضعي أسس علم التفاضل والتكامل في القرن السابع عشر، وتمهيداً لهذه النظرية نتعرف ما يسمى الاقتران المكامل.

تعريف:

إذا كان ق(س) اقتراناً قابلاً للتكامل على الفترة [أ ، ب]، فإن الاقتران ت(س) = $\int_{أ}^{س}$ ق(ص) ءص، أ ≤ س ≤ ب، يسمى الاقتران المكامل ت(س) للاقتران ق(س).

مثال (١): أوجد الاقتران المكامل ت(س) للاقتران ق(س) = ٣س^٢ + ١ على الفترة المغلقة [١ ، ٥].

الحل:

ت(س) = $\int_{أ}^{س}$ ق(ص) ءص ، أ ≤ س ≤ ب

= $\int_{١}^{س}$ (٣ص^٢ + ١) ءص ، ١ ≤ س ≤ ٥

= ٣ $\int_{١}^{س}$ ص^٢ ءص + $\int_{١}^{س}$ ١ ءص

= ٣ × $\frac{س^٣ - ١^٣}{٣}$ + ١(س − ١)

= س^٣ − ١ + س − ١ = س^٣ + س − ٢

مثال (٢): إذا كان ق(س) = $\begin{cases} ٣س ، & ٠ ≤ س < ١ \\ ٦ - ٤س ، & ١ ≤ س ≤ ٢ \end{cases}$

فأوجد الاقتران المكامل ت(س) للاقتران ق(س) على الفترة [٠ ، ٢]

الحل:

ت(س) = $\int_{أ}^{س}$ ق(ص) ءص ، ٠ ≤ س ≤ ٢

أولاً: إذا كانت ٠ ≤ س < ١ فإن:

ت(س) = $\int_{٠}^{س}$ ٣ص ءص = ٣ $\int_{٠}^{س}$ ص ءص

= ٣ × $\frac{س^٢ - ٠^٢}{٢}$ = $\frac{٣}{٢}$ س^٢

ثانياً: إذا كانت ١ ≤ س ≤ ٢ فإن:

$$\text{ت(س)} = \int_{\cdot}^{١} \text{٣ص دص} + \int_{١}^{\text{س}} \text{(٦ − ٤ص) دص}$$

$$= \frac{\text{٣(١}^{٢} - \text{٠}^{٢}\text{)}}{٢} + \text{٦(س − ١)} - ٤\left(\frac{\text{س}^{٢} - \text{١}^{٢}}{٢}\right)$$

$$= \text{٦س} - \text{٢س}^{٢} - \frac{٥}{٢}$$

$$\therefore \quad \text{ت(س)} = \begin{cases} \frac{٣}{٢}\text{س}^{٢} & \text{،} \quad \text{٠} \le \text{س} < ١ \\ \text{٦س} - \text{٢س}^{٢} - \frac{٥}{٢} & \text{،} \quad ١ \le \text{س} \le ٢ \end{cases}$$

لاحظ في هذا المثال أن ق(س) غير متصل عند س = ١، ولكن الاقتران المكامل ت(س) متصل عند س = ١ (تحقق من ذلك).

بوجه عام:

نظرية:

إذا كان ق(س) قابلاً للتكامل على [أ ، ب]، فإن الاقتران المكامل ت(س) = $\int_{\text{أ}}^{\text{س}}$ ق(ص) دص يكون متصلاً على [أ ، ب].

مثال (٣): إذا كان الاقتران المكامل ت(س) للاقتران ق(س) المعرف على الفترة [١ ، ٤] يعطى بالقاعدة:

$$\text{ت(س)} = \begin{cases} \text{٢س + ب} & \text{،} \quad ١ \le \text{س} < ٢ \\ \text{س}^{٢} + \text{٢أ} & \text{،} \quad ٢ \le \text{س} \le ٤ \end{cases}$$

فأوجد الثابتين أ ، ب.

الحل:

$$\text{ت(س)} = \int_{١}^{\text{س}} \text{ق(ص) دص}$$

$$\Leftarrow \quad \text{ت(١)} = \int_{١}^{١} \text{ق(ص) دص} = \text{صفر}$$

$\therefore$ ٢ × ١ + ب = ٠ ومنها ب = −٢

الاقتران ت(س) متصل على [١ ، ٤] فهو متصل عند س = ٢

$$\therefore \quad \lim_{\text{س} \to ٢^{-}} \text{ت(س)} = \lim_{\text{س} \to ٢^{+}} \text{ت(س)} = \text{ت(٢)}$$

$\therefore$ ٤ + ب = ٤ + ٢أ

ومنها ب = ٢أ وبالتعويض تكون أ = −١

مثال (٤): جد الاقتران المكامل ت(س) للاقتران ق(س) = | س − ٣ | المعرف على الفترة [٠ ، ٤].
ثم أوجد تَ(س).

الحل:

$$ق(س) = \begin{cases} ٣ - س &، \quad ٠ \leq س < ٣ \\ س - ٣ &، \quad ٣ \leq س \leq ٤ \end{cases}$$

$$ت(س) = \int_{٠}^{س} ق(ص)\, ءص$$

أولاً: إذا كانت ٠ ≤ س < ٣ فإن:

$$ت(س) = \int_{٠}^{س} ق(ص)\, ءص = \int_{٠}^{س} (٣ - ص)\, ءص$$

$$= ٣س - \frac{س^{٢}}{٢}$$ (تحقق من ذلك)

ثانياً: إذا كانت ٣ ≤ س ≤ ٤ فإن:

$$ت(س) = \int_{٠}^{٣} (٣ - ص)\, ءص + \int_{٣}^{س} (ص - ٣)\, ءص$$

$$= \frac{٩}{٢} + \frac{س^{٢} - ٩}{٢} - ٣(س - ٣) = \frac{س^{٢}}{٢} - ٣س + ٩$$

$$\therefore \quad ت(س) = \begin{cases} ٣س - \frac{س^{٢}}{٢} &، \quad ٠ \leq س \leq ٣ \\ \frac{س^{٢}}{٢} - ٣س + ٩ &، \quad ٣ \leq س \leq ٤ \end{cases}$$

$$\therefore \quad تَ(س) = \begin{cases} ٣ - س &، \quad ٠ < س < ٣ \\ س - ٣ &، \quad ٣ < س < ٤ \\ صفر &، \quad س = ٣ \quad \text{(لماذا؟)} \end{cases}$$

لاحظ أن تَ(س) = ق(س) ، ∀ س ∈] ٠ ، ٤[

النظرية الأساسية في التفاضل والتكامل:

أولاً: إذا كان ق(س) اقتراناً متصلاً على الفترة المغلقة [أ ، ب] وكان $ت(س) = \int_{أ}^{س} ق(ص)\, ءص$
هو الاقتران المكامل للاقتران ق ، فإن تَ(س) = ق(س) لجميع س ∈] أ ، ب[، أي أن تَ(س)
هو اقتران بدائي للاقتران ق(س)

ثانياً: إذا كان م(س) اقتراناً بدائياً للاقتران المتصل ق(س) على [أ ، ب]
فإن $\int_{أ}^{ب} ق(س)\, ءس = م(ب) - م(أ)$، ويكتب هذا الفرق على الصورة $م(س) \Big|_{أ}^{ب}$

يتضمن القسم الأول من هذه النظرية القول إن الاقتران المكامل لاقتران متصل هو اقتران بدائي له، وهذا يؤدي إلى القسم الثاني من النظرية الذي يتضمن استنتاج أنه لحساب التكامل المحدود لاقتران متصل على فترة مغلقة [أ ، ب]، يكفي أن نجد اقتراناً بدائياً له م(س) فيكون $\int_{أ}^{ب}$ ق(س) ءس = م(ب) − م(أ)؛ وهذا يزودنا بطريقة أخرى أكثر سهولة من الطريقة الأولى التي اعتمدناها لحساب التكامل المحدود، والقائمة على تعريف التكامل المحدود بأنه نهاية مجموع ريمان.

مثال (٥): إذا كان ق(س) اقتراناً متصلاً على ح وكان

ت(س) = $\int_{٠}^{س}$ ق(ص)ءص = س^{٢} + س + ١ فأوجد ق(٣).

الحل:

تَ(س) = ق(س)

وبما أن ت(س) = س^{٢} + س + ١

∴ تَ(س) = ٢س + ١

∴ ق(س) = ٢س + ١

ومنها ق(٣) = ٢ × ٣ + ١ = ٧

مثال (٦): إذا كان ت(س) = $\int_{\frac{\pi}{٢}}^{س}$ ق(ص) ءص = جاس + جتاس + جـ

فأوجد قيمة الثابت جـ ، وقاعدة الاقتران ق ، علماً بأن ق متصل على ح

الحل:

ت(س) = $\int_{\frac{\pi}{٢}}^{س}$ ق(ص) ءص = جاس + جتاس + جـ

∴ ت$\left(\frac{\pi}{٢}\right)$ = $\int_{\frac{\pi}{٢}}^{\frac{\pi}{٢}}$ ق(ص) ءص = جا $\frac{\pi}{٢}$ + جتا $\frac{\pi}{٢}$ + جـ

∴ صفر = ١ + ٠ + جـ، ومنها جـ = −١

وبما أن ق اقتران متصل على ح

∴ تَ(س) = ق(س)

∴ جتاس − جاس = ق(س)، أو ق(س) = جتاس − جاس

مثال (٧): إذا كان ق(س) = س^{٢} − ٥ معرفاً على الفترة [−١ ، ١]، فاكتب اقتراناً بدائياً م(س) للاقتران ق(س) ثم أوجد $\int_{-١}^{١}$ ق(س) دس .

الحل:

$$\int (س^{٢} - ٥)\, دس = \frac{س^{٣}}{٣} - ٥س + جـ$$

فيكون أحد الاقترانات البدائية م(س) للاقتران ق(س) هو م(س) = $\frac{س^{٣}}{٣} - ٥س$

$$\Leftarrow \int_{-١}^{١} ق(س)\, دس = م(١) - م(-١)$$

$$= \left(\frac{١}{٣} - ٥\right) - \left(-\frac{١}{٣} + ٥\right) = -\frac{٢٨}{٣}$$

مثال (٨): أوجد $\int_{٠}^{\frac{\pi}{٢}}$ (جتاس + جاس) دس

الحل:

$$\int_{٠}^{\frac{\pi}{٢}} (جتاس + جاس)\, دس$$

$$= (جاس - جتاس)\Big|_{٠}^{\frac{\pi}{٢}}$$

$$= \left(جا\frac{\pi}{٢} - جتا\frac{\pi}{٢}\right) - (جا٠ - جتا٠)$$

$$= ١ - (-١) = ٢$$

مثال (٩): أوجد $\int_{-١}^{١}$ |س| دس

الحل:

$$|س| = \begin{cases} -س &، \quad -١ \leq س < ٠ \\ س &، \quad ٠ \leq س \leq ١ \end{cases}$$

$$\therefore \int_{-١}^{١} |س|\, دس = \int_{-١}^{٠} -س\, دس + \int_{٠}^{١} س\, دس$$

$$= \frac{-س^{٢}}{٢}\Big|_{-١}^{٠} + \frac{س^{٢}}{٢}\Big|_{٠}^{١}$$

$$= \frac{١}{٢} + \frac{١}{٢} = ١$$

تمارين (٤-٥)

١ أوجد الاقتران المكامل لكلٍّ من الاقترانات الآتية :

أ) $\text{ق(س)} = \sqrt{\text{س}}$ ، $١ \leq \text{س} \leq ٤$

ب) $\text{ق(س)} = \text{س} + \text{جاس}$ ، $٠ \leq \text{س} \leq \pi$

ج) $\text{ق(س)} = \begin{cases} ٣\text{س} & ، \; -١ \leq \text{س} < ٢ \\ ٨ - \text{س} & ، \; ٢ \leq \text{س} \leq ٣ \end{cases}$

د) $\text{ق(س)} = |\text{س} - ١|$ ، $٠ \leq \text{س} \leq ٢$

٢ ق(س) اقتران متصل على ح بحيث إن اقترانه المكامل $\text{ت(س)} = \int_{٠}^{\text{س}} \text{ق(ص)}\, \text{دص} = \sqrt{١ + \text{جاس}}$.
أوجد ق(٠) ، $\text{ق}^{\prime}(٠)$.

٣ ق(س) اقتران متصل على [٠ ، ٥]، واقترانه المكامل $\text{ت(س)} = \begin{cases} \text{س}^٢ & ، \; ٠ \leq \text{س} \leq ٢ \\ ٢\text{س} + \text{أ} & ، \; ٢ \leq \text{س} \leq ٥ \end{cases}$

أوجد : أ) قيمة الثابت أ ب) $\int_{٠}^{٥} \text{ق(س)}\, \text{دس}$ ج) ق(٢)

٤ إذا كان $\text{ت(س)} = \int_{٠}^{\text{س}} \text{ق(ص)}\, \text{دص}$ حيث $\text{ق(ص)} = \begin{cases} \text{ص} & ، \; ٠ \leq \text{ص} \leq ١ \\ \text{جا}\, \pi\, \text{ص} & ، \; ١ \leq \text{ص} \leq ٢ \end{cases}$

أوجد كلاً من $\text{ت}^{\prime}\left(\frac{١}{٢}\right)$ ، $\text{ت}^{\prime}\left(\frac{٣}{٢}\right)$

٥ أوجد كلاً من التكاملات الآتية :

أ) $\int_{١}^{٩} \left(٢\text{س} - \frac{٣}{٢}\text{س}^{\frac{١}{٢}} - ١٨\text{س}^{-٣}\right) \text{دس}$

ب) $\int_{-٢}^{٦} |٢\text{س} - ٣|\, \text{دس}$

ج) $\int_{٠}^{\frac{\pi}{٣}} \text{قا}^٢\text{س}\, \text{دس}$

د) $\int_{١}^{٣} [\text{س} + ٢]\, \text{دس}$

٦ أوجد كلاً من : أ) $\lim\limits_{\text{هـ} \to ٠} \frac{١}{\text{هـ}} \int_{٣}^{٣+\text{هـ}} \text{س}\, \text{دس}$ ب) $\lim\limits_{\text{هـ} \to ٠} \frac{١}{\text{هـ}} \int_{٣}^{٣+\text{هـ}} \sqrt{١ + \text{س}^٢}\, \text{دس}$

٤-٦ الاقترانات اللوغاريتمية والأسّيّة الطبيعية
(Natural Logarithmic and Exponential Functions)

أولاً: الاقتران اللوغاريتمي الطبيعي:

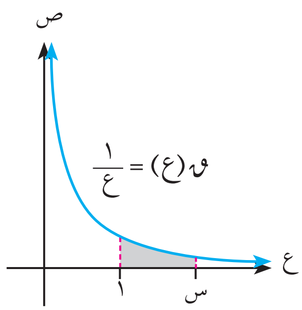
تعلم أن $\int$ س^{ن} ءس = $\frac{\text{س}^{ن+١}}{ن+١}$ + جـ ، ن ≠ -١ ، فماذا عن الحالة التي تكون فيها ن=-١ ، أي $\int \frac{١}{\text{س}}$ ءس؟

للإجابة عن السؤال نلاحظ أن الاقتران ق(س) = $\frac{١}{\text{س}}$ ، س > ٠ اقتران متصل

على أية فترة مغلقة من مجاله ؛ ومن ثم فإن اقترانه المكامل

ت(س) = $\int_{١}^{\text{س}} \frac{١}{ع}$ ءع ، س > ٠ هو اقتران بدائي له ، وقيمة هذا الاقتران عند

أي قيمة للمتغير س ≥ ١ تمثل مساحة المنطقة المظللة في الشكل (٤-٦) .



الشكل (٤-٦)

من خصائص الاقتران ت(س) = $\int_{١}^{\text{س}} \frac{١}{ع}$ ءع ، س > ٠ ما يلي :

١ ت(١) = صفر

٢ تَ(س) = $\frac{١}{\text{س}}$ (النظرية الأساسية في التفاضل والتكامل)

∴ تَ(س) > ٠ لجميع س > ٠

أي أن ت(س) اقتران متزايد على مجاله وهو مجموعة الأعداد الحقيقية الموجبة .

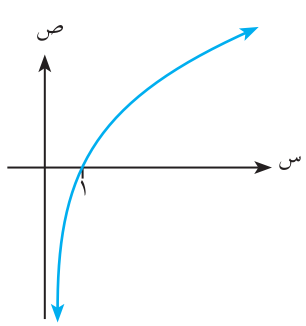
٣ تً(س) = $\frac{-١}{\text{س}^{٢}}$

∴ تً(س) < ٠ لجميع س > ٠

أي أن منحنى الاقتران ت(س) مقعر للأسفل على مجاله .

بالاستعانة بهذه الخصائص ، يمكن رسم منحنى ت(س) بشكل تقريبي كما في الشكل (٤-٧) ، وهذا الشكل ؛ يذكرك بمنحنى الاقتران اللوغاريتمي الذي مر معك سابقاً .

ويمكن تبيان أن الاقتران ت(س) ينتمي فعلاً لعائلة الاقترانات اللوغاريتمية ، وأن الأساس لهذا الاقتران هو العدد النيبيري (هـ) الذي تعرفه سابقاً وقيمته ٢,٧ تقريباً .



الشكل (٤-٧)

تعريف:

اقتران اللوغاريتم الطبيعي $ق(س) = لو_{هـ} س$ هو اقتران مجاله مجموعة الأعداد الحقيقية الموجبة، ومداه مجموعة الأعداد الحقيقية، وقاعدته $لو_{هـ} س = \int_{1}^{س} \frac{1}{ع} \, ءع$ ، $س > 0$

وبطبيعة الحال، تنطبق على الاقتران اللوغاريتمي $ق(س) = لو_{هـ} س$ قوانين اللوغاريتمات ذاتها التي تعلمتها سابقاً، أي أن:

1. $لو_{هـ} أب = لو_{هـ} أ + لو_{هـ} ب$
2. $لو_{هـ} \frac{أ}{ب} = لو_{هـ} أ - لو_{هـ} ب$
3. $لو_{هـ} أ^{ن} = ن \, لو_{هـ} أ$

نظرية:

1. إذا كان $ق(س) = لو_{هـ} س$ ، $س > 0$ فإن $قَ(س) = \frac{1}{س}$
2. $\int \frac{1}{س} \, ءس = لو_{هـ} |س| + جـ$

وبوجه عام:

1. إذا كان $ق(س) = لو_{هـ} ع(س)$؛ حيث $ع(س) > 0$ ، وقابل للاشتقاق، فإن:

$$قَ(س) = \frac{1}{ع(س)} \times عَ(س) = \frac{عَ(س)}{ع(س)}$$

2. $\int \frac{قَ(س)}{ق(س)} \, ءس = لو_{هـ} |ق(س)| + جـ$

مثال (1): أوجد $\int \frac{5}{س} \, ءس$

الحل:

$$\int \frac{5}{س} \, ءس = 5 \int \frac{1}{س} \, ءس$$

$$= 5 لو_{هـ} |س| + جـ$$

مثال (٢): أوجد $\int_{\text{هـ}}^{\text{هـ}^{٢}} \frac{١}{\text{س}} \, \text{ءس}$

الحل:

$$\int_{\text{هـ}}^{\text{هـ}^{٢}} \frac{١}{\text{س}} \, \text{ءس} = \text{لو}_{\text{هـ}} |\text{س}| \Big|_{\text{هـ}}^{\text{هـ}^{٢}}$$

$$= \text{لو}_{\text{هـ}} \text{س} \Big|_{\text{هـ}}^{\text{هـ}^{٢}}$$

$$= \text{لو}_{\text{هـ}} \text{هـ}^{٢} - \text{لو}_{\text{هـ}} \text{هـ}$$

$$= ٢\text{لو}_{\text{هـ}} \text{هـ} - \text{لو}_{\text{هـ}} \text{هـ} = \text{لو}_{\text{هـ}} \text{هـ} = ١$$

مثال (٣): إذا كانت ص = لو$_{\text{هـ}}$ جتا^{٢}س فأوجد $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$

الحل:

$$\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \frac{١}{\text{جتا}^{٢}\text{س}} \times (\text{جتا}^{٢}\text{س})'$$

$$= \frac{١}{\text{جتا}^{٢}\text{س}} \times ٢\text{جتاس} \times -\text{جاس} = -٢\text{ظاس}$$

مثال (٤): أوجد $\int \frac{٢\text{س}}{\text{س}^{٢} + ١} \, \text{ءس}$

الحل: البسط (٢س) هو مشتقة المقام (س^{٢} + ١)

$$\therefore \int \frac{٢\text{س}}{\text{س}^{٢} + ١} \, \text{ءس} = \text{لو}_{\text{هـ}} (\text{س}^{٢} + ١) + \text{جـ}$$

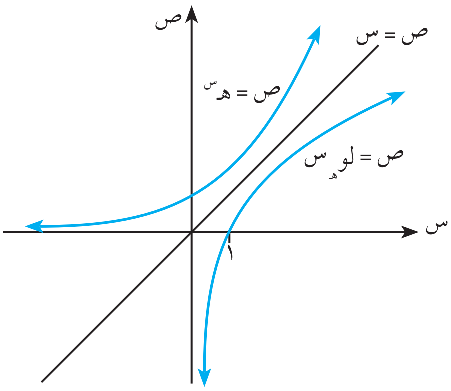
مثال (٥): أوجد $\int \text{ظتاس} \, \text{ءس}$

الحل:

$$\int \text{ظتاس} \, \text{ءس} = \int \frac{\text{جتاس}}{\text{جاس}} \, \text{ءس} = \int \frac{(\text{جاس})'}{\text{جاس}} \, \text{ءس}$$

$$= \text{لو}_{\text{هـ}} |\text{جاس}| + \text{جـ}$$

ثانياً: الاقتران الأُسّيّ الطبيعي:



الشكل (٤-٨)

الاقتران اللوغاريتمي الطبيعي $ق(س) = لو_{هـ} س$ هو اقتران تناظر؛ فيكون له اقتران عكسي $ق^{-١}(س)$ مجاله ح، ومداه $ح^{+}$، وقاعدته $ق^{-١}(س) = هـ^{س}$، ومنحناه هو انعكاس لمنحنى الاقتران اللوغاريتمي في المستقيم $ص = س$. انظر الشكل (٤-٨).

تنطبق على الاقتران الأسي الطبيعي $ص = هـ^{س}$ قوانين الأسس التي تعلمتها سابقاً، ومنها:

١ $هـ^{م} \times هـ^{ن} = هـ^{م+ن}$

٢ $هـ^{م} \div هـ^{ن} = هـ^{م-ن}$

٣ $(هـ^{م})^{ن} = هـ^{م ن}$

٤ $هـ^{٠} = ١$

نظرية:

١ إذا كانت $ص = هـ^{س}$ فإن $\frac{دص}{دس} = هـ^{س}$

٢ $\int هـ^{س} \, دس = هـ^{س} + جـ$

البرهان:

١ $ص = هـ^{س}$

بأخذ اللوغاريتم الطبيعي للطرفين، ينتج:

$لو_{هـ} ص = لو_{هـ} هـ^{س} = س \, لو_{هـ} هـ = س$

وباشتقاق طرفي المعادلة بالنسبة إلى س، ينتج:

$\frac{١}{ص} \frac{دص}{دس} = ١$

$\therefore \frac{دص}{دس} = ص = هـ^{س}$

٢ بما أن $\frac{د}{دس}(هـ^{س}) = هـ^{س}$

$\therefore$ $هـ^{س}$ اقتران بدائي للاقتران $هـ^{س}$

أي أن $\int هـ^{س} \, دس = هـ^{س} + جـ$

ويمكن تعميم النظرية السابقة كما يلي:

١ إذا كانت ص = $هـ^{ك(س)}$ ، ك(س) قابل للاشتقاق فإن $\frac{ءص}{ءس}$ = $هـ^{ك(س)}$ × كَ(س)

٢ $\int$ $هـ^{ك(س)}$. كَ(س) ءس = $هـ^{ك(س)}$ + جـ

مثال (٦): أوجد $\frac{ءص}{ءس}$ في كل مما يلي:

أ ص = س $هـ^{س}$ ب ص = $هـ^{جاس}$ عند س = $\frac{\pi}{٢}$ جـ ص = $لو_{هـ}$ $\frac{هـ^{س}}{هـ^{س} + ١}$

الحل:

أ ص = س $هـ^{س}$

$\frac{ءص}{ءس}$ = س × $هـ^{س}$ + $هـ^{س}$ × ١ = س $هـ^{س}$ + $هـ^{س}$

ب ص = $هـ^{جاس}$ ، س = $\frac{\pi}{٢}$

$\frac{ءص}{ءس}$ = $هـ^{جاس}$ × جتاس

∴ $\left.\frac{ءص}{ءس}\right|_{س = \frac{\pi}{٢}}$ = $هـ^{جا\frac{\pi}{٢}}$ × جتا $\frac{\pi}{٢}$ = $هـ^{١}$ × ٠ = ٠

جـ ص = $لو_{هـ}$ $\frac{هـ^{س}}{هـ^{س} + ١}$

$\frac{ءص}{ءس}$ = $\frac{١}{\left(\frac{هـ^{س}}{هـ^{س} + ١}\right)}$ × $\left(\frac{هـ^{س}}{هـ^{س} + ١}\right)'$

= $\frac{هـ^{س} + ١}{هـ^{س}}$ × $\frac{(هـ^{س} + ١) × هـ^{س} - هـ^{س} (هـ^{س})}{(هـ^{س} + ١)^{٢}}$

= $\frac{هـ^{س} + ١}{هـ^{س}}$ × $\frac{هـ^{٢س} + هـ^{س} - هـ^{٢س}}{(هـ^{س} + ١)^{٢}}$ = $\frac{١}{هـ^{س} + ١}$

ويمكن حل المثال بطريقة أخرى هكذا :

ص = $لو_{هـ}$ $\frac{هـ^{س}}{هـ^{س} + ١}$

= $لو_{هـ}$ $هـ^{س}$ − $لو_{هـ}$ ($هـ^{س}$ + ١)

= س − $لو_{هـ}$ ($هـ^{س}$ + ١)

∴ $\frac{ءص}{ءس}$ = ١ − $\frac{١}{هـ^{س} + ١}$ × $هـ^{س}$ = $\frac{هـ^{س} + ١ - هـ^{س}}{هـ^{س} + ١}$ = $\frac{١}{هـ^{س} + ١}$

مثال (٧): أوجد كلاً من التكاملات الآتية:

أ $\int ٣س^{٢} هـ^{س^{٣}}\,ءس$

ب $\int هـ^{جاس} جتاس\,ءس$

الحل:

أ $\int ٣س^{٢} هـ^{س^{٣}}\,ءس = \int هـ^{س^{٣}} \times (س^{٣})' \,ءس$

$= هـ^{س^{٣}} + جـ$

ب $\int هـ^{جاس} جتاس\,ءس = \int هـ^{جاس} (جاس)' \,ءس$

$= هـ^{جاس} + جـ$

تمارين (٤-٦)

١ أوجد $\frac{ءص}{ءس}$ في كلٍ مما يلي:

أ $ص = لو_{هـ} (س^{٢} + ٢س)$

ب $ص = (لو_{هـ} س)^{٣}$

جـ $ص = لو_{هـ} جا^{٢}س$

د $ص = س - س لو_{هـ} س$

هـ $ص = \frac{س لو_{هـ} س}{١ + لو_{هـ} س}$

و $ص = لو_{هـ} (لو_{هـ} س)$

ز $ص = \frac{هـ^{س} + ١}{هـ^{س} - ١}$

ح $ص = هـ^{٢س} لو_{هـ} س^{٣}$

ط $ص = لو_{هـ} \sqrt{\frac{س}{(س^{٢} + ١)^{٣}}}$

ي $هـ^{س} + هـ^{ص} = هـ^{س+ص}$

ك $ص = \sqrt{\frac{س}{(س^{٢} + ١)^{٣}}}$

ل $ص = س^{س}$ (إرشاد: خذ لوغاريتم الطرفين)

٢ أوجد كلاً من التكاملات التالية:

أ $\int هـ^{ظاس} قا^{٢}س\,ءس$

ب $\int \frac{هـ^{٢س}}{هـ^{٢س} + ١}\,ءس$

جـ $\int \frac{١}{٢} \sqrt{هـ^{س}}\,ءس$

د $\int_{٠}^{هـ} ٢هـ^{٢س}\,ءس$

هـ $\int \frac{س}{س + ١}\,ءس$

و $\int \frac{س + ١}{س^{٢} + ٢س + ٤}\,ءس$

٣ بين أن الاقتران $ص = (١ + ٢س)هـ^{٣س}$ يحقق المعادلة:

$$\frac{ء^{٢}ص}{ءس^{٢}} - ٦ \frac{ءص}{ءس} + ٩ص = ٠$$

٤-٧ طـرق التكامـــل (Methods of Integration)

عندما يطلب منك إجراء تكامل ما ، قد يكون بالإمكان التطبيق المباشر لإحدى القواعد الأساسية في التكامل التي مرت معك سابقاً مثل :

$\int \text{س}^{\text{ن}}\, \text{ءس} = \dfrac{\text{س}^{\text{ن}+1}}{\text{ن}+1} + \text{جـ}$ ، ن $\neq -1$ ، أو $\int \text{قا}^2\text{س}\, \text{ءس} = \text{ظا س} + \text{جـ}$ ، أو $\int \dfrac{1}{\text{س}}\, \text{ءس} = \text{لو}|\text{س}| + \text{جـ}$ ،

أو . . . إلخ .

أما في الحالات التي لا تخضع للتطبيق المباشر لقواعد التكامل الأساسية فمن الممكن استخدام طرق أخرى منها :

١ التكامل بالتعويض .

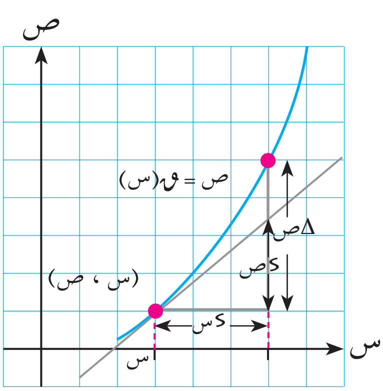
٢ التكامل بالأجزاء .

٣ التكامل بالكسور الجزئية .

وفيما يلي توضيح لكلٍّ من هذه الطرق :

أولاً: التكامل بالتعويض (Integration by Substitution)

تمهيد: الرمزان ءس ، ءص :



الشكل (٤-٩)

إذا كان ص = ق(س) اقتراناً قابلاً للاشتقاق عند النقطة (س ، ص) فإننا نعرف الرمزين ءس ، ءص ، ويسميان تفاضلة س ، وتفاضلة ص على الترتيب ، هكذا : ءس = Δس ، ءص = $\text{ق}'(\text{س})$ ءس .

إن الرمز ءس هو رمز آخر للتغير في س أي Δس ، أما الرمز ءص فهو التغير في ص المناظر للتغير في س بالنسبة إلى المماس للمنحنى عند النقطة (س ، ص) ، وعندما تكون Δس قريبة من الصفر فإن Δص تكون قريبة من ءص ، انظر الشكل (٤-٩) .

ويتيح لنا هذا التعريف اعتبار $\dfrac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ كسراً بسطه ومقامه ءص ، ءس على الترتيب .

إن أسلوب التكامل بالتعويض يقوم على تحويل التكامل المعطى إلى تكامل آخر بمتغير جديد بصورة أسهل من الصورة الأصلية ؛ فمثلاً إذا كان التكامل المطلوب على الصورة $\int \text{ق}(\text{هـ}(\text{س})) . \text{هـ}'(\text{س})\, \text{ءس}$ فإن التعويض ص = هـ(س) يحول التكامل إلى الصورة $\int \text{ق}(\text{ص})\, \text{ءص}$ لأن ءص = $\text{هـ}'(\text{س})$ ءس ؛ والصورة الأخيرة أسهل من الصورة الأولى .

مثال (١): أوجد $\int$ (س^{٢} + ٣س)^{٣} (٢س + ٣) ءس

الحل:

نفرض أن ص = س^{٢} + ٣س

ءص = (٢س + ٣) ءس

وبالتعويض يكون التكامل = $\int$ ص^{٣} ءص = $\frac{\text{ص}^{٤}}{٤}$ + جـ

= $\frac{(\text{س}^{٢} + ٣\text{س})^{٤}}{٤}$ + جـ

مثال (٢): أوجد $\int$ جا^{٢}س جتاس ءس

الحل:

نفرض أن ص = جاس

ءص = جتاس ءس

وبالتعويض يكون التكامل = $\int$ ص^{٢} ءص = $\frac{\text{ص}^{٣}}{٣}$ + جـ

= $\frac{\text{جا}^{٣}\text{س}}{٣}$ + جـ

مثال (٣): أوجد $\int$ (٢س + ٣)^{٥} ءس

الحل:

نفرض أن ص = ٢س + ٣

ءص = ٢ ءس ومنها ءس = $\frac{\text{ءص}}{٢}$

بالتعويض يكون التكامل= $\int$ ص^{٥} $\frac{\text{ءص}}{٢}$ = $\frac{\text{ص}^{٦}}{١٢}$ + جـ = $\frac{(٢\text{س} + ٣)^{٦}}{١٢}$ + جـ

مثال (٤): أوجد $\int$ جتا(٣س + ٢) ءس

الحل:

نفرض أن ص = (٣س + ٢)

ءص = ٣ ءس ومنها ءس = $\frac{\text{ءص}}{٣}$

وبالتعويض يكون التكامل = $\int$ $\frac{١}{٣}$ جتاص ءص = $\frac{١}{٣}$ جاص + جـ

= $\frac{١}{٣}$ جا(٣س + ٢) + جـ

قاعدة:

إذا كان التكامل $\int$ ق(س) ءس = م(س) + جـ ، فإن $\int$ ق(أس + ب) ءس = $\frac{\text{م(أس + ب)}}{\text{أ}}$ + جـ ،

مثال (٥):

أوجد كلاً من التكاملات التالية :

أ $\int$ (٣س + ٤)^{٥} ءس   ب $\int$ قا^{٢}(٥س + ١) ءس   جـ $\int$ هـ$^{٥س+٧}$ ءس

الحل:

أ $\int$ س^{٥} ءس = $\frac{\text{س}^{٦}}{٦}$ + جـ

∴ $\int$ (٣س + ٤)^{٥} ءس = $\frac{(\text{٣س + ٤})^{٦}}{٦ \times ٣}$ + جـ

= $\frac{(\text{٣س + ٤})^{٦}}{١٨}$ + جـ

ب $\int$ قا^{٢}س ءس = ظاس + جـ

∴ $\int$ قا^{٢}(٥س + ١) ءس = $\frac{\text{ظا(٥س + ١)}}{٥}$ + جـ

جـ $\int$ هـ$^{\text{س}}$ ءس = هـ$^{\text{س}}$ + جـ

∴ $\int$ هـ$^{٥س+٧}$ ءس = $\frac{\text{هـ}^{٥س+٧}}{٥}$ + جـ

مثال (٦):

أوجد $\int_{٠}^{\frac{\pi}{٢}} \frac{\text{٢جاس جتاس}}{\sqrt{\text{١ + جا}^{٢}\text{س}}}$ ءس

الحل:

نفرض أن ص = ١ + جا^{٢}س

ءص = ٢جاس جتاس ءس

بالتعويض يكون التكامل غير المحدود= $\int \frac{\text{ءص}}{\sqrt{\text{ص}}}$

= $\int$ ص$^{-\frac{١}{٢}}$ ءص

= ٢ ص$^{\frac{١}{٢}}$ + جـ = ٢ $\sqrt{\text{١ + جا}^{٢}\text{س}}$ + جـ

∴ التكامل المحدود المطلوب = ٢ $\sqrt{\text{١ + جا}^{٢}\text{س}}$ $\Big|_{٠}^{\frac{\pi}{٢}}$ = ٢ $\sqrt{٢}$ − ٢

ملاحظة: يمكن حساب التكامل المحدود أيضاً بالاستمرار في التكامل مع المتغير الجديد ص فعندما س = ٠ تكون ص = ١ + جا^{٢} ٠ = ١ ، وعندما س = $\frac{\pi}{٢}$ تكون ص = ١ + جا^{٢} $\frac{\pi}{٢}$ = ٢

∴ التكامل المحدود = ٢ص$^{\frac{١}{٢}}$ $\Big|_{١}^{٢}$ = ٢ $\sqrt{٢}$ − ٢

مثال (٧): أوجد $\int_{١}^{هـ}$ $\frac{\text{جتا (لو}_{\text{هـ}}\text{س)}}{\text{س}}$ ءس

الحل: نفرض أن ص = لو$_{\text{هـ}}$س

ءص = $\frac{١}{\text{س}}$ ءس ومنها ءس = س ءص

بالتعويض، يكون التكامل غير المحدود = $\int$ $\frac{\text{جتاص}}{\text{س}}$ × س ءص

= $\int$ جتاص ءص

= جاص + جـ = جا (لو$_{\text{هـ}}$س) + جـ

∴ التكامل المحدود المطلوب = جا لو$_{\text{هـ}}$س $\Big|_{١}^{\text{هـ}}$

= جا لو$_{\text{هـ}}$ هـ − جا لو$_{\text{هـ}}$١

= جا ١ − جا ٠ = جا ١

مثال (٨): أوجد $\int$ جتا^{٣}س ءس

الحل: $\int$ جتا^{٣}س ءس = $\int$ جتاس . جتا^{٢}س ءس

= $\int$ جتاس(١ − جا^{٢}س) ءس

وبفرض أن ص = جاس فيكون ءص = جتاس ءس

∴ $\int$ جتا^{٣}س ءس = $\int$ (١ − ص^{٢}) ءص

= ص − $\frac{\text{ص}^{٣}}{٣}$ + جـ

= جاس − $\frac{\text{جا}^{٣}\text{س}}{٣}$ + جـ تحقق من صحة الحل

تمارين (٤-٧-١)

١ أوجد كلاً من التكاملات التالية:

(أ) $\int \text{س}(\text{س}^{٢} + ٤)^{٥}\, \text{ءس}$

(ب) $\int (\text{س}^{٢} - ١)\sqrt{\text{س}^{٣} - ٣\text{س}}\, \text{ءس}$

(جـ) $\int \text{جتاس}\sqrt{١ + \text{جاس}}\, \text{ءس}$

(د) $\int \text{س}^{-٢}\, \text{جا}\, \frac{١}{\text{س}}\, \text{ءس}$

(هـ) $\int (\text{س} + ٢)\, \text{جا}\,(\text{س}^{٢} + ٤\text{س} - ٦)\, \text{ءس}$

(و) $\int \frac{(\text{لوس})^{٢}}{\text{س}}\, \text{ءس}$

(ز) $\int_{٠}^{٢} \frac{\text{س}^{٢} + ١}{\sqrt{\text{س}^{٣} + ٣\text{س} + ١}}\, \text{ءس}$

(ح) $\int_{٣}^{٨} \frac{\text{جا}\sqrt{\text{س} + ١}}{\sqrt{\text{س} + ١}}\, \text{ءس}$

(ط) $\int \frac{\text{هـ}^{\text{س}}}{(\text{هـ}^{\text{س}} + ١)^{٢}}\, \text{ءس}$

(ي) $\int \frac{\text{هـ}^{\sqrt{٢\text{س} + ٥}}}{\sqrt{٢\text{س} + ٥}}\, \text{ءس}$

٢ أوجد كلاً من التكاملات التالية:

(أ) $\int \sqrt[٣]{٢\text{س} - ١}\, \text{ءس}$

(ب) $\int \text{جا}^{٢}\text{س}\, \text{ءس}$

(جـ) $\int \text{جا}^{٢}\text{س}\, \text{جتا}^{٣}\text{س}\, \text{ءس}$

(د) $\int \frac{١}{١ - \text{جتاس}}\, \text{ءس}$

(هـ) $\int_{٠}^{\frac{\pi}{٣}} \text{قا}^{٣}\text{س}\, \text{ظاس}\, \text{ءس}$

(و) $\int \text{س}^{٢}(\text{س} + ١)^{١٥}\, \text{ءس}$

(ز) $\int \text{قاس}\, \text{ءس}$ (إرشاد: اضرب واقسم على (قاس + ظاس))

(ح) $\int \frac{\text{س}}{\sqrt{١ + \text{س}}}\, \text{ءس}$ (إرشاد: ضع ص = ١ + س)

ثانياً: التكامل بالأجزاء (Integration by Parts)

نعلم أنه إذا كان ى ، هـ اقترانين قابلين للاشتقاق بالنسبة للمتغير س فإن:

$$\frac{د}{دس}(ى \times هـ) = ى \times \frac{دهـ}{دس} + هـ \times \frac{دى}{دس}$$

وبإجراء التكامل للطرفين بالنسبة إلى س يكون:

$$ى \times هـ = \int ى \frac{دهـ}{دس} دس + \int هـ \frac{دى}{دس} دس$$

$$= \int ى دهـ + \int هـ دى$$

أي أن:

$$\int ى دهـ = ى \times هـ - \int هـ دى$$

تسمى هذه القاعدة قاعدة التكامل بالأجزاء، ويمكن استخدامها في حساب بعض التكاملات، كما يتضح من الأمثلة التالية:

مثال (١): أوجد $\int$ س جاس دس

الحل: نفرض أن ى = س ، دهـ = جاس دس

دى = دس ، هـ = $\int$ جاس دس = −جتاس

لكن $\int$ ى دهـ = ى هـ − $\int$ هـ دى

$\therefore$ $\int$ س جاس دس = −س جتاس + $\int$ جتاس دس

= −س جتاس + جاس + جـ

يمكن أن يتطلب إجراء التكامل تطبيق طريقة الأجزاء أكثر من مرة، كما في المثال التالي:

مثال (٢): أوجد $\int$ س^{٢} جتاس دس

الحل: نفرض أن ى = س^{٢} ، دهـ = جتاس دس

دى = ٢س دس ، هـ = $\int$ جتاس دس = جاس

∴ $\int$ س^{٢} جتا س ءس = س^{٢} جا س − $\int$ ٢ س جا س ءس

= س^{٢} جا س − ٢ $\int$ س جا س ءس

ولحساب $\int$ س جا س ءس نستخدم التكامل بالأجزاء مرة أخرى، كما في مثال (١) فنحصل على النتيجة النهائية:

$\int$ س^{٢} جتا س ءس = س^{٢} جا س − ٢ (−س جتا س + جا س) + جـ

= س^{٢} جا س + ٢ س جتا س − ٢ جا س + جـ

مثال (٣): أوجد $\int$ س $\sqrt{\text{س} + ٤}$ ءس

الحل: نفرض أن ى = س   ءهـ = $\sqrt{\text{س} + ٤}$ ءس

ءى = ءس   هـ = $\int$ (س + ٤)$^{\frac{١}{٢}}$ ءس = $\frac{٢}{٣}$ (س + ٤)$^{\frac{٣}{٢}}$

∴ $\int$ س $\sqrt{\text{س} + ٤}$ ءس = $\frac{٢}{٣}$ س (س + ٤)$^{\frac{٣}{٢}}$ − $\int$ $\frac{٢}{٣}$ (س + ٤)$^{\frac{٣}{٢}}$ ءس

= $\frac{٢}{٣}$ س (س + ٤)$^{\frac{٣}{٢}}$ − $\frac{٤}{١٥}$ × (س + ٤)$^{\frac{٥}{٢}}$ + جـ

مثال (٤): أوجد $\int_{١}^{\text{هـ}}$ لو$_{\text{هـ}}$ س ءس

الحل: نفرض أن ى = لو$_{\text{هـ}}$ س   ءو = ءس

ءى = $\frac{١}{\text{س}}$ ءس   و = س

∴ $\int$ لو$_{\text{هـ}}$ س ءس = س لو$_{\text{هـ}}$ س − $\int$ س × $\frac{١}{\text{س}}$ ءس

= س لو$_{\text{هـ}}$ س − س + جـ

∴ $\int_{١}^{\text{هـ}}$ لو$_{\text{هـ}}$ س ءس = س لو$_{\text{هـ}}$ س − س $\Big|_{١}^{\text{هـ}}$

= (هـ لو$_{\text{هـ}}$ هـ − هـ) − (لو$_{\text{هـ}}$ ١ − ١) = ١

ويمكن حساب التكامل في بعض الحالات بتطبيق طريقتي التعويض والأجزاء معا، كما في المثال التالي :

مثال (٥): أوجد $\int \text{جا}\sqrt{\text{س}}\ \text{ءس}$

الحل: نفرض أن $\text{ص} = \sqrt{\text{س}}$ $\therefore$ $\text{س} = \text{ص}^{٢}$

$\therefore$ $\text{ءس} = ٢\text{ص}\ \text{ءص}$

بالتعويض، يكون $\int \text{جا}\sqrt{\text{س}}\ \text{ءس} = \int ٢\text{ص جاص ءص}$

$= ٢\int \text{ص جاص ءص}$

ولحساب $\int$ ص جاص ءص نستخدم طريقة الأجزاء، كما في مثال (١) فنحصل على النتيجة النهائية :

$\int \text{جا}\sqrt{\text{س}}\ \text{ءس} = ٢\int \text{ص جاص ءص}$

$= ٢(-\text{ص جتاص} + \text{جاص}) + \text{جـ}$

$= ٢\left(-\sqrt{\text{س}}\ \text{جتا}\sqrt{\text{س}} + \text{جا}\sqrt{\text{س}}\right) + \text{جـ}$

تمارين (٤-٧-٢)

١ استخدم طريقة التكامل بالأجزاء في كلٍ مما يلي :

(أ) $\int \text{س جا٢س ءس}$ (ب) $\int (٢\text{س} + ١)\text{جتا٣س ءس}$

(جـ) $\int \text{س لو}_{\text{هـ}}\text{س ءس}$ (د) $\int \text{س}^{٢}\ \text{هـ}^{\text{س}}\ \text{ءس}$

(هـ) $\int \text{س}^{١٠}\ \text{لو}_{\text{هـ}}\text{س ءس}$ (و) $\int \text{هـ}^{\text{س}}\ \text{جاس ءس}$

٢ أوجد التكاملات التالية :

(أ) $\int \text{س ظتا س قتا}^{٢}\text{س ءس}$ (ب) $\int \text{جا}(\text{لو}_{\text{هـ}}\text{س})\ \text{ءس}$ (جـ) $\int_{.}^{١} \text{س}\sqrt{١ - \text{س}}\ \text{ءس}$

٣ إذا كان $\int_{١}^{٢} \text{ق}(\text{س})\ \text{ءس} = ٣$ ، $\text{ق}(١) = ٥$ ، $\text{ق}(٢) = ٨$ ، فاحسب قيمة $\int_{١}^{٢} \text{س}\ \text{ق}'(\text{س})\ \text{ءس}$

٤ إذا كانت : $\dfrac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \text{س قاس ظاس}$، فأوجد ص بدلالة س .

ثالثاً: التكامل بالكسور الجزئية Integration by Partial Fractions

في بند سابق استطعنا أن نجد تكاملات اقترانات نسبية مثل $\frac{٢}{٢س + ٢}$ ، $\frac{٢س}{س^{٢} + ١}$ ، . . . إلخ، حيث يكون البسط مساوياً لمشتقة المقام، وذلك باستخدام القاعدة $\int \frac{ق'(س)}{ق(س)} \,ءس = لو_{هـ}|ق(س)| + جـ$.

في هذا البند، ستتعرف طريقة التكامل بالكسور الجزئية لإيجاد تكاملات اقترانات نسبية أعم مما سبق، وتقوم الفكرة الأساسية في هذه الطريقة على تحليل المقام في الاقتران النسبي إلى عوامل أولية من الدرجة الأولى أو الثانية، ثم كتابة الاقتران النسبي في هيئة مجموع اقترانين نسبيين أو أكثر من النوع المذكور في أعلاه، كما يتضح من الأمثلة التالية؛ وسنقتصر على إيجاد تكامل اقتران نسبي مقامه كثير حدود لا تزيد درجته على ٣ ويقبل التحليل إلى عوامل خطية مختلفة.

مثال (١): جد $\int \frac{٥س - ٣}{س^{٢} - ٢س - ٣} \,ءس$

الحل: المقام $س^{٢} - ٢س - ٣ = (س + ١)(س - ٣)$

نضع $\frac{٥س - ٣}{س^{٢} - ٢س - ٣} = \frac{أ}{س + ١} + \frac{ب}{س - ٣}$

$= \frac{أ(س - ٣) + ب(س + ١)}{(س + ١)(س - ٣)}$

$= \frac{(أ + ب)س + ب - ٣أ}{(س + ١)(س - ٣)}$

وبما أن الاقترانين النسبيين في الطرفين متساويان والمقامين متساويان أيضاً فإن البسطين يكونان متساويين وتكون معاملات الحدود المتشابهة فيهما متساوية

$\therefore$ $أ + ب = ٥$ . . . . (١)

$ب - ٣أ = -٣$ . . . . (٢)

وبحل المعادلتين معاً ينتج أن: $أ = ٢$ ، $ب = ٣$

$\therefore$ $\int \frac{٥س - ٣}{س^{٢} - ٢س - ٣} \,ءس = \int \left(\frac{٢}{س + ١} + \frac{٣}{س - ٣}\right) ءس$

$= ٢لو_{هـ}|س + ١| + ٣لو_{هـ}|س - ٣| + جـ$

مثال (٢): أوجد $\int \frac{٢س^{٢} + ٣س - ١}{س^{٣} - س} \, ءس$

الحل: المقام $س^{٣} - س = س(س^{٢} - ١)$

$$= س(س - ١)\,(س + ١)$$

نضع $\frac{٢س^{٢} + ٣س - ١}{س^{٣} - س} = \frac{أ}{س} + \frac{ب}{س - ١} + \frac{جـ}{س + ١}$

$$= \frac{أ(س^{٢} - ١) + ب(س^{٢} + س) + جـ(س^{٢} - س)}{س\,(س - ١)\,(س + ١)}$$

$$= \frac{(أ + ب + جـ)\,س^{٢} + (ب - جـ)\,س - أ}{س\,(س - ١)\,(س + ١)}$$

بمساواة معاملات الحدود المتشابهة في البسطين ينتج :

$أ + ب + جـ = ٢$ .... (١)

$ب - جـ = ٣$ .... (٢)

$-أ = -١$ .... (٣)

بحل المعادلات ينتج أن : $أ = ١$ ، $ب = ٢$ ، $جـ = -١$

$$\therefore \int \frac{٢س^{٢} + ٣س - ١}{س^{٣} - س} \, ءس = \int \left(\frac{١}{س} + \frac{٢}{س - ١} - \frac{١}{س + ١} \right) ءس$$

$$= لو_{هـ}|س| + ٢لو_{هـ}|س - ١| - لو_{هـ}|س + ١| + جـ$$

مثال (٣): أوجد $\int \frac{٢س^{٣} + ٢س^{٢} + ١}{س^{٢} - س} \, ءس$

الحل: يلاحظ في هذا المثال أن درجة البسط أكبر من درجة المقام؛ لذا نجري أولاً القسمة الطويلة للحصول على اقترانات نسبية درجة البسط فيها أصغر من درجة المقام.

كما هو مبين جانباً يكون :

$$\frac{٢س^{٣} + ٢س^{٢} + ١}{س^{٢} - س} = ٢س + \frac{١}{س^{٢} - س}$$

$$\therefore \int \frac{٢س^{٣} + ٢س^{٢} + ١}{س^{٢} - س} \, ءس = \int \left(٢س + \frac{١}{س^{٢} - س} \right) ءس$$

$$\begin{array}{r|l} ٢س & \\ \hline \cancel{٢س^{٣}} - \cancel{٢س^{٢}} + ٢س^{٢} + ١ & س^{٢} - س \\ -\cancel{٢س^{٣}} \pm \cancel{٢س^{٢}} & \\ \hline ١ & \end{array}$$

$$= س^٢ + \int \frac{١}{س^٢ - س} \, ءس$$

ولإجراء التكامل $\int \frac{١}{س^٢ - س} \, ءس$ نفرض أن:

$$\frac{١}{س^٢ - س} = \frac{١}{س(س - ١)} = \frac{أ}{س} + \frac{ب}{س - ١}$$

$$= \frac{أ(س - ١) + ب(س)}{س(س - ١)}$$

$$= \frac{(أ + ب) س - أ}{س(س - ١)}$$

$\Leftarrow$ $أ + ب = ٠$

$-أ = ١$ أي أن $أ = -١$ ، $ب = ١$

$$\therefore \int \frac{١}{س^٢ - س} \, ءس = \int \left(\frac{-١}{س} + \frac{١}{س - ١} \right) ءس$$

$$= -لو_{هـ} |س| + لو_{هـ} |س - ١|$$

$$\therefore \int \frac{٢س^٣ + ٢س^٢ + ١}{س^٢ - س} \, ءس = س^٢ - لو_{هـ} |س| + لو_{هـ} |س - ١| + جـ$$

تمارين (٤-٧-٣)

١ جد التكاملات الآتية باستخدام طريقة الكسور الجزئية:

أ) $\int \frac{١}{١ - س^٢} \, ءس$

ب) $\int \frac{س + ٣}{س^٢ + ٣س + ٢} \, ءس$

جـ) $\int \frac{س^٢ + ١}{س^٢ + س} \, ءس$

د) $\int \frac{٤س^٢ - ٥س - ١٥}{س^٣ - ٤س^٢ - ٥س} \, ءس$

هـ) $\int \frac{س^٢ + ٢س^٢ + ٨}{س^٣ - ٤س} \, ءس$

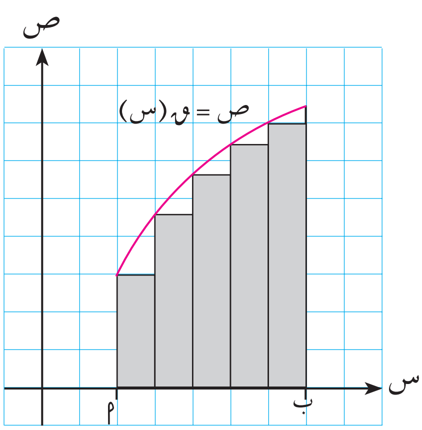
٢ أوجد $\int \frac{س^{\frac{١}{٣}} + ١}{س^{\frac{١}{٣}} - ١} \, ءس$ (إرشاد: ضع ص = $س^{\frac{١}{٣}}$).

٤-٨ تطبيقات التكامل المحدود

للتكامل المحدود تطبيقات متعددة هندسية وفيزيائية واقتصادية وغيرها ؛ وسنكتفي هنا بمناقشة تطبيقين هندسيين هما : مساحات المناطق المستوية وحجوم الأجسام الدورانية .

أولاً: مساحات المناطق المستوية:

تعرفت في سنوات سابقة كيفية حساب مساحات المناطق المستوية المضلعة، مثل : المستطيل، والمثلث، وشبه المنحرف، . . . إلخ؛ ويزودنا التكامل المحدود بطريقة أخرى تفيد في حساب مساحات مناطق مستوية لا تتخذ بالضرورة شكلاً مضلعاً، فقد وجدنا سابقاً عند تقديم مجموع ريمان م($\sigma_{ن}$ ، ق) أنه إذا كان ق(س) اقتراناً قابلاً للتكامل على [أ ، ب]، ويقع منحناه فوق محور السينات في هذه الفترة، فإن مجموع ريمان يمثل بالتقريب مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى ق(س) ومحور السينات والمستقيمين س = أ ، س = ب. لاحظ الشكل (٤-١٠).



الشكل (٤-١٠)

وعندما ن ← ∞ فإن :

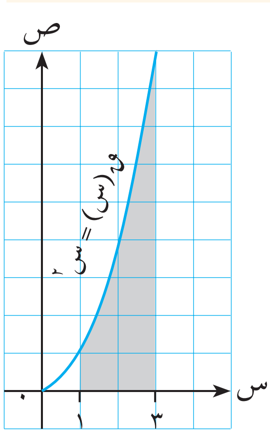
$$\lim_{ن \to \infty} م(\sigma_{ن} ، ق) = \int_{أ}^{ب} ق(س)\, ءس = \text{مساحة تلك المنطقة .}$$

نظرية:

إذا كان ق(س) اقتراناً قابلاً للتكامل على [أ ، ب]، ويقع منحناه فوق محور السينات فإن مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى ق(س) ومحور السينات والمستقيمين س = أ ، س = ب تعطى بالقاعدة:

$$\text{المساحة} = \int_{أ}^{ب} ق(س)\, ءس$$

مثال (١): جد مساحة المنطقة المحدودة بمنحنى الاقتران ق(س) = س^{٢} ومحور السينات والمستقيمين س = ١ ، س = ٣



الشكل (٤-١١)

الحل:

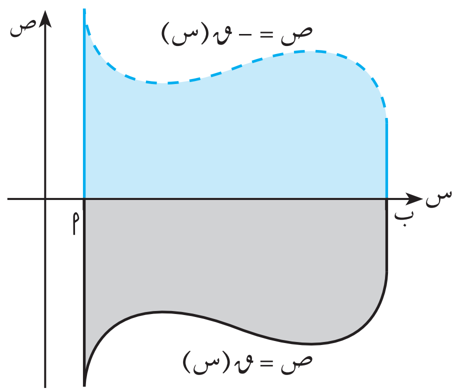
ق(س) = س^{٢} ≥ ٠ لجميع س ∈ [١ ، ٣]. لاحظ الشكل (٤-١١)

$$\therefore \quad \text{المساحة} = \int_{١}^{٣} س^{٢}\, ءس = \left. \frac{س^{٣}}{٣} \right|_{١}^{٣}$$

$$= \frac{٢٦}{٣} \text{ وحدات مربعة}$$

بالاعتماد على النظرية السابقة، فإنه إذا كان الاقتران ق (س) قابلاً للتكامل على الفترة [أ ، ب]، وكان منحنى الاقتران يقع بكامله تحت محور السينات في هذه الفترة، لاحظ الشكل (٤-١٢)؛ فإن مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى ق (س) ومحور السينات والمستقيمين س = أ ، س = ب ، يمكن حسابها كما يأتي:

المساحة = مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى − ق (س) ومحور السينات والمستقيمين س = أ ، س = ب



الشكل (٤-١٢)

$$\therefore \quad \text{المساحة} = \int_{\text{أ}}^{\text{ب}} -\text{ق}(\text{س})\,\text{ءس} = -\int_{\text{أ}}^{\text{ب}} \text{ق}(\text{س})\,\text{ءس} = \left| \int_{\text{أ}}^{\text{ب}} \text{ق}(\text{س})\,\text{ءس} \right|$$

مثال (٢): جد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى الاقتران ق (س) = جاس ومحور السينات في الفترة [π ، ٢π].

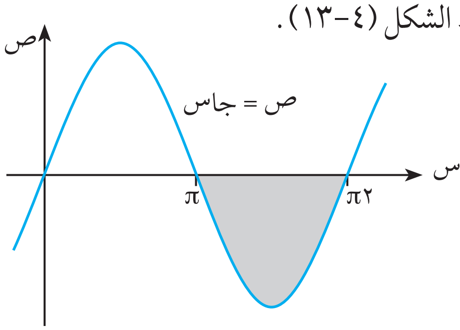
الحل:

ق (س) = جاس ≥ ٠ لجميع س ∈ [π ، ٢π]. لاحظ الشكل (٤-١٣).

$$\therefore \quad \text{المساحة} = -\int_{\pi}^{2\pi} \text{جاس}\,\text{ءس}$$

$$= \text{جتاس} \Big|_{\pi}^{2\pi}$$

= ٢ وحدة مربعة



الشكل (٤-١٣)

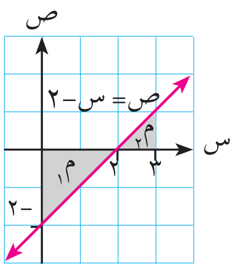
بوجه عام:

إذا كان الاقتران ق (س) قابلاً للتكامل على [أ ، ب]، فإن المساحة المحصورة بين منحنى الاقتران ق (س) ومحور السينات والمستقيمين س = أ ، س = ب، يمكن حسابها بالخطوات التالية:

١ نجد أصفار الاقتران في الفترة [أ ، ب].
٢ نجزئ الفترة [أ ، ب] إلى فترات جزئية بالأصفار التي وجدت في الخطوة رقم (١).
٣ نجد التكامل المحدود للاقتران ق (س) على كل فترة جزئية في الخطوة رقم (٢).
٤ نجمع القيم المطلقة للتكاملات المحدودة السابقة فيكون الناتج هو المساحة المطلوبة.

مثال (٣): أوجد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى الاقتران ق(س) = س − ٢ ومحور السينات والمستقيمين س = ٠ ، س = ٣ .

الحل:



الشكل (٤−١٤)

منحنى ق(س) يقطع محور السينات عندما ق(س) = ٠

أي عندما س − ٢ = ٠ ، أي س = ٢

وحيث إن س = ٢ تنتمي للفترة [٠ ، ٣]

فإنه ينشأ عنها فترتان جزئيتان [٠ ، ٢]، [٢ ، ٣] .

لاحظ الشكل (٤ − ١٤) .

∴ المساحة المطلوبة = مساحة المنطقة $\text{م}_{١}$ + مساحة المنطقة $\text{م}_{٢}$

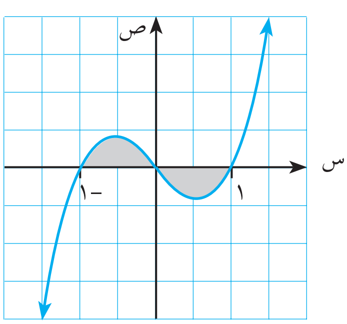
$$= \left| \int_{٠}^{٢} (\text{س} - ٢)\, \text{ءس} \right| + \left| \int_{٢}^{٣} (\text{س} - ٢)\, \text{ءس} \right|$$

$$= \left| \left(\frac{\text{س}^{٢}}{٢} - ٢\text{س}\right) \Big|_{٠}^{٢} \right| + \left| \left(\frac{\text{س}^{٢}}{٢} - ٢\text{س}\right) \Big|_{٢}^{٣} \right|$$

$$= \left| -٢ \right| + \left| \frac{١}{٢} \right| = ٢,٥ \text{ وحدة مربعة}$$

تحقق من صحة الإجابة باستخدام قواعد الهندسة المستوية .

مثال (٤): أوجد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى الاقتران ق(س) = $\text{س}^{٣}$ − س ومحور السينات .



الشكل (٤−١٥)

الحل:

المنحنى يقطع محور السينات عندما ق(س) = ٠

عندما $\text{س}^{٣}$ − س = ٠

∴ س ($\text{س}^{٢}$ − ١) = ٠ ومنها س = ٠ ، ١ ، −١

لاحظ الشكل (٤−١٥) .

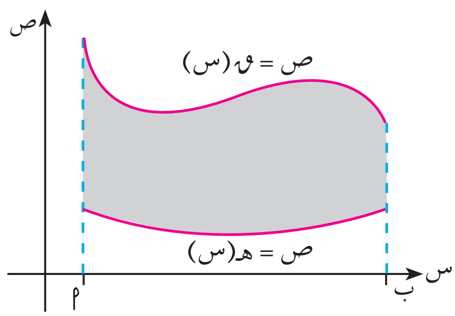
$$\therefore \text{المساحة المطلوبة} = \left| \int_{-١}^{٠} (\text{س}^{٣} - \text{س})\, \text{ءس} \right| + \left| \int_{٠}^{١} (\text{س}^{٣} - \text{س})\, \text{ءس} \right|$$

$$= \left| \left(\frac{\text{س}^{٤}}{٤} - \frac{\text{س}^{٢}}{٢}\right) \Big|_{-١}^{٠} \right| + \left| \left(\frac{\text{س}^{٤}}{٤} - \frac{\text{س}^{٢}}{٢}\right) \Big|_{٠}^{١} \right|$$

$$= \left| \frac{١}{٤} \right| + \left| -\frac{١}{٤} \right| = \frac{١}{٤} + \frac{١}{٤} = \frac{١}{٢} \text{ وحدة مربعة}$$

المساحة بين منحنيين:

يبين الشكل (٤-١٦) المجاور منحنيي الاقترانين ق(س) ، هـ(س) القابلين للتكامل على [أ ، ب] حيث ق(س) ≥ هـ(س) ≥ ٠ لجميع س ∈ [أ ، ب].



الشكل (٤-١٦)

في هذه الحالة تكون مساحة المنطقة بين المنحنيين والمستقيمين س = أ ، س = ب، وهي المنطقة المظللة في الشكل (٤-١٦)، تساوي : المساحة بين منحنى ق(س) ومحور السينات مطروحاً منها المساحة بين منحنى هـ(س) ومحور السينات

$$= \int_{أ}^{ب} ق(س)\, ءس - \int_{أ}^{ب} هـ(س)\, ءس$$

$$= \int_{أ}^{ب} \Big(ق(س) - هـ(س)\Big)\, ءس$$

مثال (٥): أوجد مساحة المنطقة المحصورة بين المنحنيين :

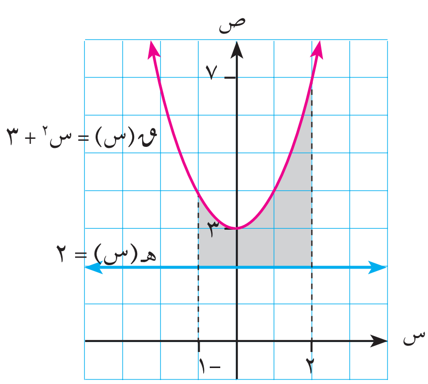
ق(س) = س^٢ + ٣ ، هـ(س) = ٢ ، والمستقيمين : س = -١ ، س = ٢

الحل:

ق(س) = س^٢ + ٣ ≥ هـ(س) = ٢

لجميع قيم س ∈ [-١ ، ٢]

لاحظ الشكل (٤-١٧).



الشكل (٤-١٧)

∴ المساحة $= \int_{-١}^{٢} \Big(ق(س) - هـ(س)\Big)\, ءس$

$$= \int_{-١}^{٢} (س^٢ + ٣ - ٢)\, ءس$$

$$= \left(\frac{س^٣}{٣} + س\right)\Big|_{-١}^{٢} = \frac{١٤}{٣} - \left(\frac{-٤}{٣}\right) = ٦ \text{ وحدات مربعة .}$$

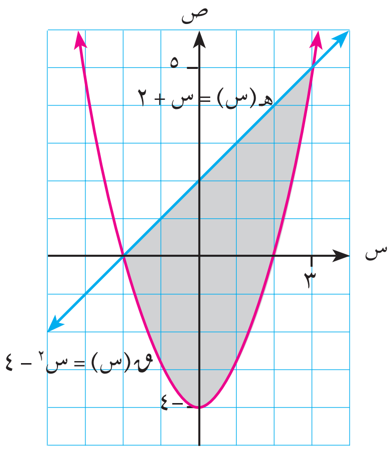
بوجه عام :

نظرية:

إذا كان ق(س)، هـ(س) اقترانين قابلين للتكامل على [أ ، ب]، وكان ق(س) ≥ هـ(س) لجميع قيم س ∈ [أ ، ب]، فإن مساحة المنطقة المحصورة بين المنحنيين والمستقيمين س = أ ، س = ب تساوي

$$\int_{أ}^{ب} \Big(ق(س) - هـ(س)\Big)\, ءس .$$

مثال (٦): أوجد مساحة المنطقة المحصورة بين المنحنيين : $ق(س) = س^{٢} - ٤$ ، $هـ(س) = س + ٢$.



الشكل (٤-١٨)

الحل:

يتقاطع المنحنيان عندما $ق(س) = هـ(س)$

عندما $س^{٢} - ٤ = س + ٢$

$س^{٢} - س - ٦ = ٠$

∴ $(س - ٣)(س + ٢) = ٠$ عندما $س = -٢ ، ٣$

نلاحظ من الشكل (٤-١٨)

أن $هـ(س) \geq ق(س)$ لجميع $س \in [-٢ ، ٣]$

∴ المساحة بين المنحنيين = $\int_{-٢}^{٣} \left((س + ٢) - (س^{٢} - ٤) \right) ء س$

$= \left(\frac{س^{٢}}{٢} + ٦س - \frac{س^{٣}}{٣} \right) \Big|_{-٢}^{٣}$

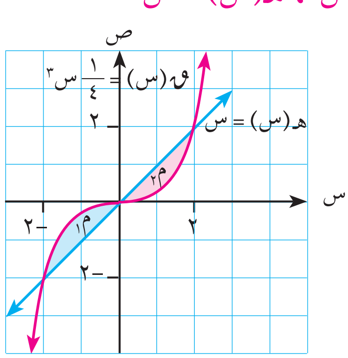
$= \left(\frac{٩}{٢} + ١٨ - ٩ \right) - \left(٢ - ١٢ + \frac{٨}{٣} \right) = \frac{١٢٥}{٦}$ وحدة مربعة .

بوجه عام:

إذا كان الاقترانان $ق(س)$ ، $هـ(س)$ قابلين للتكامل على [أ ، ب] فإن المساحة المحصورة بين منحنيي الاقترانين والمستقيمين س = أ ، س = ب، يمكن حسابها بالخطوات الآتية :

1. نعين نقاط تقاطع المنحنيين ضمن الفترة [أ ، ب].
2. نجزئ الفترة [أ ، ب] إلى فترات جزئية بنقاط التقاطع السابقة .
3. نجد التكامل المحدود لفرق الاقترانين ق ، هـ على كل فترة جزئية .
4. نجمع القيم المطلقة للتكاملات المحدودة السابقة فيكون الناتج هو المساحة المطلوبة .

مثال (٧): أوجد مساحة المنطقة المحصورة بين المنحنيين $ق(س) = \frac{١}{٤} س^{٣}$، $هـ(س) = س$



الشكل (٤-١٩)

الحل:

يتقاطع المنحنيان عندما $ق(س) = هـ(س)$

أي عندما $\frac{١}{٤} س^{٣} = س$

$س^{٣} - ٤س = ٠$

∴ $س(س^{٢} - ٤) = ٠$ ومنها $س = ٠ ، ٢ ، -٢$

لاحظ الشكل (٤-١٩) .

المساحة المطلوبة = مساحة المنطقة ($م_١$) + مساحة المنطقة ($م_٢$)

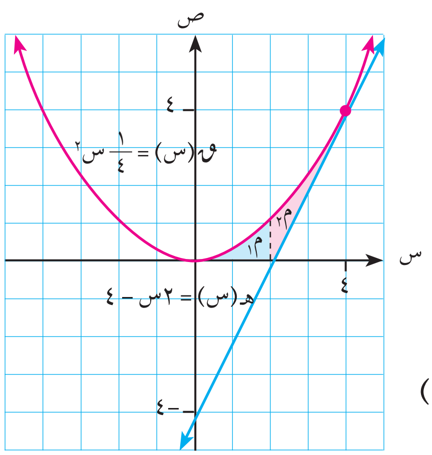
$$= \left| \int_{-٢}^{٠} \left(\frac{١}{٤}\text{س}^٣ - \text{س}\right) \text{ءس} \right| + \left| \int_{٠}^{٢} \left(\frac{١}{٤}\text{س}^٣ - \text{س}\right) \text{ءس} \right|$$

$$= \left| \left[\frac{\text{س}^٤}{١٦} - \frac{\text{س}^٢}{٢} \right]_{-٢}^{٠} \right| + \left| \left[\frac{\text{س}^٤}{١٦} - \frac{\text{س}^٢}{٢} \right]_{٠}^{٢} \right|$$

$$= |١| + |-١| = ٢ \text{ وحدة مربعة}$$

مثال (٨): أوجد مساحة المنطقة المحصورة بين المنحنيين $ق(\text{س}) = \frac{١}{٤}\text{س}^٢$ ، $\text{هـ}(\text{س}) = ٢\text{س} - ٤$ ، ومحور السينات .

الحل:



الشكل (٤-٢٠)

يتقاطع المنحنيان ق(س)، هـ(س) عندما

$ق(\text{س}) = \text{هـ}(\text{س})$ أي عندما $\frac{١}{٤}\text{س}^٢ = ٢\text{س} - ٤$

$\text{س}^٢ - ٨\text{س} + ١٦ = ٠ \quad \therefore \quad (\text{س} - ٤)^٢ = ٠$

ومنها س = ٤

أي أن المستقيم يقطع المنحنى في نقطة واحدة

المنطقة المطلوبة هي المنطقة المظللة، في الشكل (٤-٢٠)

ويمكن تجزئتها إلى منطقتين مساحتيهما $م_١$ ، $م_٢$.

المساحة المطلوبة = مساحة $م_١$ + مساحة $م_٢$

$$= \left| \int_{٠}^{٢} \frac{١}{٤}\text{س}^٢ \text{ءس} \right| + \left| \int_{٢}^{٤} \left(\frac{١}{٤}\text{س}^٢ - (٢\text{س} - ٤)\right) \text{ءس} \right|$$

$$= \left| \left[\frac{\text{س}^٣}{١٢} \right]_{٠}^{٢} \right| + \left| \left[\left(\frac{\text{س}^٣}{١٢} - \text{س}^٢ + ٤\text{س}\right) \right]_{٢}^{٤} \right|$$

$$= \frac{٨}{١٢} + \left| \left[\left(\frac{٦٤}{١٢} - ١٦ + ١٦\right) - \left(\frac{٨}{٣} - ٤ + ٨\right) \right] \right|$$

$$= \frac{٢}{٣} + \left| \left[\left(\frac{١٦}{٣}\right) - \left(\frac{٨}{٣} + ٤\right) \right] \right| = ٢ \text{ وحدة مربعة}$$

لاحظ أنه يمكن حساب المساحة المطلوبة بطريقة أخرى هكذا :

المساحة المطلوبة $= \int_{٠}^{٤} \frac{١}{٤}\text{س}^٢ \text{ءس} - \int_{٢}^{٤} (٢\text{س} - ٤) \text{ءس} = ٢$ وحدة مربعة (لماذا؟)

تمارين (٤-٨-١)

١ أوجد مساحة المنطقة المحدودة بمنحنى الاقتران ق(س)، ومحور السينات، والمستقيمين المعينين في كل حالة مما يلي:

أ) ق(س) = ٢س + ٤ ، س = ٠ ، س = ٢

ب) ق(س) = س^٢ − ٢س − ٣ ، س = −١ ، س = ٣

جـ) ق(س) = $\sqrt[٣]{\text{س}}$ ، س = −١ ، س = ٨

د) ق(س) = هـ^{٢س} ، س = $\frac{١}{٢}$ ، س = ١

٢ أوجد مساحة المنطقة المحدودة بمنحنى الاقتران ق(س) = $\sqrt{\text{س} - ٤}$ ، ومحور السينات، والمستقيم س = ٨ .

٣ أوجد مساحة المنطقة المحصورة بين المنحنيين ص = س^٢ ، ص = ٤س − س^٢

٤ أوجد مساحة المنطقة الواقعة في الربع الأول والمحدودة بالمنحنى ص = $\sqrt{\text{س}}$ ، ومحور السينات، والمستقيم ص = س − ٢ .

٥ إذا كان ق(س) = ٢س − س^٢ ، هـ(س) = ٢ − س، فأوجد مساحة كلٍّ من المناطق التالية:

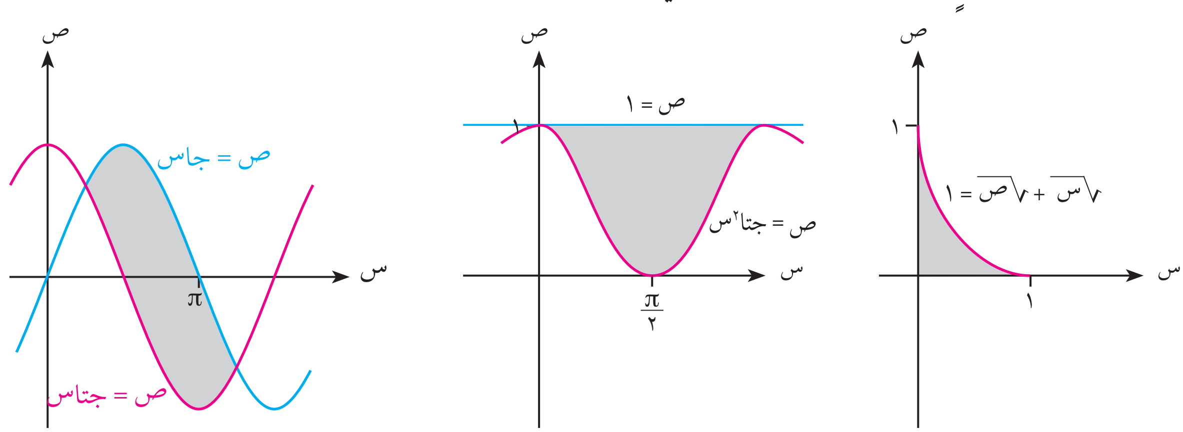
أ) المنطقة المحصورة بين منحنى ق ، ومنحنى هـ.

ب) المنطقة المحصورة بين منحنى ق ومنحنى هـ ومحور السينات.

جـ) المنطقة المحصورة بين منحنى ق ومنحنى هـ ومحور الصادات.

٦ أوجد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى الاقتران ق(س) = $\frac{٨}{\text{س} + ١}$ ، ومنحنى الاقتران هـ(س) = س − ١ ، ومحور السينات والمستقيم س = ٥ .

٧ أوجد مساحة كلٍّ من المناطق المظللة فيما يلي:



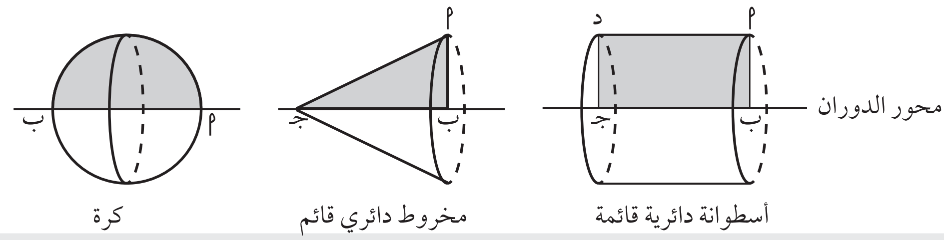
٨ استخدم التكامل لحساب مساحة المثلث الذي رؤوسه أ(٥ ، ١)، ب(١ ، ٣)، جـ(−١ ، −٢).

٩ جد قيمة جـ التي تجعل المستقيم ص = جـ يقسم مساحة المنطقة المحصورة بين المنحنى ص = س^٢، والمستقيم ص = ٤ إلى قسمين متساويين.

١٠ إذا كانت مساحة المنطقة المحدودة بالمنحنيين ص = $\sqrt{\text{أ س}}$ ، ص = $\frac{\text{س}^٢}{\text{أ}}$ ، أ > ٠ تساوي ١٢ وحدة مربعة، فما قيمة أ ؟

ثانياً: حجوم الأجسام الدورانية:

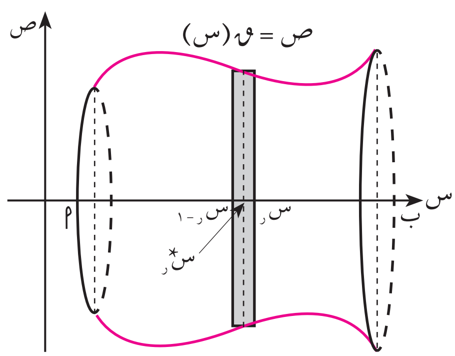
إذا دارت منطقة مستوية واقعة بكاملها في جهة واحدة من مستقيم ثابت في مستواها دورة كاملة حول هذا المستقيم، فإنها تولد جسماً في الفراغ يسمى جسماً دورانياً، ويسمى المستقيم الثابت محور الدوران. لاحظ الأمثلة التوضيحية التالية في شكل (٤ - ٢١).



الشكل : (٤-٢١)

وقد تعرفت في دراستك السابقة كيفية حساب حجوم بعض هذه المجسمات، ويزودنا التكامل المحدود بطريقة أخرى تفيد في حساب حجوم الأجسام الدورانية بوجه عام.

يمثل الشكل(٤-٢٢) منحنى الاقتران ق(س) القابل للتكامل على [أ ، ب] والواقع فوق محور السينات على هذه الفترة. فإذا تم تدوير المنطقة المحصورة بين منحنى ق(س)، ومحور السينات، والمستقيمين س = أ ، س = ب، دورة كاملة حول محور السينات، فما هو حجم الجسم الدوراني الناتج؟



الشكل (٤-٢٢)

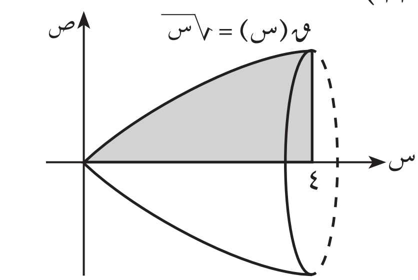
لتكن $\sigma_{ن}$ تجزئة نونية منتظمة للفترة [أ ، ب]، ولتكن [س$_{ر-١}$، س$_{ر}$] هي الفترة الجزئية الرائية الناتجة عن $\sigma_{ن}$.
عند تدوير المنطقة المستطيلة (الشريحة الرأسية) المقامة على [س$_{ر-١}$، س$_{ر}$] دورة كاملة حول محور السينات، تنتج أسطوانة دائرية قائمة حجمها = π ق^{٢}(س$^{*}_{ر}$) × (س$_{ر}$ − س$_{ر-١}$)، ويكون إذن حجم الجسم الدوراني الناتج عن تدوير المنطقة المحدودة بالمنحنى مساوياً بالتقريب $\sum_{ر=١}^{ن}$ π ق^{٢}(س$^{*}_{ر}$) × (س$_{ر}$ − س$_{ر-١}$)، وعندما ن ⟵ ∞ فإن حجم الجسم الدوراني= $\int_{أ}^{ب}$ π ق^{٢}(س) ءس

نظرية:

إذا كان ق(س) اقتراناً قابلاً للتكامل على[أ ،ب]، ق(س) $\geq$ ٠ لجميع قيم س $\in$ [أ ، ب]، فإن حجم الجسم الدوراني الناتج عن دوران المنطقة المحدودة بمنحنى ق(س)، ومحور السينات، والمستقيمين س = أ ، س = ب، دورة كاملة حول محور السينات، هو : ح = π $\int_{أ}^{ب}$ ق^{٢}(س) ءس

مثال (٩): أوجد حجم الجسم الناتج عن دوران المنطقة المحصورة بين منحنى الاقتران $ق(س) = \sqrt{س}$ ، ومحور السينات، والمستقيمين س = ٠ ، س = ٤ .

الحل: $ق(س) \geq ٠$ لجميع س $\in [٠ ، ٤]$ ، لاحظ الشكل (٤-٢٣)



الشكل (٤-٢٣)

$$\text{الحجم الدوراني } (ح) = \pi \int_{٠}^{٤} ق^٢(س)\, ءس$$

$$= \pi \int_{٠}^{٤} \left(\sqrt{س}\right)^٢ ءس$$

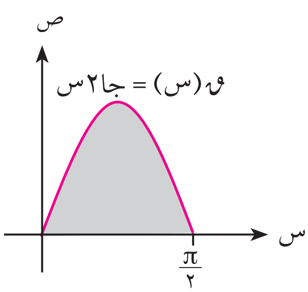
$$= \pi \int_{٠}^{٤} س\, ءس$$

$$= \pi \times \left. \frac{س^٢}{٢} \right|_{٠}^{٤} = ٨\pi \text{ وحدة مكعبة}$$

مثال (١٠): أوجد حجم الجسم الناتج عن دوران المنطقة المحدودة بمنحنى الاقتران $ق(س) = جا٢س$ ، ومحور السينات، والمستقيمين س = ٠ ، س = $\frac{\pi}{٢}$ ، دورة كاملة حول محور السينات .

الحل: $ق(س) = جا٢س \geq ٠$ لجميع س $\in [٠ ، \frac{\pi}{٢}]$

لاحظ الشكل (٤-٢٤)



الشكل (٤-٢٤)

$$\text{حجم الجسم الدوراني } (ح) = \pi \int_{٠}^{\frac{\pi}{٢}} ق^٢(س)\, ءس$$

$$= \pi \int_{٠}^{\frac{\pi}{٢}} جا^٢ ٢س\, ءس$$

$$= \pi \int_{٠}^{\frac{\pi}{٢}} \left(\frac{١}{٢} - \frac{١}{٢} جتا٤س\right) ءس$$

$$= \pi \left. \left(\frac{١}{٢} س - \frac{١}{٨} جا ٤س\right) \right|_{٠}^{\frac{\pi}{٢}} = \frac{\pi^٢}{٤} \text{ وحدة مكعبة}$$

مثال (١١): استخدم التكامل المحدود لإثبات أن حجم الكرة التي نصف قطرها نق هو $\frac{٤}{٣} \pi$ نق^٣ .

الحل: تنتج الكرة عن دوران منطقة نصف دائرية دورة كاملة حول قطرها .

يمثل الشكل (٤-٢٥) نصف دائرة في وضع قياسي ونصف قطرها نق

معادلة الدائرة : س^٢ + ص^٢ = نق^٢

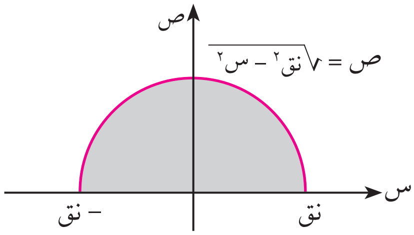
$\therefore$ $\text{ص} = \sqrt{\text{نق}^{٢} - \text{س}^{٢}}$

حجم الكرة = حجم الجسم الدوراني

$= \pi \int_{-\text{نق}}^{\text{نق}} \text{ق}^{٢}(\text{س})\, \text{ءس}$

$= \pi \int_{-\text{نق}}^{\text{نق}} (\text{نق}^{٢} - \text{س}^{٢})\, \text{ءس}$

$= \pi \left((\text{نق}^{٢}\, \text{س} - \frac{\text{س}^{٣}}{٣}) \Big|_{-\text{نق}}^{\text{نق}} \right) = \frac{٤}{٣} \pi\, \text{نق}^{٣}$ وحدة مكعبة .



الشكل (٤–٢٥)

حجم الجسم الدوراني الناتج عن دوران منطقة محصورة بين منحنيي اقترانين:

نظرية:

إذا كان ق ، هـ اقترانين قابلين للتكامل على [أ ، ب] بحيث ق(س) ≥ هـ(س) ≥ ٠ لجميع س ∈ [أ ، ب] فإن حجم الجسم الناتج عن دوران المنطقة المحصورة بين المنحنيين ، والمستقيمين س = أ ، س = ب، دورة كاملة حول محور السينات ، يساوي $\pi \int_{\text{أ}}^{\text{ب}} \left(\text{ق}^{٢}(\text{س}) - \text{هـ}^{٢}(\text{س}) \right) \text{ءس}$

مثال (١٢): إذا دارت المنطقة المحصورة بين المنحنيين ق(س) = ٢س − س^٢ ، هـ(س) = س^٢ ، دورة كاملة حول محور السينات ، فما حجم الجسم الدوراني الناتج؟

الحل:

نجد نقط تقاطع المنحنيين :

ق(س) = هـ(س) عندما $٢\text{س} - \text{س}^{٢} = \text{س}^{٢}$

$٢\text{س}^{٢} - ٢\text{س} = ٠$ ومنها س = ٠ ، ١

لاحظ الشكل (٤–٢٦)

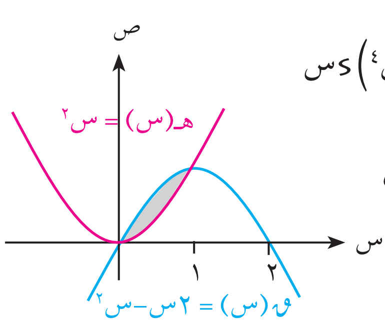
الحجم الدوراني (ح) = $\pi \int_{٠}^{١} \left(\text{ق}^{٢}(\text{س}) - \text{هـ}^{٢}(\text{س}) \right) \text{ءس}$

$= \pi \int_{٠}^{١} \left((٢\text{س} - \text{س}^{٢})^{٢} - \text{س}^{٤} \right) \text{ءس}$

$= \pi \int_{٠}^{١} (٤\text{س}^{٢} - ٤\text{س}^{٣})\, \text{ءس}$

$= \pi \times \left(\frac{٤\text{س}^{٣}}{٣} - \text{س}^{٤} \Big|_{٠}^{١} \right)$

$= \frac{\pi}{٣}$ وحدة مكعبة



الشكل (٤–٢٦)

تمارين (٤-٨-٢)

١ أوجد حجم الجسم المتولد عن دوران المنطقة المحدودة بالمستقيم ص = ٢س، ومحور السينات والمستقيمين س = ٠ ، س = ٣، دورة كاملة حول محور السينات.

٢ أوجد حجم الجسم الناتج عن دوران المنطقة المحدودة بالمستقيمين س = ٦ ، ص = ٤ ، ومحوري السينات والصادات، دورة كاملة حول محور السينات.

٣ أوجد حجم الجسم الناتج عن دوران المنطقة المحصورة بين منحنى الاقتران ق(س) = جتا٢س، ومحوري السينات والصادات في الفترة [٠ ، $\frac{\pi}{٤}$]، دورة كاملة حول محور السينات؟

٤ إذا دارت المنطقة المحصورة بين المستقيم ص = ٤س، والقطع المكافئ ص = ٤س^{٢}، دورة كاملة حول محور السينات، فما حجم الجسم الناتج؟

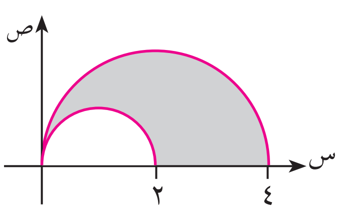
٥ جد حجم الجسم الناتج عن دوران المنطقة المحصورة بين محور الصادات، والمستقيم ص = ١، ومنحنى الاقتران ص = ظاس، دورة كاملة حول محور السينات.

٦ إذا دارت المنطقة الواقعة في الربعين الأول والثاني والمحصورة بين المنحنيين ص = |س| ، س^{٢} + ص^{٢} = ٢ ، دورة كاملة حول محور السينات، فما هو حجم الجسم الناتج؟

٧ أوجد حجم الجسم الناتج عن دوران المنطقة المثلثية أ ب جـ حيث أ(٠ ، ٢)، ب (١ ، ١) ، جـ(٢ ، ٢) دورة كاملة حول محور السينات.

٨ إذا كان حجم الجسم الناتج عن دوران المنطقة المحصورة بين منحنيي ق(س) = $\sqrt{\text{أ س}}$ ، هـ(س) = $\frac{\text{س}^{٢}}{\text{أ}}$ ، أ ≠ ٠، دورة كاملة حول محور السينات، يساوي $\frac{١٢}{٥}$ π وحدة مكعبة، فما قيمة الثابت أ؟

٩ يمثل الشكل المجاور نصفي دائرتين متماستين في نقطة الأصل.
فاحسب حجم الجسم الناتج عن دوران المنطقة المظللة إذا دار نصفا الدائرتين دورة كاملة حول محور السينات.



١٠ بين أن حجم الجسم الناتج عن دوران المنطقة المحدودة بالقطع الناقص $\frac{\text{س}^{٢}}{\text{أ}^{٢}} + \frac{\text{ص}^{٢}}{\text{ب}^{٢}}$ = ١ الواقعة فوق محور السينات دورة كاملة حول محور السينات يساوي $\frac{٤}{٣}$ π أ ب^{٢}.

تمارين عامة

١ ضع دائرة حول رمز الإجابة الصحيحة في كلٍّ مما يلي:

١ إذا كانت [س$_{ر-١}$ ، س$_{ر}$] هي الفترة الجزئية الرائية الناتجة عن التجزئة $\sigma_{ن}$ للفترة [−٢ ، ٥]، فإن
$\sum_{ر=١}^{ن}$ (س$_{ر}$ − س$_{ر-١}$) يساوي:

أ −٧ ب ٣ ج ٧ د −٣

٢ ليكن ق(س) = س^{٢} ، س ∈ [−٢ ، ١]. إذا كانت $\sigma_{ن}$ تجزئة نونية منتظمة للفترة [−٢ ، ١]، س$^{*}_{ر}$ = س$_{ر-١}$ ،
فإن م($\sigma_{٣}$ ، ق) يساوي:

أ ١ ب ٥ ج ٣ د ٤

٣ إذا كان ق(س) = { ٣ ، ٠ ≤ س < ٤ ؛ س − ١ ، ٤ ≤ س ≤ ٨ } وكانت $\sigma_{٤}$ تجزئة رباعية منتظمة،
فأوجد م($\sigma_{٤}$ ، ق) متخذاً س$^{*}_{ر}$ = س$_{ر}$

أ ٢٨ ب ٣٢ ج ١٨ د ٣٦

٤ إذا كان ق: [١ ، ٣] ← ح وكانت $\sigma_{ن}$ تجزئة نونية منتظمة للفترة [١ ، ٣]،
وكان م($\sigma_{ن}$ ، ق) = −٢ − $\frac{٥ - ٧ن}{٢ن}$ ، فإن $\int_{١}^{٣}$ ق(س) ءس يساوي:

أ −٢ ب −٥,٤ ج ٥,١ د −٥,٥

٥ $\int_{-٢}^{٢}$ |س| ءس يساوي:

أ صفر ب ٤ ج ١ د ٢

٦ إذا كان ق(س) ≥ ٥ لجميع س ∈ [١ ، ٣]، فإن أكبر قيمة للمقدار $\int_{١}^{٣}$ (٢ق(س) + ١) ءس تساوي:

أ ١٠ ب ١١ ج ٢٢ د ١٣

٧ التكامل $\int_{١}^{٢} \frac{٢س - ٥}{س^{٢} + ١}$ ءس

أ موجب ب سالب ج صفر د لا يمكن تحديده

٨ إذا كان $\int_{-\pi}^{\pi}$ جا^{٢}س ءس = أ ، $\int_{-\pi}^{\pi}$ جتا^{٢}س ءس = ب ، فإن المقدار (أ + ب) يساوي:

أ ١ ب صفر ج −٢π د ٢π

٩ إذا كان $\int_{١}^{٥} ٢ق(س)\,دس = ١٠$ ، $\int_{١}^{٧} ق(س)\,دس = ١٢$ ، فإن $\int_{٧}^{٥} ق(س)\,دس$ يساوي

أ) ٢ ب) ٢٢ ج) −٧ د) ٧

١٠ الاقتران المكامل ت(س) للاقتران ق(س) = $٤س^{٣} + ٢س$ على الفترة [١ ، ٣] هو :

أ) $٤س^{٣} + ٢س$ ب) $١٢س^{٢} + ٢$ ج) $س^{٤} + س^{٢} + ٢$ د) $س^{٤} + س^{٢} - ٢$

١١ إذا كان $ت(س) = \int_{س}^{٤} (٢ - ٢ص)\,دص$ ، فإن تَ(س) يساوي :

أ) $٢س - س^{٢}$ ب) صفر ج) $٢س - ٢$ د) $٢ - ٢س$

١٢ إذا كان $\int_{٢}^{٣} ق(س)\,دس = ٨$ ، فإن $\int_{-٣}^{-٢} ق(-س)\,دس$ يساوي :

أ) ١ ب) ٨ ج) ٤ د) −٤

١٣ إذا كان ق(١) = ٥ ، ق(٠) = ١ ، فإن $\int_{٠}^{١} س\,قَ(س^{٢})\,دس$ يساوي :

أ) ٢ ب) ٤ ج) ١ د) −٢

١٤ إذا كان $ق(س) = هـ^{٣س} - لو_{هـ}(٢س + ٢)$ ، فإن قَ(٠) يساوي :

أ) ١ ب) ٢ ج) ٣ د) ٠,٥

١٥ إذا كان $\int_{٣}^{٧} ق(س)\,دس = \int_{٨}^{جـ} ق(س - ٥)\,دس$ فإن جـ تساوي :

أ) ٣ ب) ٤ ج) ١٢ د) −٢

١٦ إذا كان $\frac{دص}{دس} = ص\,جتاس$ فإن :

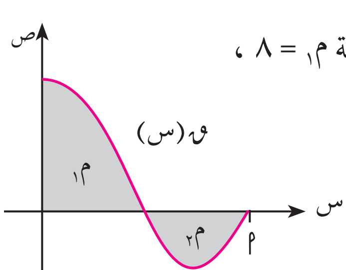
أ) $ص = أ\,هـ^{-جاس} + جـ$ ب) $ص = أ\,هـ^{جتاس} + جـ$ ج) $ص = أ\,هـ^{-جتاس} + جـ$ د) $ص = أ\,هـ^{جاس} + جـ$

١٧ $\int_{١}^{٢} \frac{س^{٢} + ١}{س^{٣} + ٣س}\,دس$ يساوي :

أ) ٣(لو٧ − لو٢) ب) $\frac{١}{٣}$(لو٧ − لو٢) ج) $\frac{١}{٣}$لو٧ − لو٢ د) لو٢ − لو٧

١٨ يمثل الشكل المجاور منحنى ق(س) على الفترة [٠ ، أ]، فإذا كانت مساحة $م_{١} = ٨$ ، مساحة $م_{٢} = ٦$ وحدات مربعة، فإن : $\int_{٠}^{أ} ق(س)\,دس$ يساوي :

أ) −١٤ ب) −٢ ج) ١٤ د) ٢



١٩ حجم المخروط الدائري القائم الناتج عن دوران المنطقة المحصورة بين منحنى الاقتران ق(س) = $\frac{١}{٢}$ س ، ومحور السينات ، والمستقيمين س = ٠ ، س = ٣ ، دورة كاملة حول محور السينات ، يساوي :

أ) $\frac{٩}{٨}\pi$ ب) $\frac{٩}{٤}\pi$ ج) $\frac{٣}{٢}\pi$ د) $\frac{٩}{٤}$

٢ إذا كان ق(س) = ٩ −٢س ، س ∈ [−٢ ، ٣] ، فأوجد باستخدام تعريف التكامل المحدود $\int_{-٢}^{٣}$ ق(س) ءس .

٣ أوجد قيمة ص بدلالة س في كل من الحالات الآتية :

أ) $\frac{ءص}{ءس}$ = جا^٢^٣ص جتا ٥س

ب) $\frac{١}{٢}\sqrt{ص}\ \frac{ءص}{ءس}$ + ٦س − ١ = ٠

ج) $\frac{ءص}{ءس}$ = ٨س + قتا^{٢}س ، حيث ص = −٧ عند س = $\frac{\pi}{٢}$

٤ إذا كانت ص = هـ^{كس} تحقق المعادلة ص″ + ٢ص′ − ٨ص = ٠ ، فأوجد قيمة ك .

٥ ابتدأ جسم الحركة من نقطة الأصل في خط مستقيم وبسرعة ابتدائية ع. ، وسار بتسارع ثابت جـ ؛ فإذا كانت سرعة الجسم بعد ن من الثواني هي ع ، والمسافة المقطوعة هي ف ، فاثبت صحة القوانين الآتية :

أ) ع = ع. + جـ ن

ب) ف = ع.ن + $\frac{١}{٢}$ جـ ن^{٢}

ج) ع^{٢} = ع.^{٢} + ٢جـ ف (إرشاد: استخدم القاعدة: $\frac{ءع}{ءن} = \frac{ءع}{ءف} \cdot \frac{ءف}{ءن}$)

٦ إذا كان ميل المماس لمنحنى الاقتران ق(س) عند النقطة (١ ، ٥) يساوي ٤ ، وكانت ق″(س) = ١٢س − ٨ ، فأوجد قاعدة ق(س) .

٧ يتحرك جسيم بتسارع يعطى بالعلاقة ت = ١٢ن − ٢ م/ ث^{٢} . إذا كانت السرعة الابتدائية ٤م/ ث والمسافة المقطوعة بعد ٣ ثوان هي ٢٨ م ، فأوجد المسافة المقطوعة بعد ٥ ثوان من بدء الحركة .

٨ ليكن ق(س) = $\begin{cases} ٣س^{٢} + ٥ & ، \quad ٠ \le س < ٣ \\ ٢س + ١٠ & ، \quad ٣ \le س \le ٧ \end{cases}$

أولاً : أوجد الاقتران المكامل ت(س) للاقتران ق(س) على مجاله .

ثانياً : أوجد :

أ) $\lim_{س \to ٣} \int_{٠}^{س}$ ق(ص) ءص

ب) قيمة كل من ت(٠) ، ت(٤) .

ج) $\frac{ء}{ءس}\int_{٠}^{س}$ ق(ص) ءص

د) $\frac{ء}{ءس}\int_{٠}^{٧}$ ق(ص) ءص

٩ إذا كان ق(س) قابلاً للتكامل على [١ ، ٦]، وكان اقترانه المكامل معرفاً كما يلي:

$$\text{ت(س)} = \begin{cases} \text{أ س} - ٣ & ، \quad ١ \leq \text{س} \leq ٢ \\ \text{ب س}^{٢} - ٢\text{س} + ١ & ، \quad ٢ \leq \text{س} \leq ٦ \end{cases}$$

، فما قيمة كلٍّ من الثابتين أ ، ب؟

١٠ جد قيمة كلٍّ من التكاملات الآتية:

أ) $\int_{.}^{٣} \text{س} \sqrt{\text{س} + ١} \; \text{ؤس}$

ب) $\int ٢\text{س جا}^{٣}\text{س}^{٢} \text{جتاس}^{٢} \; \text{ؤس}$

جـ) $\int \text{جتا}^{٢} (\text{جتاس})\text{جاس} \; \text{ؤس}$

د) $\int_{\frac{\pi}{٦}}^{\frac{\pi}{٣}} \frac{\text{جاس}}{\text{قتا}^{٢}\text{س}} \; \text{ؤس}$

هـ) $\int \text{قا}^{٣}\text{س ظاس} \; \text{ؤس}$

و) $\int_{١}^{\text{هـ}} \frac{١}{\text{س}(٣ + \text{لو}_{\text{هـ}}\text{س})} \; \text{ؤس}$

ز) $\int \text{هـ}^{\text{س}} \text{جا س} \; \text{ؤس}$

ح) $\int \frac{\text{س}}{\text{س}^{٢} - ٥\text{س} + ٦} \; \text{ؤس}$

ط) $\int \frac{٣\text{س}^{٢} - ٥\text{س} + ١}{\text{س}(\text{س} - ١)} \; \text{ؤس}$

ي) $\int \sqrt{١ - \text{هـ}^{\text{س}}} \; \text{ؤس}$ (إرشاد: ضع ص = $\sqrt{١ - \text{هـ}^{\text{س}}}$).

ك) $\int \frac{١}{١ + \text{هـ}^{\text{س}}} \; \text{ؤس}$ (إرشاد: اضرب كلاً من البسط والمقام في هـ$^{-\text{س}}$).

١١ أوجد مساحة المنطقة المحصورة بين محور الصادات والمنحنيات ص = س^{٣} ، ص = ١ ، ص = ٨ .

١٢ أوجد المساحة المحصورة بين منحنى الاقتران ص = س^{٣} + ٣، ومحور الصادات، ومماس الاقتران عند النقطة (١ ، ٤).

١٣ أوجد مساحة المنطقة المحدودة بالمنحنى ق(س) = س^{٣} − ٤س، والمستقيمين س = −١ ، س = ٣، ومحور السينات.

١٤ أوجد المساحة المحصورة بين المنحنيين ٤ص = س^{٢} + ٨ ، س + ص = ٥ ، ومحور السينات.

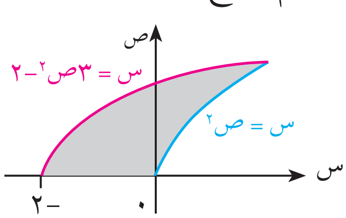
١٥ أوجد مساحة المنطقة المحدودة بالمنحنى ق(س) = |٢س − ١|، ومحور السينات، والمستقيمين س = −١ ، س = ٢ .

١٦ إذا كان ق(س) = هـ$^{\text{س}}$ ، م(س) = هـ$^{-\text{س}}$ فأوجد:

أ) المساحة الواقعة في الربع الأول، والمحصورة بين منحنى ق(س)، ومنحنى م(س)، والمستقيم س = ٢ .

ب) إذا دارت المنطقة السابقة دورة كاملة حول محور السينات فما حجم الجسم الناتج؟

١٧ أوجد حجم الجسم الناتج عن دوران المنطقة المظللة في الشكل المرفق دورة كاملة حول محور السينات.



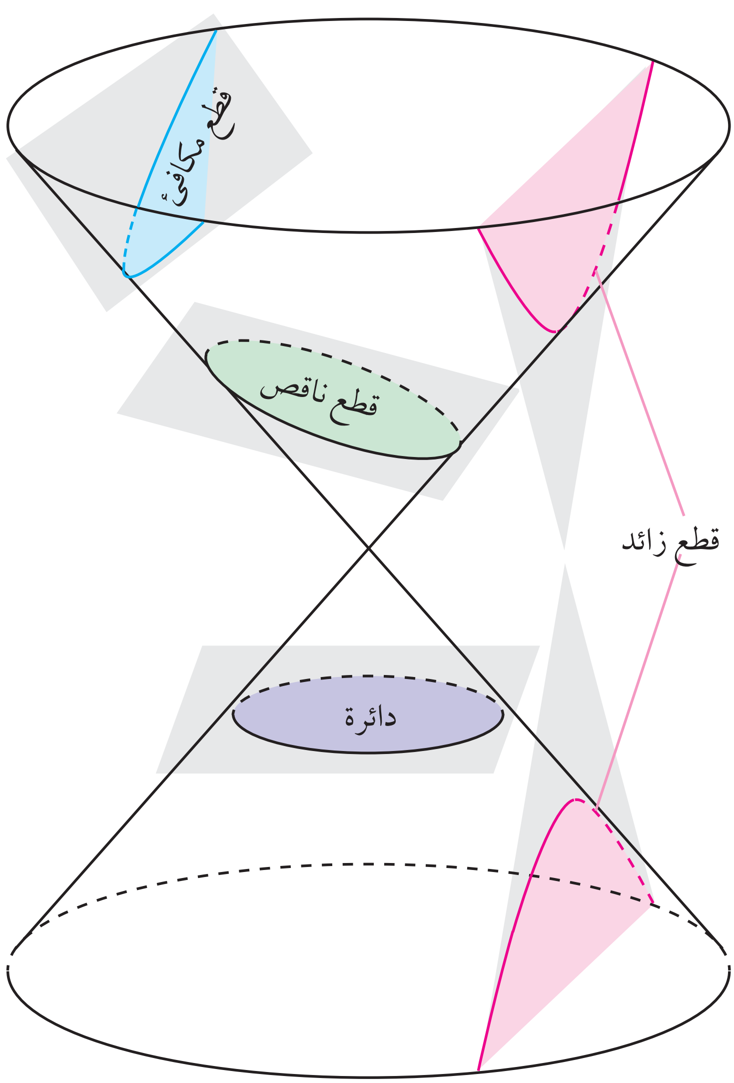
٢٠ أوجد حجم الجسم الناتج عن دوران المنطقة المحصورة بين منحنى الاقتران ص = هـ$^{٢\text{س}}$ ، ومحور الصادات، والمستقيم ص = هـ^{٢} دورة كاملة حول محور السينات.

الـــوحـــدة

٥

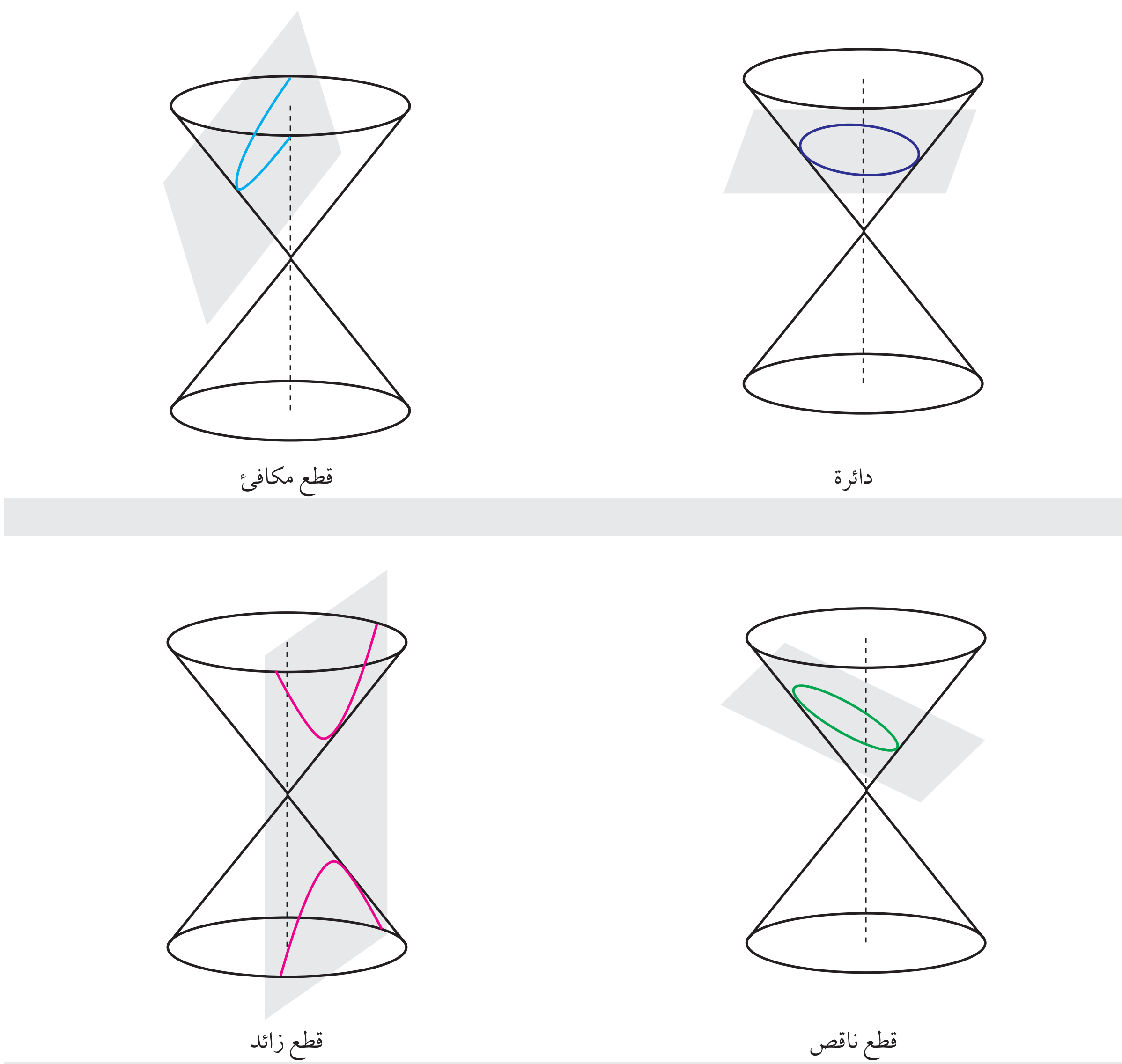
القطـوع المخروطيـة

(Conic Sections)



٥ القطوع المخروطية (Conic Sections)

تعرفت سابقاً بعض الأشكال الهندسية المستوية، ومنها الدائرة والقطع المكافئ، وهذان الشكلان ينتميان إلى مجموعة من الأشكال الهندسية تسمى القطوع المخروطية التي يمكن الحصول عليها من قَطْع مخروط دائري قائم مزدوج بمستوٍ في أوضاع مختلفة، كما هو مبين في الشكل (٥-١):



الشكل (٥-١)

وللقطوع المخروطية أهمية كبيرة في دراسات فيزيائية وفلكية وعلمية مختلفة، مثل المرايا والعدسات، وحركة الكواكب وحركة الإلكترونات في الذرة؛ وتعود الدراسات الأولى لهذه الأشكال إلى علماء الإغريق والعرب والمسلمين، وسنستخدم مبادئ الهندسة التحليلية والتفاضل في دراسة القطوع المخروطية التالية: القطع المكافئ، والقطع الناقص، والقطع الزائد.

٥-١ القطع المكافئ (The Parabola)

القطع المكافئ هو مجموعة جميع النقاط الواقعة في مستوٍ بحيث تبعد كل منها، عن نقطة ثابتة فيه، بعداً مساوياً لبعدها عن مستقيم معلوم فيه .

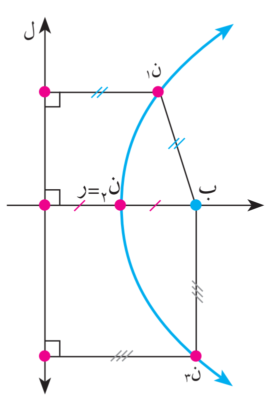
وبعبارة أخرى :

تعريف:

القطع المكافئ هو المحل الهندسي لنقطة تتحرك في مستوٍ بحيث يكون بعدها عن نقطة ثابتة في المستوى مساوياً لبعدها عن مستقيم ثابت فيه .

ففي الشكل (٥-٢)، ب نقطة ثابتة، ل مستقيم معلوم، في المستوي، والنقطة ن تتحرك في المستوي بحيث يكون بعدها عن ب مساوياً بعدها عن ل، ن$_{١}$، ن$_{٢}$، ن$_{٣}$ ثلاثة أوضاع مختلفة للنقطة ن، يسمى المنحنى الذي يجمع النقاط الثلاثة ن$_{١}$، ن$_{٢}$، ن$_{٣}$ وأمثالها قطعاً مكافئاً، كما نسمي :

- النقطة الثابتة (ب) البؤرة .
- المستقيم الثابت (ل) الدليل .
- النقطة (ر) الواقعة في منتصف المسافة، بين البؤرة والدليل، الرأس .
- الخط المستقيم، المار بالبؤرة والرأس، محور التماثل .



الشكل (٥-٢)

معادلة القطع المكافئ: سوف ندرس معادلة القطع المكافئ في الحالتين التاليتين :

الحالة الأولى (القطع المكافئ في وضع قياسي)، حيث الرأس (٠، ٠) والبؤرة واقعان على أحد المحورين الإحداثيين .

الحالة الثانية (القطع المكافئ في وضع انسحاب)، حيث الرأس والبؤرة واقعان على مستقيم موازٍ لأحد المحورين الإحداثيين .

الحالة الأولى (القطع المكافئ في وضع قياسي):

في هذه الحالة، توجد أربعة أوضاع يمكن أن يتخذها القطع المكافئ وفقاً للاتجاهات الأربعة الممكنة لفتحة القطع، ويمكن توضيحها كما يلي :

الوضع الأول (القطع مفتوح إلى أعلى):

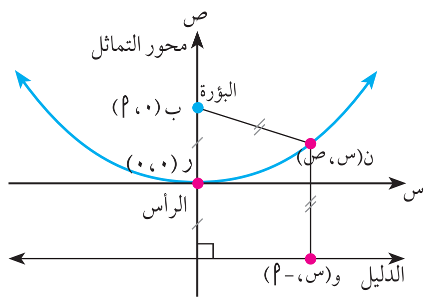
الرأس (٠ ، ٠)، والبؤرة على المحور الصادي الموجب، أي أن البؤرة ب (٠ ، م)، م > ٠ ، انظر شكل (٥–٣). في هذا الوضع، إذا كانت ن (س ، ص) نقطة ما على القطع المكافئ، فإن: ن و = ن ب

$$\therefore \text{ص} + \text{م} = \sqrt{\text{س}^{٢} + (\text{ص} - \text{م})^{٢}}$$

$$\text{ص}^{٢} + ٢\,\text{م ص} + \text{م}^{٢} = \text{س}^{٢} + \text{ص}^{٢} - ٢\,\text{م ص} + \text{م}^{٢}$$

ومنها:

$$\text{س}^{٢} = ٤\,\text{م ص}$$



الشكل (٥–٣)

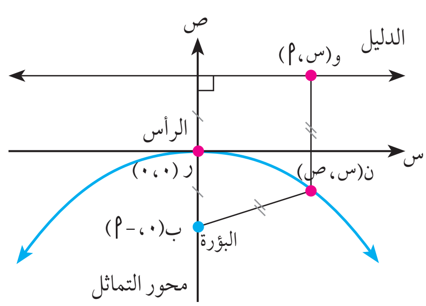
وبطريقة مماثلة يمكن اشتقاق معادلات القطع المكافئ في الأوضاع الثلاثة الأخرى:

الوضع الثاني (القطع مفتوح إلى أسفل):

الرأس (٠ ، ٠) والبؤرة على المحور الصادي السالب، أي أن البؤرة (٠ ، −م) ، م > ٠ انظر الشكل (٥ – ٤).

المعادلة في هذا الوضع هي:

$$\text{س}^{٢} = -٤\,\text{م ص}$$



الشكل (٥–٤)

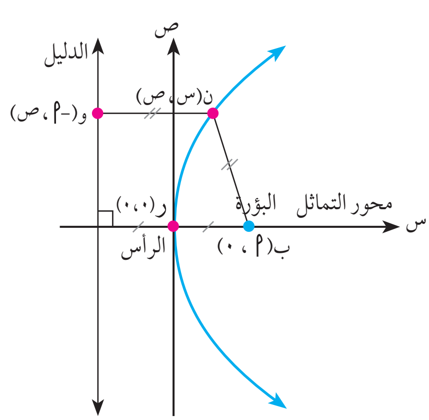
لاحظ أن القطع المكافئ في هذا الوضع هو انعكاس في محور السينات للقطع المكافئ في الوضع الأول.

الوضع الثالث (القطع مفتوح إلى اليمين):

الرأس (٠ ، ٠) والبؤرة على المحور السيني الموجب أي أن البؤرة (م ، ٠) ، م > ٠ انظر الشكل (٥–٥).

المعادلة في هذا الوضع هي:

$$\text{ص}^{٢} = ٤\,\text{م س}$$



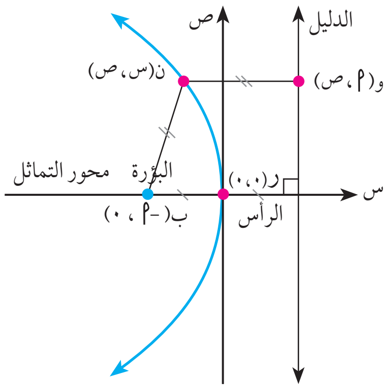
الشكل (٥–٥)

الوضع الرابع (القطع مفتوح إلى اليسار):

الرأس (٠ ، ٠) والبؤرة على المحور السيني السالب أي أن البؤرة (−أ ، ٠)، أ > ٠ ، انظر الشكل (٥ −٦).

المعادلة في هذا الوضع هي:

$$ص^{٢} = −٤ أ س$$



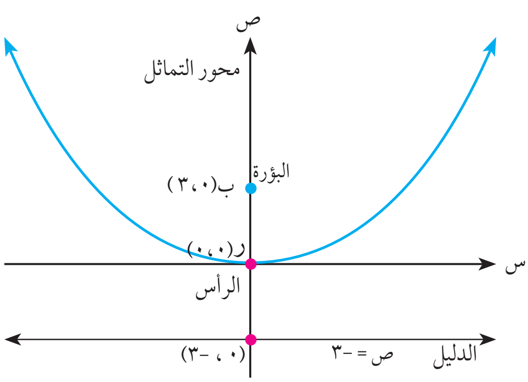
الشكل (٥−٦)

لاحظ أن القطع المكافئ في هذا الوضع هو انعكاس في محور الصادات للقطع المكافئ في الوضع الثالث.

مثال (١): قطع مكافئ رأسه (٠ ، ٠)، وبؤرته (٠ ، ٣). ارسم شكلاً تقريبياً للقطع، وجد معادلته، وكذلك معادلة دليله.

الحل:

القطع المكافئ يتخذ الشكل التقريبي المبين في شكل (٥−٧).



الشكل (٥−٧)

المعادلة العامة للقطع في هذا الوضع هي على الصورة:

س^{٢} = ٤أ ص ، أ > ٠

وحيث إن أ (البعد بين الرأس والبؤرة) = ٣

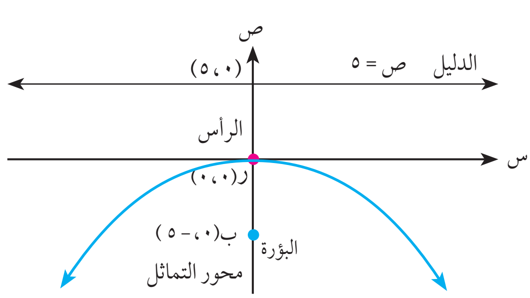
∴ س^{٢} = ١٢ ص

معادلة الدليل هي ص = −٣

مثال (٢): قطع مكافئ رأسه (٠ ، ٠)، ودليله المستقيم ص = ٥ . ارسم شكلاً تقريبياً للقطع، ثم أوجد معادلته.

الحل:

القطع المكافئ يتخذ الشكل التقريبي المبين في شكل (٥−٨).



الشكل (٥−٨)

بما أن الرأس يقع في منتصف المسافة بين البؤرة والدليل،

∴ البؤرة ب (٠ ، −٥)، والصورة العامة للقطع المكافئ في هذا الوضع هي :

س^{٢} = −٤أ ص

وحيث إن أ (البعد بين الرأس والبؤرة) = ٥

∴ س^{٢} = −٢٠ ص

مثال (٣): أوجد كلاً من الرأس، والبؤرة، والدليل، ومحور التماثل للقطع المكافئ، في كلٍّ من الحالتين الآتيتين :

أ ص^{٢} = ١٠ س   ب ص^{٢} = −٤ س

الحل:

أ المعادلة ص^{٢} = ١٠ س تتبع الصورة العامة

ص^{٢} = ٤أ س

وبالمقارنة بين المعادلتين، نستنتج أن :

٤أ = ١٠   ومنها   أ = ٢,٥

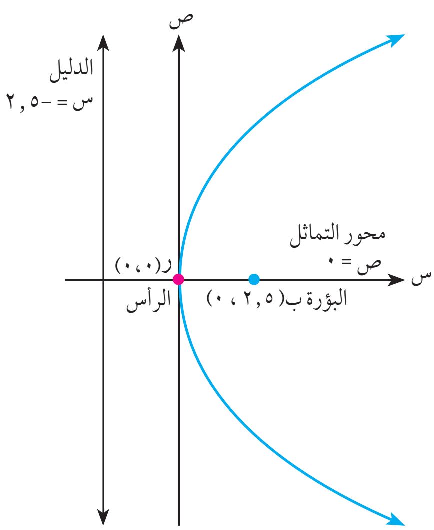
من الشكل (٥-٩) الذي يمثل القطع المكافئ، يكون :

الرأس ر (٠ ، ٠)

البؤرة ب (٢,٥ ، ٠)

معادلة الدليل هي : س = −٢,٥

محور التماثل هو محور السينات، أي ص = ٠



الشكل (٥-٩)

ب المعادلة ص^{٢} = −٤ س

تتبع الصورة العامة ص^{٢} = −٤أ س،

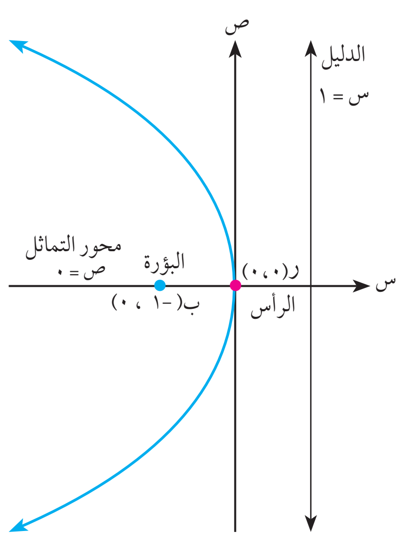
وبالمقارنة بين المعادلتين، نستنتج أن :

أ = ١ وبملاحظة الشكل (٥-١٠)، يكون :

الرأس ر (٠ ، ٠)، البؤرة ب (−١ ، ٠)

معادلة الدليل هي : س = ١

محور التماثل هو محور السينات، أي ص = ٠

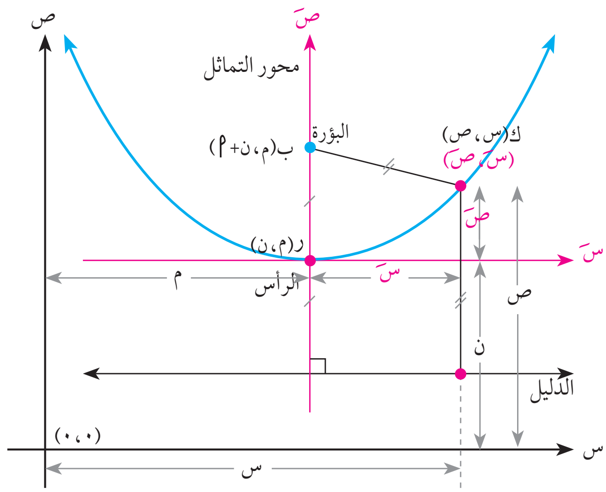


الشكل (٥-١٠)

الحالة الثانية (القطع المكافئ في وضع انسحاب)

كما في الحالة الأولى، يوجد أربعة أوضاع يمكن أن يتخذها القطع المكافئ في هذه الحالة، نبينها فيما يلي :

الوضع الأول: الرأس (م، ن)، والبؤرة (م، ن+أ) واقعان على مستقيم موازٍ لمحور الصادات. لاحظ الشكل (٥-١١).



الشكل (٥-١١)

باختيار محورين جديدين سَ ، صَ متعامدين ومتلاقيين عند النقطة (م، ن)، تكون معادلة القطع المكافئ في النظام الإحداثي سَ صَ هي :

سَ^{٢} = ٤أ صَ حيث (سَ، صَ)، إحداثيا أية نقطة مثل ك على القطع المكافئ.

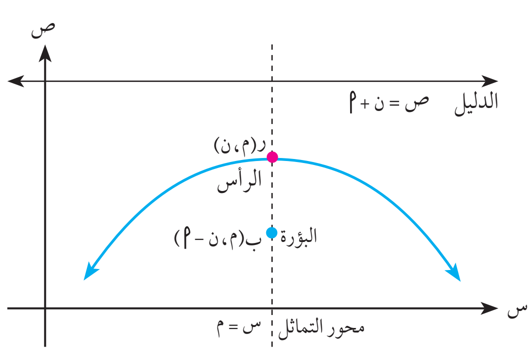
للنقطة ك الإحداثيان (س، ص) في النظام الإحداثي س ص ؛ وبملاحظة الشكل (٥ -١١)، نجد أن **سَ = س - م**، وأن **صَ = ص - ن**، وبالتعويض في المعادلة سَ^{٢}= ٤أ صَ، نستنتج أن معادلة القطع المكافئ في النظام الإحداثي س ص هي :

(س - م)^{٢} = ٤أ (ص - ن)

وبطريقة مماثلة، يمكننا اشتقاق معادلات القطع المكافئ في الأوضاع الثلاثة الأخرى، نبينها فيما يلي :

الوضع الثاني: الرأس (م ، ن)، والبؤرة (م ، ن - أ) واقعان على مستقيم موازٍ لمحور الصادات.

لاحظ الشكل (٥-١٢).



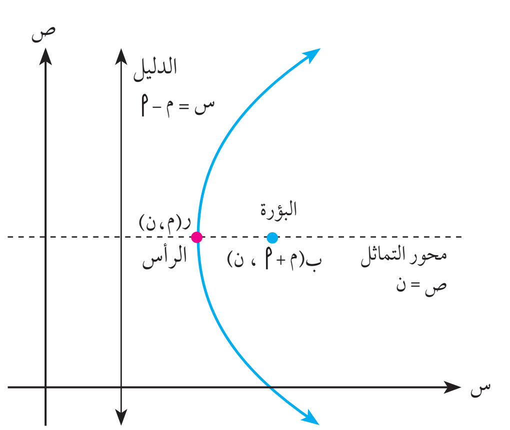
الشكل (٥-١٢)

المعادلة هي :

(س - م)^{٢} = -٤أ (ص - ن)

الوضع الثالث: الرأس (م ، ن)، والبؤرة (م + أ ، ن) واقعان على مستقيم موازٍ لمحور السينات.

لاحظ الشكل (٥-١٣).



الشكل (٥-١٢)

المعادلة هي :

(ص - ن)^{٢} = ٤أ (س - م)

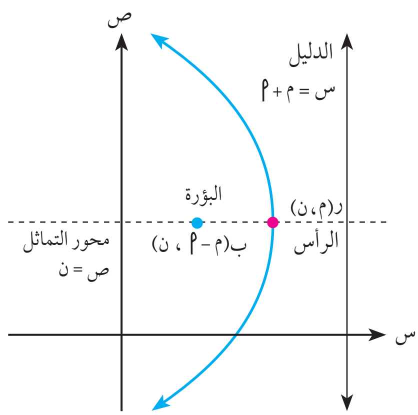
الوضع الرابع: الرأس (م ، ن)، والبؤرة (م - ϱ ، ن)

واقعان على مستقيم موازٍ لمحور السينات.

لاحظ الشكل (٥-١٤).

المعادلة هي:

(ص - ن)^٢ = -٤ϱ(س - م)



الشكل (٥-١٤)

مثال (٤): قطع مكافئ رأسه (-٢ ، ٤)، وبؤرته (٣ ، ٤)، ارسم شكلاً تقريبياً للقطع، ثم أوجد معادلته.

الحل: نلاحظ من الشكل (٥-١٥) أن الرأس والبؤرة واقعان على مستقيم موازٍ لمحور السينات والبؤرة على يمين الرأس.

∴ معادلة القطع المكافئ تتبع الصورة:

(ص - ن)^٢ = ٤ϱ(س - م)

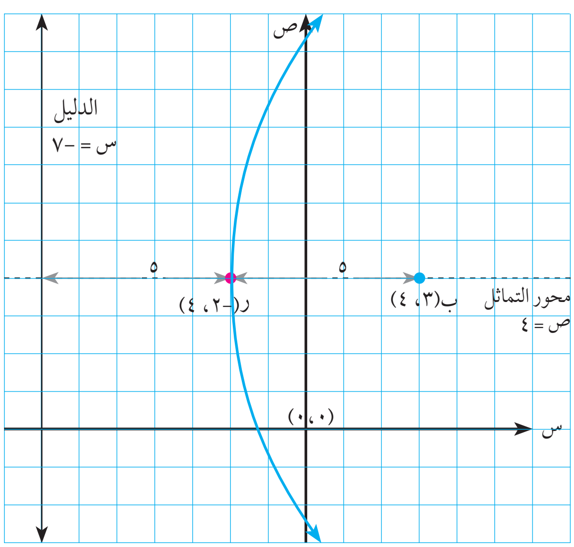
م = -٢ ، ن = ٤ ،

البعد بين الرأس والبؤرة = ϱ

= ٣ -(-٢) = ٥

∴ بالتعويض تكون المعادلة هي:

(ص - ٤)^٢ = ٢٠(س + ٢)



الشكل (٥-١٥)

مثال (٥): أوجد موضحاً بالرسم كلاًّ من: البؤرة، والرأس، ومعادلة الدليل، ومعادلة محور التماثل للقطع المكافئ الذي معادلته (س - ٢)^٢ = -٤(ص + ١).

الحل: المعادلة تتبع الصورة: (س - م)^٢ = -٤ϱ(ص - ن)

وبالمقارنة بين المعادلتين نستنتج أن:

م = ٢ ، ن = -١ ، -٤ϱ = -٤ أي أن ϱ = ١

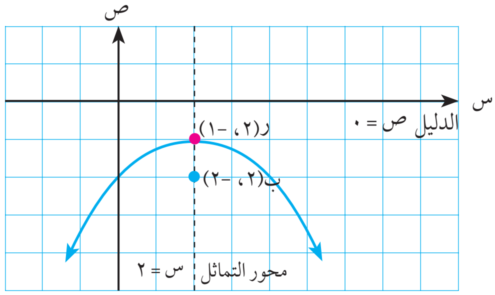
أي أن الرأس (م ، ن) = (٢ ، -١)

يبين الشكل (٥-١٦) التمثيل البياني التقريبي للقطع المكافئ، ومنه نستنتج أن :

البؤرة (٢ ، -٢)

ومعادلة الدليل هي ص = ٠

ومعادلة محور التماثل س = ٢



الشكل (٥-١٦)

مثال (٦):

بين أن المعادلة ص = $\frac{١}{٨}$ س^{٢} + $\frac{١}{٤}$ س − $\frac{١٥}{٨}$ تمثل قطعاً مكافئاً، ثم ارسم منحناه مبيناً عليه جميع عناصره الأساسية.

الحل:

ص = $\frac{١}{٨}$ س^{٢} + $\frac{١}{٤}$ س − $\frac{١٥}{٨}$

ومنها س^{٢} + ٢س − ١٥ = ٨ص

وبإكمال المربع في س ينتج :

(س + ١)^{٢} = ٨ (ص + ٢)

وهذه على الصورة (س − م)^{٢} = ٤أ (ص − ن)

حيث (م ، ن) = (-١ ، -٢) ،

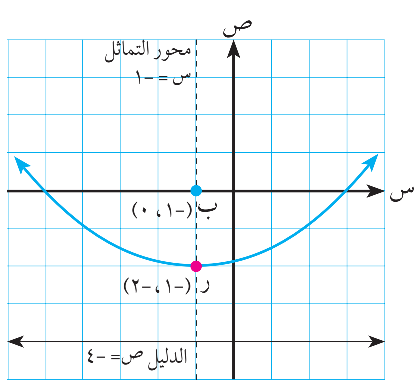
٤أ = ٨ ومنها أ = ٢

يمثل الشكل (٥-١٧) القطع المكافئ، وعناصره الأساسية :

الرأس ر (-١ ، -٢)

البؤرة ب (-١ ، ٠)

معادلة محور التماثل هي : س = -١ ومعادلة الدليل هي : ص = -٤



الشكل (٥-١٧)

بوجه عام:

المعادلة التربيعية ص = أس^{٢} + ب س + جـ ، أ ≠ ٠ تمثل قطعاً مكافئاً محوره يوازي محور الصادات.

المعادلة التربيعية س = أص^{٢} + ب ص + جـ ، أ ≠ ٠ تمثل قطعاً مكافئاً محوره يوازي محور السينات.

تمارين (١-٥)

١ اكتب معادلة القطع المكافئ في كلٍّ مما يلي، وارسم شكلاً تقريبياً له في كل حالة:

أ) الرأس (٠ ، ٠)، والبؤرة (٢ ، ٠)

ب) الرأس (٠ ، ٠)، والدليل ص = −٤

جـ) الرأس (−١ ، ٣)، والبؤرة (−١ ، ١)

د) البؤرة (−١ ، −١)، والدليل ص = ١

هـ) البؤرة (١ ، −١)، والدليل س = −٢

٢ أوجد كلاً من الرأس، والبؤرة، ومعادلة الدليل، ومعادلة محور التماثل لكلٍّ من القطوع المكافئة التالية:

أ) ص = ٨س^{٢}

ب) ص^{٢} = −٢س

جـ) ص^{٢} − ٨ص + ٢س = ٢

د) س^{٢} + ٨س + ص = ١

هـ) (ص − ١)^{٢} = ٤ − ٢س

و) ٨(ص − ١)^{٢} = ٢س + ١

٣ جد معادلة القطع المكافئ الذي رأسه (−١ ، ٢)، ويمر بالنقطة (١ ، ٣)، ومحوره يوازي محور الصادات؛ ثم ارسم منحناه.

٤ أوجد معادلة المحل الهندسي للنقطة ن (س ، ص) التي تتحرك في المستوى بحيث يكون بعدها عن النقطة (−٢ ، ٨) مساوياً بعدها عن المستقيم ص = ٢ .

٥ أوجد معادلة المماس والعمودي للقطع المكافئ الذي معادلته ٣ص^{٢} − ٥ص + ٧س − ٩ = ٠ عند النقطة (١ ، ٢) الواقعة عليه.

٦ إذا كان المستقيم ص = س + أ مماساً للقطع المكافى ص^{٢} = ٨س، فأوجد قيمة أ.

٧ تتحرك النقطة ن (س ، ص) في المستوى بحيث تكون س = جا هـ، ص = جتا ٢هـ. بين أن المحل الهندسي للنقطة ن هو قطع مكافئ، وعين رأسه وبؤرته.

٨ أوجد معادلة القطع المكافئ الذي يمر بالنقط (١ ، ١) ، (١ ، −٣)، (−٢ ، ٠)، ومحور تماثله أفقي.

٩ استخدم التفاضل لإيجاد رأس القطع المكافئ الذي معادلته ص = ٨س^{٢} + ١٦س + ١٠

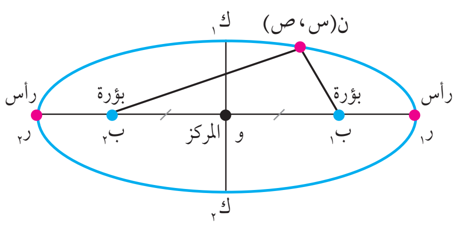
١٠ أوجد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى القطع المكافئ س^{٢} = ٤ص، والخط المستقيم المار ببؤرة القطع المكافئ عمودياً على محور التماثل. وإذا دارت هذه المنطقة حول محور السينات دورة كاملة، فأوجد حجم الجسم الناتج.

٥-٢ القطـع النـاقـص (The Ellipse)

تعريف:

القطع الناقص هو المحل الهندسي لنقطة تتحرك في المستوى بحيث يكون مجموع بعديها عن نقطتين ثابتتين فيه يساوي مقداراً ثابتاً أكبر من البعد بينهما .

يسمى المنحنى المبين في الشكل (٥-١٨)، والذي ترسمه النقطة ن (س، ص) بحيث يكون ن ب$_1$ + ن ب$_2$ مقداراً ثابتاً قطعاً ناقصاً، وفيه نسمي :



الشكل (٥-١٨)

- النقطتين الثابتتين ب$_1$، ب$_2$ البؤرتين .
- النقطة (و) المنصفة للمسافة بين البؤرتين مركز القطع الناقص .
- النقطتين ر$_1$، ر$_2$، وهما نقطتا تقاطع الخط المار بالبؤرتين مع المنحنى، رأسي القطع الناقص .
- القطعة المستقيمة $\overline{ر_1 ر_2}$ الواصلة بين الرأسين المحور الأكبر للقطع الناقص .
- القطعة المستقيمة $\overline{ك_1 ك_2}$ العمودية على المحور الأكبر، والمارة بالمركز، وطرفاها على القطع المحور الأصغر للقطع الناقص .

معادلة القطع الناقص:

كما في القطع المكافئ، سوف ندرس معادلة القطع الناقص في حالتين :

الحالة الأولى (القطع الناقص في وضع قياسي)، حيث المركز نقطة الأصل (٠، ٠)، والمحور الأكبر منطبق على أحد المحورين الإحداثيين .

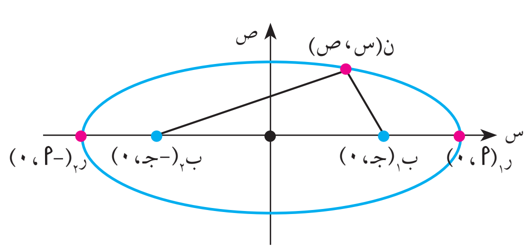
الحالة الثانية (القطع الناقص في وضع انسحاب)، حيث المركز (م، ن)، والمحور الأكبر موازٍ لأحد المحورين الإحداثيين .

الحالة الأولى (القطع الناقص في وضع قياسي)

للقطع الناقص في هذه الحالة وضعان :

الوضع الأول: المركز نقطة الأصل (٠ ، ٠)، والمحور الأكبر منطبق على محور السينات .

يبين الشكل (٥-١٩) قطعاً ناقصاً مركزه نقطة الأصل (٠ ، ٠)، ومحوره الأكبر منطبق على محور السينات .



الشكل (٥-١٩)

نفرض أن البؤرتين ب$_1$ (جـ ، ٠) ، ب$_2$ (-جـ ، ٠) .

فإذا كانت ن (س ، ص) أية نقطة على القطع الناقص ، فإن مجموع بعديها عن البؤرتين يساوي مقداراً ثابتا

وليكن ٢أ ، أي أن : ن ب$_١$ + ن ب$_٢$ = ٢أ

$$\therefore \quad \sqrt{(\text{س} - \text{جـ})^٢ + \text{ص}^٢} + \sqrt{(\text{س} + \text{جـ})^٢ + \text{ص}^٢} = ٢\text{أ}$$

بنقل أحد الجذرين إلى الطرف الأيسر وتربيع الطرفين والتبسيط ، نحصل على المعادلة :

$$\frac{\text{س}^٢}{\text{أ}^٢} + \frac{\text{ص}^٢}{\text{أ}^٢ - \text{جـ}^٢} = ١ \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (١)$$

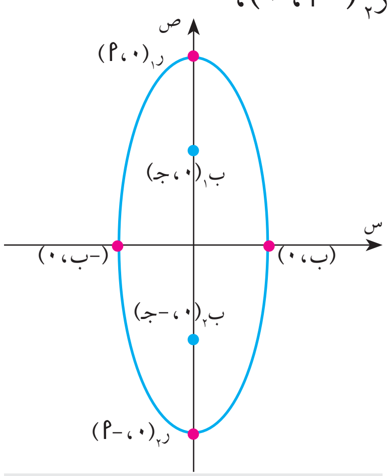
وبملاحظة أن ٢أ > ٢جـ (تعريف القطع الناقص)

يكون أ > جـ ، ومنها أ^٢ > جـ^٢

أي أن أ^٢ – جـ^٢ مقدار موجب وليكن ب^٢؛ وبالتعويض في المعادلة (١)، نحصل على المعادلة :

$$\frac{\text{س}^٢}{\text{أ}^٢} + \frac{\text{ص}^٢}{\text{ب}^٢} = ١$$

لاحظ أن القطع الناقص يقطع محور السينات في الرأسين ر$_١$ (أ ، ٠)، ر$_٢$ (–أ ، ٠)، ويقطع محور الصادات في النقطتين (٠ ، ب)، (٠ ، – ب)



الشكل (٥–٢٠)

الوضع الثاني : المركز نقطة الأصل (٠،٠)، والمحور الأكبر منطبق على محور الصادات ، كما في الشكل (٥–٢٠).

بالطريقة ذاتها التي استخدمناها في الوضع الأول يمكن التوصل إلى معادلة القطع الناقص في الوضع الثاني وهي :

$$\frac{\text{ص}^٢}{\text{أ}^٢} + \frac{\text{س}^٢}{\text{ب}^٢} = ١$$

ملاحظات:

١ العلاقة بين الأطوال أ ، ب ، جـ هي أ^٢ = ب^٢ + جـ^٢

٢ محورا القطع الناقص هما محورا تماثل له .

٣ طول المحور الأكبر للقطع الناقص = ٢أ ، وطول المحور الأصغر = ٢ب ، أ > ب .

٤ المقام الأكبر في معادلتي القطع الناقص السابقتين يمثل دائماً أ^٢ ، وإذا كانت أ^٢ هي مقام س^٢ ، فإن المحور الأكبر يكون منطبقاً على محور السينات (قطع ناقص سيني)، أما إذا كانت أ^٢ هي مقام ص^٢ ، فإن المحور الأكبر يكون منطبقاً على محور الصادات (قطع ناقص صادي) .

تعريف:

الاختلاف المركزي للقطع الناقص، ويرمز له بالرمز هـ ، هو النسبة $\frac{\text{جـ}}{\text{م}}$ أي أن هـ = $\frac{\text{جـ}}{\text{م}}$

لاحظ أن ٠ < هـ < ١ لأن جـ ، م موجبتان ، جـ < م

وعندما هـ ← ٠ فإن القطع الناقص يقترب من دائرة.

وعندما هـ ← ١ فإن القطع الناقص يقترب من قطعة مستقيمة.

مثال (١): للقطع الناقص $\frac{\text{س}^2}{٢٥} + \frac{\text{ص}^2}{١٦} = ١$ ، عين كلاً من : البؤرتين ، والرأسين، والمحورين؛ ثم ارسم منحنى القطع الناقص.

الحل:

القطع الناقص هو قطع ناقص سيني فيه :

$\text{م}^2 = ٢٥$ ، ومنها م = ٥

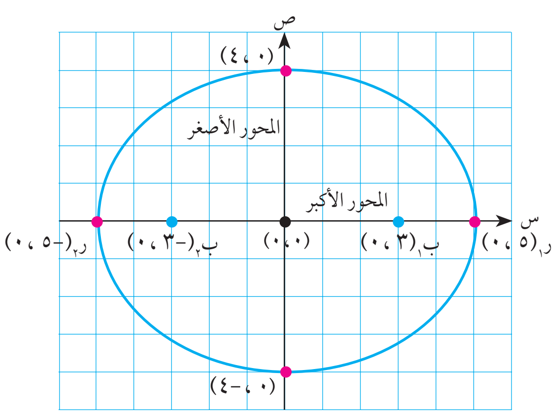
$\text{ب}^2 = ١٦$ ، ومنها ب = ٤

لكن $\text{جـ}^2 = \text{م}^2 - \text{ب}^2 = ٢٥ - ١٦ = ٩$

∴ جـ = ٣

البؤرتان هما : ب_1(٣، ٠) ، ب_2(-٣، ٠)

الرأسان هما : ر_1(٥ ، ٠) ، ر_2(-٥ ، ٠)



الشكل (٥-٢١)

معادلة المحور الأكبر هي: ص = ٠ ، وطوله = ٢م = ١٠

معادلة المحور أصغر هي: س = ٠ ، وطوله = ٢ب = ٨

انظر الشكل (٥-٢١).

مثال (٢): أوجد معادلة القطع الناقص الذي مركزه (٠ ، ٠)، وبؤرتاه النقطتان (٤ ، ٠)، (-٤ ، ٠)، ويقطع المحور الصادي عند النقطتين (٠ ، ٣)، (٠ ، -٣).

الحل:

القطع مركزه (٠، ٠)، وبؤرتاه على محور السينات (قطع ناقص سيني)

∴ تتخذ معادلته الصورة $\frac{\text{س}^2}{\text{م}^2} + \frac{\text{ص}^2}{\text{ب}^2} = ١$

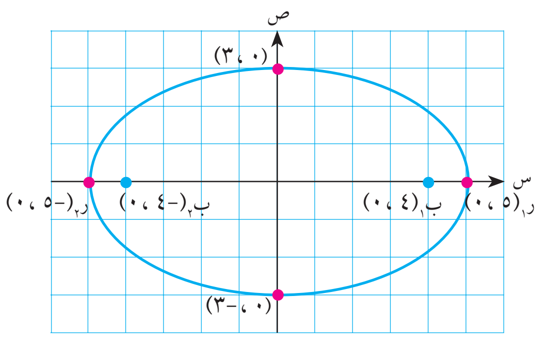
ب = ٣ ، جـ = ٤

لكن $\text{أ}^{٢} = \text{ب}^{٢} + \text{جـ}^{٢} = ٩ + ١٦ = ٢٥$

∴ أ = ٥

∴ المعادلة $\frac{\text{س}^{٢}}{٢٥} + \frac{\text{ص}^{٢}}{٩} = ١$

انظر الشكل (٥-٢٢).



الشكل (٥-٢٢)

مثال (٣): عين الرأسين، والبؤرتين، والاختلاف المركزي للقطع الناقص الذي معادلته $٢٥\text{س}^{٢} + ٩\text{ص}^{٢} = ٢٢٥$ ، ثم ارسم منحنى القطع.

الحل: بقسمة طرفي المعادلة $٢٥\text{س}^{٢} + ٩\text{ص}^{٢} = ٢٢٥$ على ٢٢٥ ينتج: $\frac{\text{س}^{٢}}{٩} + \frac{\text{ص}^{٢}}{٢٥} = ١$

وهي على الصورة $\frac{\text{ص}^{٢}}{\text{أ}^{٢}} + \frac{\text{س}^{٢}}{\text{ب}^{٢}} = ١$

أي أن القطع الناقص هو قطع ناقص صادي فيه:

$\text{أ}^{٢} = ٢٥$ ، ومنها أ = ٥؛ $\text{ب}^{٢} = ٩$ ، ومنها ب = ٣

لكن $\text{جـ}^{٢} = \text{أ}^{٢} - \text{ب}^{٢} = ٢٥ - ٩ = ١٦$

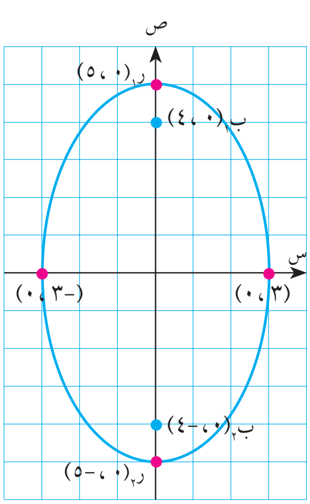
∴ جـ = ٤

∴ البؤرتان هما: (٠ ، ∓ جـ) أي (٠ ، ∓ ٤)

الرأسان هما: (٠ ، ∓ أ) أي (٠ ، ∓ ٥)

الاختلاف المركزي هـ = $\frac{\text{جـ}}{\text{أ}} = \frac{٣}{٥} = ٠{,}٦$

انظر الشكل (٥-٢٣).



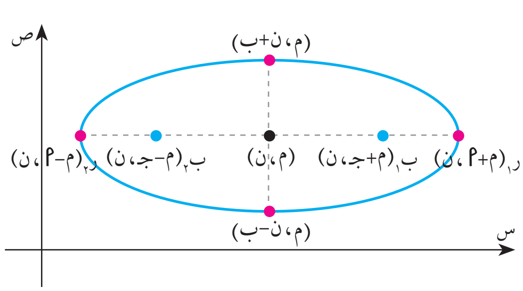
الشكل (٥-٢٣)

الحالة الثانية (القطع الناقص في وضع انسحاب).

الوضع الأول: المركز (م، ن) والمحور الأكبر موازٍ لمحور السينات. انظر الشكل (٥-٢٤).

في هذا الوضع تكون معادلة القطع الناقص هي:

$$\frac{(\text{س} - \text{م})^{٢}}{\text{أ}^{٢}} + \frac{(\text{ص} - \text{ن})^{٢}}{\text{ب}^{٢}} = ١$$



الشكل (٥-٢٤)

مثال (٤): قطع ناقص معادلته $\frac{(\text{س} - ٢)^٢}{١٠٠} + \frac{(\text{ص} - ٣)^٢}{٣٦} = ١$ ، عين موضحاً بالرسم عناصره الأساسية الآتية: المركز، والبؤرتين، والرأسين، والمحورين.

الحل: المعادلة على الصورة $\frac{(\text{س} - \text{م})^٢}{\text{أ}^٢} + \frac{(\text{ص} - \text{ن})^٢}{\text{ب}^٢} = ١$

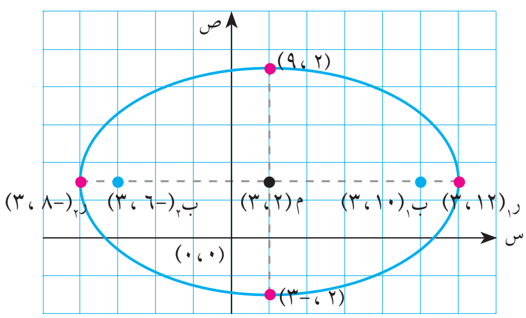
وهي تمثل قطعاً ناقصاً محوره الأكبر موازٍ لمحور السينات (قطع ناقص سيني)، ومركزه (م، ن) = (٢، ٣)، وفيه:

أ^٢ = ١٠٠ ومنها أ = ١٠

ب^٢ = ٣٦ ومنها ب = ٦

لكن جـ^٢ = أ^٢ − ب^٢ = ١٠٠ − ٣٦ = ٦٤

∴ جـ = ٨



الشكل (٥-٢٥)

الشكل (٥-٢٥) يوضح القطع الناقص

ومنه تلاحظ أن البؤرتين هما:

ب$_١$(٢ + ٨، ٣) = (١٠ ، ٣)؛ ب$_٢$(٢ − ٨، ٣) = (−٦ ، ٣)

والرأسين هما: ر$_١$(٢ + ١٠ ، ٣) = (١٢ ، ٣)؛ ر$_٢$(٢ − ١٠ ، ٣) = (−٨ ، ٣)

معادلة المحور الأكبر هي ص = ٣، وطوله = ٢أ = ٢ × ١٠ = ٢٠

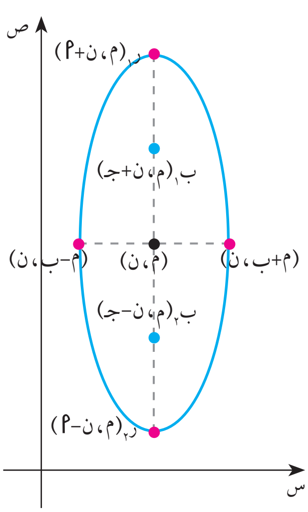
معادلة المحور الأصغر هي س = ٢، وطوله = ٢ب = ٢ × ٦ = ١٢

الوضع الثاني: المركز (م ، ن)، والمحور الأكبر موازٍ لمحور الصادات.

انظر الشكل (٥-٢٦).

في هذا الوضع تكون معادلة القطع الناقص هي:

$$\frac{(\text{ص} - \text{ن})^٢}{\text{أ}^٢} + \frac{(\text{س} - \text{م})^٢}{\text{ب}^٢} = ١$$



الشكل (٥-٢٦)

مثال (٥): قطع ناقص معادلته $٩س^{٢} + ٤ص^{٢} + ٣٦س - ٤٠ص + ١٠٠ = صفر$

عين موضحاً بالرسم كلاً من: المركز، والبؤرتين، والرأسين، والاختلاف المركزي.

الحل:

معادلة القطع الناقص هي: $٩س^{٢} + ٤ص^{٢} + ٣٦س - ٤٠ص + ١٠٠ = صفر$

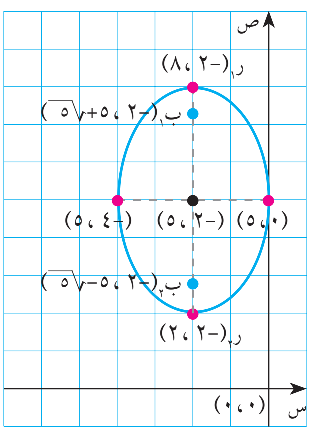
بإكمال المربع في س، ص، تصبح المعادلة:

$$٩(س^{٢} + ٤س + ٤) + ٤(ص^{٢} - ١٠ص + ٢٥) = -١٠٠ + ٣٦ + ١٠٠$$

$$٩(س + ٢)^{٢} + ٤(ص - ٥)^{٢} = ٣٦$$

بقسمة طرفي المعادلة على ٣٦، تصبح: $\frac{(ص - ٥)^{٢}}{٩} + \frac{(س + ٢)^{٢}}{٤} = ١$

وهي على الصورة $\frac{(ص - ن)^{٢}}{م^{٢}} + \frac{(س - م)^{٢}}{ب^{٢}} = ١$



الشكل (٥-٢٧)

وتمثل المعادلة قطعاً ناقصاً محوره الأكبر موازٍ لمحور الصادات، (قطع ناقص صادي).

ومركزه (م، ن) = (-٢، ٥)، وفيه:

$م^{٢} = ٩$ ، ومنها $م = ٣$

$ب^{٢} = ٤$ ، ومنها $ب = ٢$

لكن $جـ^{٢} = م^{٢} - ب^{٢} = ٩ - ٤ = ٥$

∴ $جـ = \sqrt{٥}$

الشكل (٥-٢٧) يوضح منحنى القطع الناقص:

البؤرتان هما: $(-٢ ، ٥ + \sqrt{٥})$ ، $(-٢ ، ٥ - \sqrt{٥})$

الرأسان هما: (-٢ ، ٥+٣) ، (-٢ ، ٥-٣) أي (-٢ ، ٨) ، (-٢ ، ٢)

الاختلاف المركزي هـ = $\frac{جـ}{م} = \frac{\sqrt{٥}}{٣}$

مثال (٦): أوجد معادلة القطع الناقص الذي رأساه النقطتان (١٣ ، -٢) ، (٣ ، -٢)، وبؤرتاه النقطتان (١٢ ، -٢)، (٤ ، -٢).

الحل:

مركز القطع الناقص يقع في منتصف المسافة بين الرأسين، أو البؤرتين،

∴ المركز = $(\frac{١٣ + ٣}{٢} ، \frac{-٢ + -٢}{٢}) = (٨ ، -٢)$.

محوره الأكبر موازٍ لمحور السينات (قطع ناقص سيني)

$٢\text{أ} = $ طول المحور الأكبر $= ١٣ - ٣ = ١٠$

$\therefore \quad \text{أ} = ٥$

$٢\text{جـ} = $ البعد بين البؤرتين $= ١٢ - ٤ = ٨$

$\therefore \quad \text{جـ} = ٤$

لكن $\text{جـ}^٢ = \text{أ}^٢ - \text{ب}^٢$

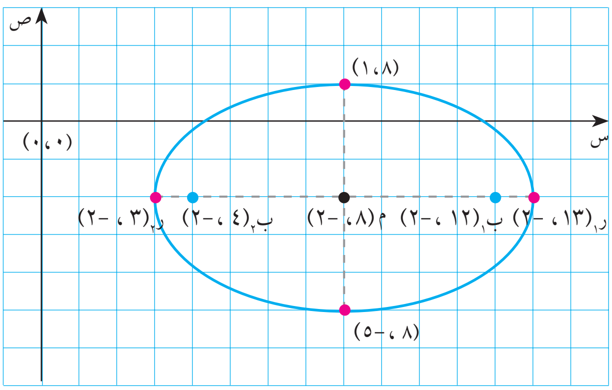
$\therefore \quad ١٦ = ٢٥ - \text{ب}^٢ \Leftarrow \text{ب}^٢ = ٩$

$\therefore$ معادلة القطع الناقص على الصورة:

$$\frac{(\text{س} - \text{م})^٢}{\text{أ}^٢} + \frac{(\text{ص} - \text{ن})^٢}{\text{ب}^٢} = ١$$

أي $\dfrac{(\text{س}-٨)^٢}{٢٥} + \dfrac{(\text{ص}+٢)^٢}{٩} = ١$

يوضح الشكل (٥-٢٨) منحنى القطع الناقص.



الشكل (٥-٢٨)

مثال (٧): قطع ناقص بؤرتاه (٢ ، ٤) ، (٢ ، -٢)، واختلافه المركزي ٠,٦ ، جد معادلته.

الحل:

إحداثيا المركز $\left(\dfrac{٢+٢}{٢} ، \dfrac{٤-٢}{٢}\right) = (٢ ، ١)$. وبما أن بؤرتيه (٢ ، ٤) ، (٢ ، -٢) تقعان على مستقيم موازٍ لمحور الصادات؛ إذن فهو قطع ناقص صادي كما في الشكل (٥-٢٩).

وتتخذ معادلته الصورة $\dfrac{(\text{ص} - \text{ن})^٢}{\text{أ}^٢} + \dfrac{(\text{س} - \text{م})^٢}{\text{ب}^٢} = ١$

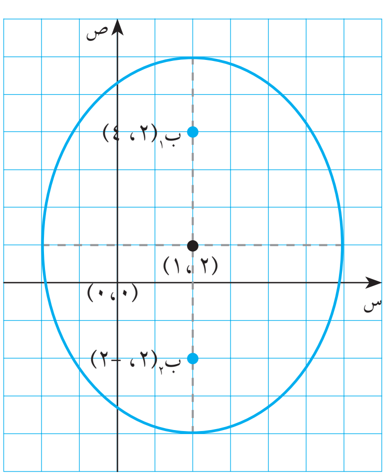
البعد بين البؤرتين $= ٢\text{جـ}$

$= ٤ - (-٢) = ٦$ ، ومنها جـ = ٣

$\text{هـ} = \dfrac{\text{جـ}}{\text{أ}}$ ، ومنها $٠,٦ = \dfrac{٣}{\text{أ}}$ ، ومنها أ = ٥

$\text{جـ}^٢ = \text{أ}^٢ - \text{ب}^٢$ ، ومنها $٩ = ٢٥ - \text{ب}^٢$

ومنها $\text{ب}^٢ = ١٦$ ، ومنها ب = ٤



الشكل (٥-٢٩)

$\therefore$ المعادلة هي: $\dfrac{(\text{ص} - ١)^٢}{٢٥} + \dfrac{(\text{س} - ٢)^٢}{١٦} = ١$

تمارين (٥-٢)

١ أوجد معادلة القطع الناقص في كلٍّ من الحالات التالية :

أ) مركزه (٠ ، ٠)، وبؤرتاه (∓١ ، ٠)، وطول محوره الأكبر ٦ وحدات .

ب) مركزه (٠ ، ٠)، وبؤرتاه (٠ ، ∓٢)، واختلافه المركزي ٠,٥ .

جـ) رأساه (٢ ، ١٢) ، (٢ ، −٨)، واختلافه المركزي ٠,٦ .

د) رأساه (٠ ، ٦) ، (٠ ، −٦)، ويمر بالنقطة (٣ ، ٢) .

٢ ارسم القطع الناقص في كلٍّ مما يلي، موضحاً عليه عناصره الأساسية :

أ) $\frac{\text{س}^{\text{٢}}}{\text{٩}} + \frac{\text{ص}^{\text{٢}}}{\text{٤}} = \text{١}$

ب) $\text{٣س}^{\text{٢}} + \text{٤ص}^{\text{٢}} = \text{١٢}$

جـ) $\frac{(\text{س} + \text{١})^{\text{٢}}}{\text{٩}} + \frac{(\text{ص} - \text{٢})^{\text{٢}}}{\text{١٦}} = \text{١}$

د) $\text{٤س}^{\text{٢}} + \text{٨س} + \text{ص}^{\text{٢}} = \text{٣٢}$

هـ) $\text{س}^{\text{٢}} + \text{٩ص}^{\text{٢}} - \text{١٨ص} + \text{٤س} = \text{٢٣}$

و) $\text{١٦س}^{\text{٢}} + \text{٩ص}^{\text{٢}} + \text{٦٤س} - \text{١٨ص} - \text{٧١} = \text{٠}$

٣ تتحرك النقطة ن (س ، ص) في المستوى، بحيث يكون مجموع بعديها عن النقطتين (٠ ، ٤) ، (٠ ، −٤) يساوي ١٠ وحدات دائماً . أوجد معادلة المحل الهندسي لهذه النقطة .

٤ أوجد معادلة المماس للقطع الناقص $\text{٥س}^{\text{٢}} + \text{٤ص}^{\text{٢}} = \text{٥٦}$ ، عند النقطة (−٢ ، ٣) الواقعة عليه .

٥ أوجد معادلة المحل الهندسي للنقطة ن (س ، ص) التي تتحرك في المستوى، بحيث س = ٢ جاهـ + ١ ، ص = ٣ جتاهـ − ٢ .

٦ جسر مقوس له شكل نصف قطع ناقص محوره الأكبر أفقي؛ فإذا كان طول قاعدة القوس ٣٠م وارتفاع أعلى نقطة في القوس فوق المحور الأفقي ١٠م، فجد ارتفاع القوس على بعد ٦م من مركز القاعدة .

٧ إذا كان المماس للقطع الناقص $\text{٩س}^{\text{٢}} + \text{٤ص}^{\text{٢}} = \text{٣٦}$ يقطع محور الصادات عند النقطة (٠، ٦)، فأوجد نقاط التماس .

٨ تتحرك نقطة ن (س، ص) في المستوى بحيث يكون بعدها عن المستقيم ص = ١ مثلي بعدها عن النقطة (٢ ، ٢)؛ بين أن المحل الهندسي للنقطة ن هو قطع ناقص، وعين عناصره الأساسية .

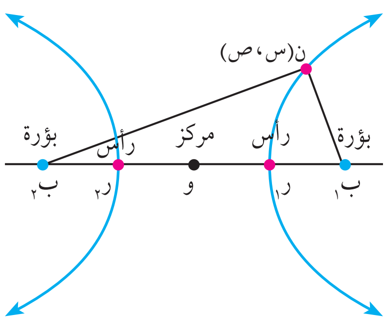
٥-٣ القطـــع الزائـــد (The Hyperbola)

تعريف:

القطع الزائد هو المحل الهندسي لنقطة تتحرك في المستوى بحيث يكون الفرق المطلق بين بعديها عن نقطتين ثابتتين فيه يساوي بعداً ثابتاً أصغر من البعد بينهما .

يسمى المنحنى المبين في الشكل (٥-٣٠)، والذي ترسمه النقطة ن (س، ص) بحيث يكون $|$ ن ب$_٢$ - ن ب$_١$ $|$ مقداراً ثابتاً، قطعاً زائداً، وفيه نسمي :

- النقطتين الثابتتين ب$_١$، ب$_٢$ البؤرتين .
- النقطة (و) المنصفة للمسافة بين البؤرتين مركز القطع الزائد .
- النقطتان ر$_١$، ر$_٢$ رأسي القطع الزائد .
- القطعة المستقيمة $\overline{\text{ر}_١\text{ر}_٢}$ الواصلة بين الرأسين المحور القاطع .



الشكل (٥-٣٠)

معادلة القطع الزائد:

سندرس معادلة القطع الزائد في حالتين :

الحالة الأولى (القطع الزائد في وضع قياسي)، حيث المركز نقطة الأصل (٠، ٠)، والمحور القاطع منطبق على أحد المحورين الاحداثيين .

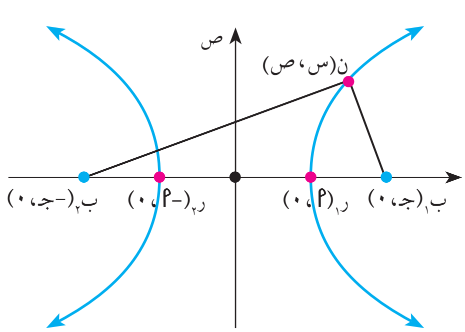
الحالة الثانية (القطع الزائد في وضع انسحاب)، حيث المركز (م، ن)، ومحوره القاطع موازٍ لأحد المحورين الإحداثيين .

الحالة الأولى (القطع الزائد في وضع قياسي)

للقطع الزائد في هذه الحالة وضعان :

الوضع الأول: المركز نقطة الأصل (٠، ٠)، والمحور القاطع منطبق على محور السينات (قطع زائد سيني) .

انظر الشكل (٥-٣١) .



الشكل (٥-٣١)

لأي نقطة ن (س، ص) واقعة على منحنى القطع الزائد يكون

$|ن ب_٢ - ن ب_١| = $ مقداراً ثابتاً $= ٢أ$

$ن ب_٢ - ن ب_١ = \mp ٢أ$

وبالتعويض ينتج أن :

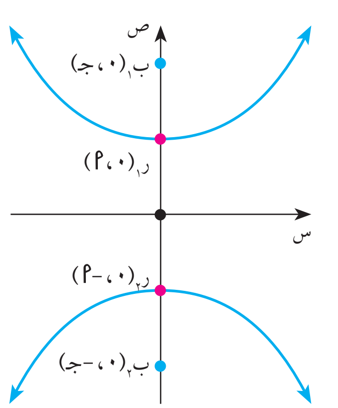
$$\sqrt{(س + جـ)^٢ + ص^٢} - \sqrt{(س - جـ)^٢ + ص^٢} = \mp ٢أ$$

بعد إجراء العمليات الجبرية والاختصار، نحصل على المعادلة :

$\frac{س^٢}{أ^٢} - \frac{ص^٢}{جـ^٢ - أ^٢} = ١$ وبتعويض $ب^٢ = جـ^٢ - أ^٢$، تصبح المعادلة على الصورة :

$$\frac{س^٢}{أ^٢} - \frac{ص^٢}{ب^٢} = ١$$

لاحظ أن القطع الزائد في هذا الوضع يقطع محور السينات في الرأسين $ر_١(أ ، ٠)$ ، $ر_٢(-أ ، ٠)$، وأن طول المحور القاطع ٢ أ، وأنه لا يقطع محور الصادات؛ وذلك لأنه بتعويض س = صفر، تصبح المعادلة $ص^٢ = -ب^٢$، وهي معادلة لا حل لها في ح؛ ولكننا سنسمي القطعة المستقيمة العمودية على المحور القاطع من مركز القطع الزائد والتي تصل بين النقطتين (٠ ، −ب) ، (٠ ، ب)، المحور المرافق للقطع الزائد، وطوله يساوي ٢ب .



الشكل (٥-٣٢)

الوضع الثاني : المركز نقطة الأصل (٠ ، ٠)، والمحور القاطع منطبق على محور الصادات (قطع زائد صادي). انظر الشكل (٥-٣٢).

في هذه الحالة تكون معادلة القطع الزائد هي :

$$\frac{ص^٢}{أ^٢} - \frac{س^٢}{ب^٢} = ١$$

ملاحظات:

١ العلاقة بين الأطوال أ ، ب ، جـ في القطع الزائد هي : $جـ^٢ = أ^٢ + ب^٢$.

٢ طول المحور القاطع للقطع الزائد=٢أ ، وطول محوره المرافق = ٢ب .

٣ محورا القطع الزائد هما محورا تماثل له .

٤ $أ^٢$ هي مقام الحد الموجب في معادلة القطع الزائد .

تعريف:

الاختلاف المركزي للقطع الزائد، ويرمز له بالرمز هـ ، هو النسبة $\frac{جـ}{أ}$

لاحظ أنه في القطع الزائد تكون هـ > ١ ، بخلاف القطع الناقص حيث هـ < ١

مثال (١): عين كلاً من : الرأسين، والبؤرتين، وطولي المحورين، والاختلاف المركزي، للقطع الزائد $\frac{س^2}{16} - \frac{ص^2}{9} = 1$ ؛ ثم ارسم منحنى القطع .

الحل: تمثل المعادلة قطعاً زائداً سينياً مركزه (٠ ، ٠)، وفيه :

أ^2 = ١٦ ، ومنها أ = ٤

ب^2 = ٩ ، ومنها ب = ٣

جـ^2 = أ^2 + ب^2 = ١٦ + ٩ = ٢٥

∴ جـ = ٥

يمثل الشكل (٥-٣٣) منحنى القطع الزائد

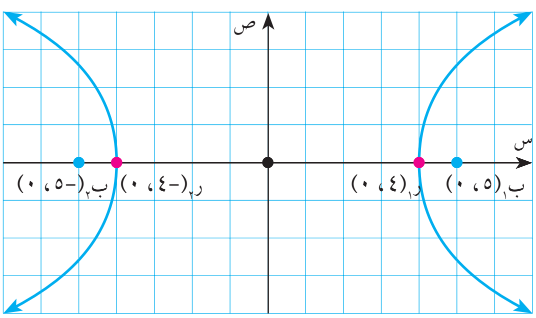
الرأسان هما (∓٤ ، ٠)

البؤرتان هما (∓٥ ، ٠)

طول المحور القاطع = ٢أ = ٢ × ٤ = ٨

طول المحور المرافق = ٢ب = ٢ × ٣ = ٦

الاختلاف المركزي هـ = $\frac{جـ}{أ} = \frac{5}{4}$



الشكل (٥-٣٣)

مثال (٢): ارسم منحنى القطع الزائد الذي بؤرتاه (٥ ، ٠) ، (-٥ ، ٠)، ورأساه (٣، ٠) ، (-٣ ، ٠)، ثم أوجد معادلته .

الحل: إحداثيا المركز = $\left(\frac{5 + -5}{2} ، \frac{0 + 0}{2}\right)$ = (٠، ٠)، وبما أن بؤرتيه (∓٥ ، ٠) واقعتان على محور السينات فهو قطع زائد سيني في وضع قياسي، انظر الشكل (٥-٣٤) .

معادلة القطع الزائد هي :

$$\frac{\text{س}^{٢}}{\text{أ}^{٢}} - \frac{\text{ص}^{٢}}{\text{ب}^{٢}} = ١$$

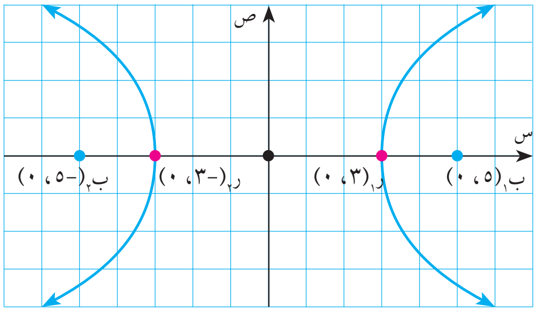
بعد الرأس عند المركز = أ = ٣

بعد البؤرة عن المركز = جـ = ٥

لكن $\text{جـ}^{٢} = \text{أ}^{٢} + \text{ب}^{٢}$

∴ $٢٥ = ٩ + \text{ب}^{٢}$ ، ومنها $\text{ب}^{٢} = ١٦$

∴ معادلة القطع الزائد هي : $\frac{\text{س}^{٢}}{٩} - \frac{\text{ص}^{٢}}{١٦} = ١$



الشكل (٥-٣٤)

مثال (٣): جد معادلة القطع الزائد الذي مركزه (٠ ، ٠)، والبعد بين بؤرتيه ١٢ ، واختلافه المركزي هـ = $\frac{٣}{٢}$ ، ومحوره القاطع منطبق على محور الصادات .

الحل:

بما أن مركز القطع الزائد هو (٠ ، ٠)، ومحوره القاطع منطبق على محور الصادات ،

إذن تتخذ معادلته الصورة :

$$\frac{\text{ص}^{٢}}{\text{أ}^{٢}} - \frac{\text{س}^{٢}}{\text{ب}^{٢}} = ١$$

٢جـ = ١٢ ، ومنها جـ = ٦

الاختلاف المركزي هـ = $\frac{\text{جـ}}{\text{أ}}$

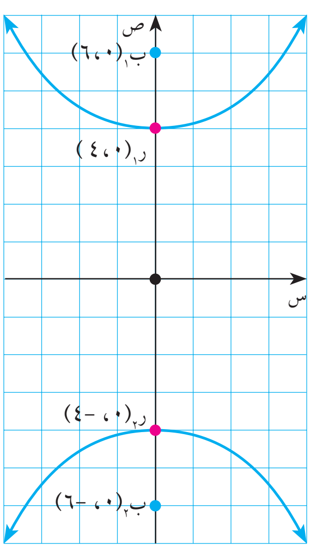
∴ $\frac{٣}{٢} = \frac{٦}{\text{أ}}$ ومنها أ = ٤

وبما أن $\text{جـ}^{٢} = \text{أ}^{٢} + \text{ب}^{٢}$

∴ $٣٦ = (٤)^{٢} + \text{ب}^{٢}$ ومنها $\text{ب}^{٢} = ٢٠$

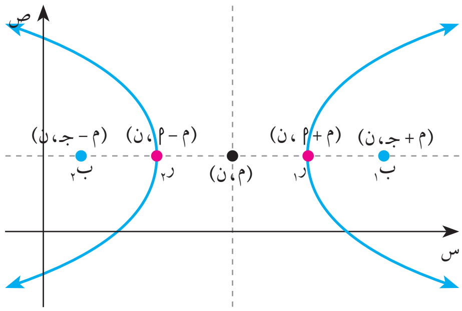
∴ المعادلة هي $\frac{\text{ص}^{٢}}{١٦} - \frac{\text{س}^{٢}}{٢٠} = ١$

انظر الشكل (٥-٣٥)



الشكل (٥-٣٥)

الحالة الثانية (القطع الزائد في وضع انسحاب)

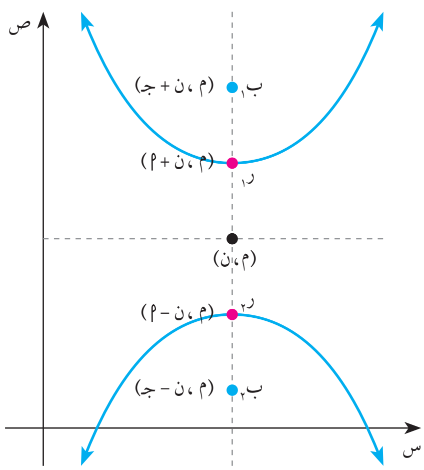


الشكل (٥–٣٦)

الوضع الأول: المركز (م ، ن)، والمحور القاطع موازٍ لمحور السينات (قطع زائد سيني)، كما في الشكل (٥–٣٦).

في هذا الوضع، تكون المعادلة على الصورة:

$$\frac{(\text{س} - \text{م})^{\text{٢}}}{\text{أ}^{\text{٢}}} - \frac{(\text{ص} - \text{ن})^{\text{٢}}}{\text{ب}^{\text{٢}}} = \text{١}$$



الشكل (٥–٣٧)

الوضع الثاني: المركز (م ، ن)، والمحور القاطع موازٍ لمحور الصادات (قطع زائد صادي)، كما في الشكل (٥ –٣٧).

في هذا الوضع، تكون المعادلة على الصورة:

$$\frac{(\text{ص} - \text{ن})^{\text{٢}}}{\text{أ}^{\text{٢}}} - \frac{(\text{س} - \text{م})^{\text{٢}}}{\text{ب}^{\text{٢}}} = \text{١}$$

مثال (٤): قطع زائد معادلته $\frac{(\text{س} - \text{٢})^{\text{٢}}}{\text{٩}} - \frac{(\text{ص} - \text{٣})^{\text{٢}}}{\text{٢٧}} = \text{١}$

ارسم شكلاً تقريبياً لمنحنى القطع موضحاً عليه عناصره الأساسية.

الحل: تمثل المعادلة قطعاً زائداً محوره القاطع موازٍ لمحور السينات ومركزه النقطة (٢ ، ٣)، وفيه:

أ٢ = ٩، ومنها أ = ٣

ب٢ = ٢٧ ، ومنها ب = ٣ $\sqrt{\text{٣}}$

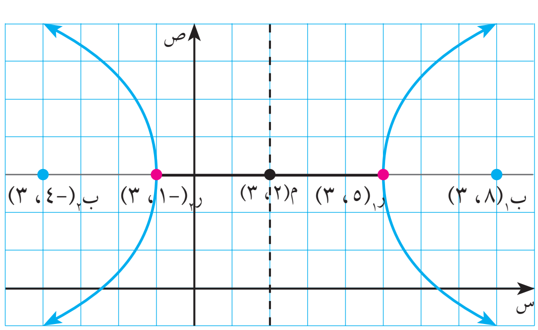
جـ٢ = أ٢ + ب٢

= ٩ + ٢٧ = ٣٦، ومنها جـ = ٦

انظر الشكل (٥–٣٨)

الرأسان هما: (٢+٣، ٣)، (٢–٣، ٣)

أي (٥ ، ٣) ، (–١ ، ٣)



الشكل (٥–٣٨)

البؤرتان هما: (٢ + ٦ ، ٣)، (٢ − ٦ ، ٣)

أي (٨ ، ٣) ، (−٤ ، ٣)

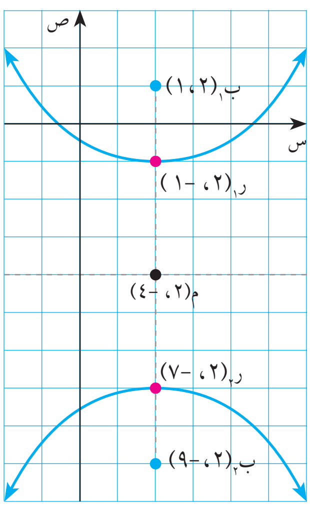
معادلة محوره القاطع هي ص = ٣ ، وطوله = ٢أ = ٢ × ٣ = ٦

معادلة محوره المرافق هي س = ٢، وطوله = ٢ب = ٢ × ٣$\sqrt{٣}$ = ٦$\sqrt{٣}$

مثال (٥): أوجد موضحاً بالرسم معادلة القطع الزائد الذي مركزه (٢ ، −٤)، وأحد رأسيه النقطة (٢ ، −١)، واختلافه المركزي $\frac{٥}{٣}$.

الحل:

بما أن مركز القطع الزائد هو النقطة (٢ ، −٤)، وأحد رأسيه النقطة (٢ ، −١)، فإن محوره القاطع موازٍ لمحور الصادات، لاحظ الشكل (٥−٣٩)، وتكون معادلته على الصورة.



الشكل (٥−٣٩)

$$\frac{(\text{ص} - \text{ن})^{٢}}{\text{أ}^{٢}} - \frac{(\text{س} - \text{م})^{٢}}{\text{ب}^{٢}} = ١$$

أي $$\frac{(\text{ص} + ٤)^{٢}}{\text{أ}^{٢}} - \frac{(\text{س} - ٢)^{٢}}{\text{ب}^{٢}} = ١$$

البعد بين المركز وأحد الرأسين = أ = ٣

هـ = $\frac{\text{جـ}}{\text{أ}}$ ، ∴ $\frac{٥}{٣} = \frac{\text{جـ}}{٣}$ ، ومنها جـ = ٥

جـ^{٢} = أ^{٢} + ب^{٢} ∴ ٢٥ = ٩ + ب^{٢}، ومنها ب^{٢} = ١٦

المعادلة هي: $$\frac{(\text{ص} + ٤)^{٢}}{٩} - \frac{(\text{س} - ٢)^{٢}}{١٦} = ١$$

مثال (٦): قطع زائد معادلته ص^{٢}−٤س^{٢}+٨س−٦ص−١١ = ٠ ، ارسم منحناه مبيناً عليه عناصره الأساسية .

الحل:

ص^{٢} − ٤س^{٢} + ٨س − ٦ص − ١١ = ٠

بإكمال المربع في س، ص، تصبح المعادلة:

(ص^{٢} − ٦ص + ٩) − ٤(س^{٢} − ٢س + ١) = ١١ + ٩ − ٤

(ص − ٣)^{٢} − ٤(س − ١)^{٢} = ١٦

بقسمة طرفي المعادلة على ١٦ تصبح :

$$\frac{(ص - ٣)^{٢}}{١٦} - \frac{(س - ١)^{٢}}{٤} = ١$$

وهذه المعادلة على الصورة $\frac{(ص - ن)^{٢}}{ﺃ^{٢}} - \frac{(س - م)^{٢}}{ب^{٢}} = ١$

وهي تمثل قطعاً زائداً محوره القاطع موازٍ لمحور الصادات، ومركزه (م، ن) = (١ ، ٣)، وفيه :

$ﺃ^{٢} = ١٦$ ، ومنها $ﺃ = ٤$

$ب^{٢} = ٤$، ومنها $ب = ٢$

$جـ^{٢} = ﺃ^{٢} + ب^{٢} = ١٦ + ٤ = ٢٠$

ومنها $جـ = \sqrt{٢٠} = ٢\sqrt{٥}$

الشكل (٥-٤٠) يمثل منحنى القطع الزائد ومنه نلاحظ :

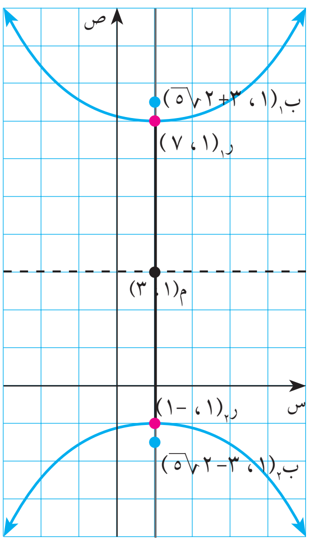
الرأسان هما : (١ ، ٣+٤)، (١ ، ٣ - ٤)

أي (١ ، ٧) ، (١ ، -١)

البؤرتان هما : (١ ، ٣+٢ $\sqrt{٥}$)، (١ ، ٣-٢ $\sqrt{٥}$)

معادلة المحور القاطع هي س = ١ ، وطوله = ٢ﺃ = ٢ × ٤ = ٨

معادلة المحور المرافق هي ص = ٣، وطوله = ٢ب = ٢ × ٢ = ٤



الشكل (٥-٤٠)

المعادلة العامة للقطوع المخروطية:

لاحظنا في دراسة هذه الوحدة :

١ أن معادلات جميع القطوع المخروطية سواءً أكانت دائرةً، أم قطعاً مكافئاً، أم قطعاً ناقصاً، أم قطعاً زائداً، تأخذ شكل المعادلة من الدرجة الثانية

ﺃس^{٢} + ب ص^{٢} + جـ س + د ص + هـ = ٠ ، حيث ﺃ ، ب ، جـ ، د ، هـ ∈ ح ، ﺃ ، ب لا يساويان الصفر معاً.

٢ باختيار مناسب للثوابت ﺃ ، ب ، جـ ، د ، هـ ، تمثل المعادلة السابقة :

- **أ** دائرة إذا كان ﺃ ≠ ٠ ، ب ≠ ٠ ، ﺃ = ب .
- **ب** قطعاً مكافئاً إذا كان ﺃ = ٠ أو ب = ٠ وليس كلاهما صفراً .
- **جـ** قطعاً ناقصاً إذا كان ﺃ ب > ٠ ، ﺃ ≠ ب
- **د** قطعاً زائداً إذا كان ﺃ ب < ٠

مثال (٧): المعادلات التالية تمثل قطوعاً مخروطية، صنف هذه القطوع إلى دائرة، أو قطع مكافئ، أو قطع ناقص، أو قطع زائد:

أ س^٢ + ص^٢ + ٢س − ٤ص = ٠ ب س^٢ + ٢س − ٨ص + ١٧ = ٠

جـ ٩س^٢+٤ص^٢+١٨س−١٦ص−١١ = ٠ د ٢س^٢−٤ص^٢+١٢س+٤٠ص−٩٠ =٠

الحل:

أ س^٢ + ص^٢ + ٢س − ٤ص = ٠ تمثل دائرة؛ وذلك لأن أ = ب ≠ ٠

ب س^٢ + ٢س − ٨ص + ١٧ = ٠ تمثل قطعاً مكافئاً؛ وذلك لأن أ ≠ ٠ ، ب = ٠

جـ ٩س^٢+٤ص^٢+١٨س−١٦ص−١١= ٠ تمثل قطعاً ناقصاً؛ وذلك لأن أب=٩×٤=٣٦>٠ ، أ≠ ب

د ٢س^٢−٤ص^٢+١٢س+٤٠ص−٩٠ = ٠ تمثل قطعاً زائداً؛ وذلك لأن أب=٢×−٤=−٨>٠

تمارين (٣-٥)

١ أوجد إحداثيات المركز، والرأسين، والبؤرتين، وكذلك طول كل من المحورين، والاختلاف المركزي في كلٍّ من القطوع الزائدة التالية، ثم ارسم المنحنى في كل حالة:

أ $\frac{س^٢}{١٤٤} - \frac{ص^٢}{٢٥} = ١$ ب $\frac{ص^٢}{٣٦} - \frac{س^٢}{٦٤} = ١$

جـ ٩س^٢ − ١٦ص^٢ = ١٤٤ د $\frac{(س-٢)^٢}{٣٦} - \frac{(ص+١)^٢}{١٣} = ١$

هـ $\frac{(ص+٢)^٢}{٨١} - \frac{(س+٤)^٢}{١٩} = ١$ و س^٢ + ٤س − ص^٢ − ٨ص − ١٦ = ٠

٢ أوجد معادلة القطع الزائد، ثم ارسم منحناه في كلٍّ من الحالات التالية:

أ البؤرتان (٠ ، ∓٢)، ويقطع محور الصادات عند ص = ∓١ .

ب الرأسان (٢ ، ∓٥)، والاختلاف المركزي هـ = ٢

جـ البؤرتان (∓٤ ، −٣) والاختلاف المركزي $\frac{٣}{٢}$.

٣ تتحرك نقطة ن (س ، ص) في المستوى الديكارتي بحيث يكون بعدها عند النقطة (٤ ، ٠) مثلي بعدها عن المستقيم س = ١ . بين أن المحل الهندسي للنقطة ن هو قطع زائد، وعين عناصره الأساسية.

٤ أوجد معادلة المماس والعمودي للقطع الزائد: $\frac{س^٢}{١٦} - \frac{ص^٢}{٤} = ١$ عند النقطة (−٥ ، $\frac{٣}{٢}$) الواقعة عليه.

تمارين عامة

١ اختر الإجابة الصحيحة لكلٍ من الأسئلة الآتية :

١ معادلة القطع المكافئ الذي رأسه (٠ ، ٠)، وبؤرته (٠ ، ٣)، هي :

أ) س^{٢} = ٤ص ب) س^{٢} = ١٢ص ج) ص^{٢} = ٤س د) ص^{٢} = ١٢س

٢ معادلة القطع المكافئ الذي رأسه (٠ ، ٠)، ودليله س = ٢ ، هي :

أ) ص^{٢} = ٢س ب) ص^{٢} = ٨س ج) ص^{٢} = −٤س د) ص^{٢} = −٨س

٣ معادلة القطع المكافىء الذي رأسه النقطة (٢ ، ٣)، ودليله س = ٤ ، هي :

أ) (ص − ٣) = ٤(س − ٢)^{٢} ب) (ص − ٣) = ١٦ (س − ٢)^{٢}

ج) (ص − ٣)^{٢} = −٨(س − ٢) د) (س − ٣)^{٢} = −٨(ص − ٢)

٤ معادلة القطع الناقص الذي رأساه (٢ ، ٠) ، (−٢ ، ٠)، واختلافه المركزي $\frac{١}{٢}$ ، هي :

أ) $\frac{\text{س}^{٢}}{٤} + \frac{\text{ص}^{٢}}{٢} = ١$ ب) $\frac{\text{ص}^{٢}}{٤} + \frac{\text{س}^{٢}}{٢} = ١$

ج) $\frac{(\text{س} - ٢)^{٢}}{٤} + \frac{(\text{ص} + ٢)^{٢}}{٢} = ١$ د) $\frac{\text{س}^{٢}}{٤} + \frac{\text{ص}^{٢}}{٣} = ١$

٥ الاختلاف المركزي للقطع الناقص $\frac{(\text{س} - ١)^{٢}}{٩} + \frac{(\text{ص} + ١)^{٢}}{٥} = ١$ ، هو :

أ) ٤ ب) $\frac{٤}{٩}$ ج) $\frac{٢}{٣}$ د) $\frac{٥}{٣}$

٦ بؤرتا القطع الناقص $\frac{(\text{س} - ١)^{٢}}{٩} + \frac{(\text{ص} + ١)^{٢}}{٥} = ١$ ، هما :

أ) (∓٢ ، ٠) ب) (∓٣ ، ٠) ج) (∓٣ ، −١) د) (٣ ، −١) ، (−١ ، −١)

٧ معادلة الدليل للقطع المكافئ ص^{٢} − ٤س − ٤ = ٠ ، هي :

أ) س = ٢ ب) س = −٢ ج) ص = −٢ د) س = −١

٨ معادلة القطع المكافىء الذي رأسه (١ ، ١)، ودليله ص = −٢ ، هي :

أ) (ص − ١)^{٢} = −٨ (س − ١) ب) −١٢ (ص − ١) = (س − ١)^{٢}

ج) ص − ١ = ١٢(س − ١)^{٢} د) ١٢ (ص − ١) = (س − ١)^{٢}

٩ إحداثيات رأسي القطع الزائد ٢(ص + ٢)^{٢} − ٣(س − ١)^{٢} = ١٨ ، هي :

أ) (∓١ ، ٢) ب) (∓٣ ، ٠) ج) (١ ، ١) ، (١ ، −٥) د) (١ ، ٣) ، (١ ، −٣)

١٠ بؤرتا القطع الزائد $\frac{(\text{س} + ٢)^{٢}}{٤٥} - \frac{(\text{ص} - ٣)^{٢}}{٤} = ١$ ، هما :

أ) (∓٧ ، ٠) ب) (∓٧ ، ٣) ج) (٥ ، ٣) ، (−٩ ، ٣) د) (٧ ، ∓٣)

١١ معادلة القطع الزائد الذي مركزه (٠ ، ٠)، وإحدى بؤرتيه (٢ ، ٠)، ويمر بالنقطة (٢ ، ٣)، هي :

أ) س^{٢} – ٣ص^{٢} = ٣   ب) ٥س^{٢} – ٤ص^{٢} = ٢

جـ) ٣س^{٢} – ص^{٢} = ٣   د) ص^{٢} – ٣س^{٢} = ٣

١٢ الاختلاف المركزي للقطع الزائد $\frac{(س - ١)^{٢}}{٤} - \frac{(ص + ٣)^{٢}}{٢١} = ١$ ، هو :

أ) ٥   ب) $\frac{٢٥}{٤}$ جـ) $\frac{٥}{٢}$ د) $\frac{٢}{٥}$

١٣ المعادلة ٥ص^{٢} – ٢٠س – ١٠ص + ٥ = صفر تمثل :

أ) دائرةً   ب) قطعاً مكافئاً   جـ) قطعاً زائداً   د) قطعاً ناقصاً

١٤ معادلة محور التماثل للقطع المكافىء ص = ٲس^{٢} + ب س + جـ ، هي :

أ) س = – $\frac{ب}{٢ٲ}$ ب) س = – $\frac{ب}{ٲ}$ جـ) س = $\frac{ب}{٢ٲ}$ د) ص = $\frac{ب}{ٲ}$

٢ ارسم كلاً من القطوع المخروطية التالية مبيناً عناصرها الأساسية :

أ) س^{٢} – ٢ص^{٢} + ٨ص = ١٠   ب) ٢س^{٢} – ٦ص^{٢} + ٤س + ١٢ص = ١٠

جـ) س^{٢} + ٢ص + ٨س = ١٠   د) ٨س^{٢} + ٨ص^{٢} + ١٦س – ٨ص = ١

٣ أوجد معادلة المماس والعمودي لكلٍّ من القطوع المخروطية التالية عند النقطة المعطاة في كل حالة :

أ) ص^{٢} + ٦س = ١٠ ، (–١ ، ٤)   ب) ٢س^{٢} + ص^{٢} = ٩ ، (–٢ ، ١)

جـ) ٢س^{٢} – ٣ص^{٢} = ٥ ، (٢ ، –١).

٤ أوجد معادلة المحل الهندسي لنقطة تتحرك في المستوى الديكارتي بحيث يكون بعدها عن النقطة (٠ ، ٤) مساوياً $\frac{٢}{٣}$ بعدها عن المستقيم ص = ٩ .

٥ مماسان للقطع الناقص ٩س^{٢}+٤ص^{٢}= ٣٦ يقطعان محور الصادات في النقطة (٠،٦). أوجد إحداثيات نقطتي التماس .

٦ أوجد النقطة/ النقط الواقعة على الخط المستقيم س + ٢ص = ٣ ، والتي يبعد كل منها ٥ وحدات عن النقطة (١ ، ٦)

٧ أوجد معادلة المماس للقطع المكافىء ص^{٢} = ١٢س ، والذي يوازي المستقيم ص = س – ٣ ، وعين نقطة التماس .

٨ أوجد معادلة القطع المكافىء الذي يمر بالنقاط (–١ ، ٢)، (١ ، –١)، (٢ ، ١)، ومحوره يوازي محور السينات .

٩ أوجد معادلة القطع الناقص الذي محوراه هما المحوران الإحداثيان ، ويمر بالنقطتين (٦ ، ٢) ، (–٤ ، ٣) .

١٠ أوجد حجم الجسم الناتج عن دوران المنطقة المحصورة بالقطع الناقص $\frac{س^{٢}}{٩} + \frac{ص^{٢}}{٤} = ١$ دورة كاملة حول محور السينات .

١١ يدور قمر صناعي حول الأرض في مدارٍ على هيئة قطع ناقص ، مركز الأرض في إحدى بؤرتيه ، فإذا كان أصغر بُعد له عن الأرض = ٢٣٠ ميل ، وأكبر بُعد له عن الأرض = ١٧٠٠ ميل ، فما مقدار الاختلاف المركزي للمدار إذا كان نصف قطر الأرض = ٤٠٠٠ ميل؟

الوحدة

٦

الاحتمالات

٦-١ الاحتمال المشروط واستقلال الحوادث (Conditional Probability & Independent Events)

تمهيد:

تعرفت سابقاً مفاهيم أساسية في نظرية الاحتمالات، وقوانين وعلاقات تستخدم في حساب احتمالات بعض الحوادث؛ وتثبيتاً لهذه المفاهيم والقوانين ولأهميتها في تقديم هذه الوحدة، نذكرك بأهمها فيما يلي:

- الفراغ العيني Ω هو مجموعة جميع النواتج الممكنة لتجربة عشوائية ما.
- الحادث ح هو أية مجموعة جزئية من الفراغ العيني Ω.
- احتمال الحادث ح أي ل(ح)، هو عدد حقيقي يمثل فرصة وقوع الحادث بحيث:

١ $\cdot \leq$ ل(ح) $\leq$ ١ ، $\forall$ ح $\subseteq \Omega$

٢ ل(Ω) = ١

٣ ل(ح$_١ \cup$ ح$_٢$) = ل(ح$_١$) + ل(ح$_٢$) ، حيث ح$_١ \cap$ ح$_٢$ = $\varnothing$، أي أن الحادثين منفصلان.

- فراغ الاحتمال المنتظم هو فراغ الاحتمال الذي تتساوى فيه احتمالات جميع نواتج التجربة، وفي هذه الحالة يكون ل(ح) = $\dfrac{\text{عدد عناصر ح}}{\text{عدد عناصر } \Omega}$ = $\dfrac{\text{ع(ح)}}{\text{ع}(\Omega)}$

- قوانين الاحتمال:

١ ل($\varnothing$) = ٠ ، أي أن احتمال الحادث المستحيل يساوي صفراً

٢ ل($\overline{\text{ح}}$) = ١ − ل(ح) ، أي أن احتمال الحادث المتمم = ١ − احتمال الحادث

٣ ل(ح$_١$ − ح$_٢$) = ل(ح$_١$) − ل(ح$_١ \cap$ ح$_٢$)

٤ ل(ح$_١ \cup$ ح$_٢$) = ل(ح$_١$) + ل(ح$_٢$) − ل(ح$_١ \cap$ ح$_٢$) ، $\forall$ ح$_١$ ، ح$_٢ \subseteq \Omega$

وفضلاً عن المفاهيم والقوانين السابقة، كنت قد تعرفت أيضا، بصورة مختصرة، مفهومي الاحتمال المشروط، واستقلال الحوادث، ونظراً لأهمية هذين المفهومي، فإننا سنعالجهما بشيء من التفصيل فيما يلي:

الاحتمال المشروط:

كما هو معلوم، يتطلب حساب احتمال حادث معين مثل $ح_1$ معرفة العلاقة بين نواتج الحادث $ح_1$ وجميع النواتج في الفراغ العيني Ω للتجربة العشوائية. غير أنه في بعض الأحيان تتوافر معلومات بأن حادثاً ما مثل $ح_2$ قد وقع. في هذه الحالة، قد يكون لوقوع الحادث $ح_2$ تأثير على احتمال وقوع $ح_1$، ويمكن حساب احتمال وقوع $ح_1$ بشرط وقوع $ح_2$ من خلال معرفة العلاقة بين نواتج الحادث $ح_1$ ونواتج الحادث $ح_2$.

تعريف: (الاحتمال المشروط)

إذا كان $ح_1$ ، $ح_2$ حادثين في فراغ عيني Ω بحيث $ل(ح_2) \neq ٠$ ، فإن احتمال وقوع $ح_1$ بشرط وقوع $ح_2$، ويرمز له بالرمز $ل(ح_1 / ح_2)$، يعرف هكذا:

$$ل(ح_1 / ح_2) = \frac{ل(ح_1 \cap ح_2)}{ل(ح_2)} \text{ ، } ل(ح_2) \neq ٠$$

وفي حالة فراغ الاحتمال المنتظم يكون $ل(ح_1 / ح_2) = \frac{ع(ح_1 \cap ح_2)}{ع(ح_2)}$

مثال (١): عند إلقاء حجر نرد منتظم مرتين متتاليتين، ما احتمال ألا يزيد عدد النقط في الرمية الأولى على ٤ إذا علمت أن الفرق المطلق بين العددين الظاهرين يساوي ٢؟

الحل:

$\Omega = \{(١ ، ١) ، (٢ ، ١) ، . . . ، (٦ ، ٦)\}$. عدد عناصر $(\Omega) = ٣٦$

نفرض أن $ح_1$: حادث ألا يزيد عدد النقط في الرمية الأولى على ٤

$ح_2$: حادث الفرق المطلق بين العددين الظاهرين يساوي ٢

$ح_2 = \{(١ ، ٣)، (٢ ، ٤)، (٣ ، ١)، (٣ ، ٥)، (٤ ، ٢)، (٤ ، ٦)، (٥ ، ٣)، (٦ ، ٤)\}$

مجموعة نواتج $ح_2$ التي لا يزيد المسقط الأول فيها على ٤ تساوي

$ح_1 \cap ح_2 = \{(١ ، ٣)، (٢ ، ٤)، (٣ ، ١)، (٣ ، ٥)، (٤ ، ٢)، (٤ ، ٦)\}$

$$\therefore \quad ل(ح_1 / ح_2) = \frac{ل(ح_1 \cap ح_2)}{ل(ح_2)} = \frac{\frac{٦}{٣٦}}{\frac{٨}{٣٦}} = \frac{٦}{٨} = \frac{٣}{٤}$$

حل آخر: بما أن فراغ الاحتمال منتظم فإن

$$ل(ح_1 / ح_2) = \frac{ع(ح_1 \cap ح_2)}{ع(ح_2)} = \frac{٦}{٨} = \frac{٣}{٤}$$

مثال (٢): إذا كان $ح_١$ ، $ح_٢ \subseteq \Omega$، بحيث $ل(ح_١) = ٠,٦$ ، $ل(ح_٢) = ٠,٧$ ، $ل(ح_٢/ح_١) = ٠,٧٥$ ، فأوجد:

أ $ل(ح_١ \cup ح_٢)$ ب $ل(ح_١/ح_٢)$ جـ $ل(\bar{ح}_٢/ح_١)$

الحل:

أ $ل(ح_٢ / ح_١) = \frac{ل(ح_٢ \cap ح_١)}{ل(ح_١)}$

$\therefore ٠,٧٥ = \frac{ل(ح_٢ \cap ح_١)}{٠,٦}$

$\therefore ل(ح_٢ \cap ح_١) = ٠,٧٥ \times ٠,٦ = ٠,٤٥ = ل(ح_١ \cap ح_٢)$

$ل(ح_١ \cup ح_٢) = ل(ح_١) + ل(ح_٢) - ل(ح_١ \cap ح_٢)$

$= ٠,٦ + ٠,٧ - ٠,٤٥ = ٠,٨٥$

ب $ل(ح_١ / ح_٢) = \frac{ل(ح_١ \cap ح_٢)}{ل(ح_٢)}$

$= \frac{٠,٤٥}{٠,٧٠} = \frac{٤٥}{٧٠} = \frac{٩}{١٤}$

جـ $ل(\bar{ح}_٢ / ح_١) = \frac{ل(\bar{ح}_٢ \cap ح_١)}{ل(ح_١)} = \frac{ل(ح_١ - ح_٢)}{ل(ح_١)}$

$= \frac{ل(ح_١) - ل(ح_١ \cap ح_٢)}{ل(ح_١)}$

$= \frac{٠,٦ - ٠,٤٥}{٠,٦} = \frac{٠,١٥}{٠,٦٠} = ٠,٢٥$

احتمال تقاطع حادثين:

نعلم أن $ل(ح_١ / ح_٢) = \frac{ل(ح_١ \cap ح_٢)}{ل(ح_٢)}$ ، $ل(ح_٢ / ح_١) = \frac{ل(ح_٢ \cap ح_١)}{ل(ح_١)}$

وبإجراء عملية الضرب التبادلي، وبملاحظة أن $ل(ح_١ \cap ح_٢) = ل(ح_٢ \cap ح_١)$، نحصل على القاعدة التالية:

قاعدة:

$ل(ح_١ \cap ح_٢) = ل(ح_١) \times ل(ح_٢ / ح_١) = ل(ح_٢) \times ل(ح_١ / ح_٢)$

مثال (٣): يحتوي صندوق على أربع كرات بيضاء وكرتين سوداوين؛ سحبت منه كرتان على التوالي دون إرجاع، ما احتمال أن تكون:

أ الأولى بيضاء والثانية بيضاء؟ ب كلتاهما سوداء؟ جـ مختلفتي اللون؟

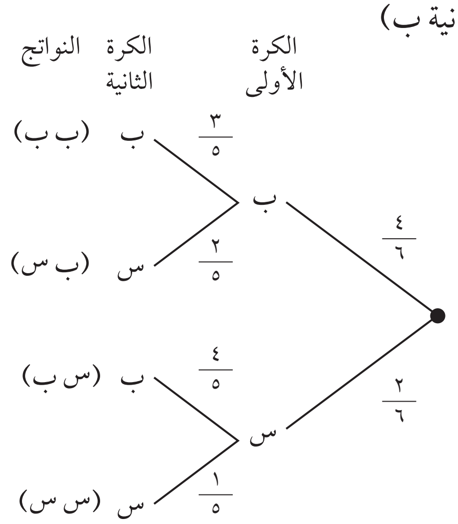
الحل:

أ ل(الأولى ب والثانية ب) = ل(الأولى ب ∩ الثانية ب)

= ل(الأولى ب) × ل(الثانية ب/ الأولى ب)

$= \frac{٤}{٦} \times \frac{٣}{٥} = \frac{١٢}{٣٠} = ٠,٤$

انظر الشكل (٦-١)



الشكل (٦-١)

ب ل(كلتاهما سوداء)

= ل(الأولى س ∩ الثانية س)

= ل(الأولى س) × ل (الثانية س/ الأولى س)

$= \frac{٢}{٦} \times \frac{١}{٥} = \frac{١}{١٥}$

جـ ل (مختلفتي اللون)

= ل(الأولى بيضاء والثانية سوداء أو الأولى سوداء والثانية بيضاء)

= ل(ب س) + ل(س ب) (الحادثان منفصلان)

$= \frac{٤}{٦} \times \frac{٢}{٥} + \frac{٢}{٦} \times \frac{٤}{٥} = \frac{١٦}{٣٠} = \frac{٨}{١٥}$

مثال (٤): يحتوي صندوق على ١٠ كرات بيضاء وخمس كرات حمراء، سحبت منه ثلاث كرات على التوالي دون إرجاع، ما احتمال أن تكون الكرات:

أ جميعها بيضاء؟ ب اثنتان فقط منها بيضاوين؟

الحل:

أ ل(جميع الكرات بيضاء) = ل(ب ب ب) $= \frac{١٠}{١٥} \times \frac{٩}{١٤} \times \frac{٨}{١٣} = \frac{٢٤}{٩١}$

ب ل(اثنتان فقط منها بيضاوين) = ل(ب ب ح، ب ح ب ، ح ب ب)

$= \frac{١٠}{١٥} \times \frac{٩}{١٤} \times \frac{٥}{١٣} + \frac{١٠}{١٥} \times \frac{٥}{١٤} \times \frac{٩}{١٣} + \frac{٥}{١٥} \times \frac{١٠}{١٤} \times \frac{٩}{١٣}$

$= ٣ \times \frac{١٥}{٩١} = \frac{٤٥}{٩١}$

مثال(٥): إذا كان احتمال أن يفوز ملاكم في مباراة هو ٠,٧ ، واحتمال أن يعتزل الملاكمة إذا فاز فيها هو ٠,٢ ، واحتمال أن يعتزل الملاكمة إذا لم يفز فيها هو ٠,٤ ، فاحسب احتمال :

أ أن يفوز في هذه المباراة ولا يعتزل الملاكمة . ب ألاّ يفوز في المباراة ويعتزل .

الحل:

نفرض أن ف حادث فوز الملاكم في هذه المباراة

وأن ع حادث اعتزاله الملاكمة ، فيكون :

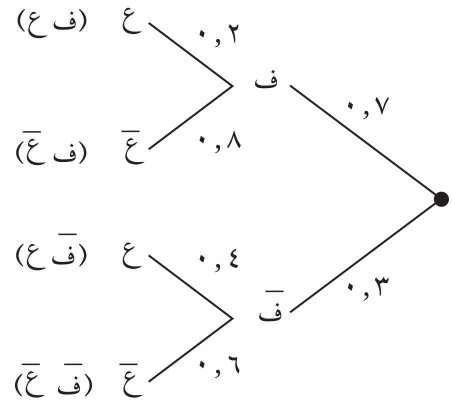
أ $\text{ل}(\text{ف} \cap \overline{\text{ع}}) = \text{ل}(\text{ف}) \times \text{ل}(\overline{\text{ع}} \,/\, \text{ف})$

$= ٠,٧ \times ٠,٨ = ٠,٥٦$

انظر الشكل(٦-٢)

ب $\text{ل}(\overline{\text{ف}} \cap \text{ع}) = \text{ل}(\overline{\text{ف}}) \times \text{ل}(\text{ع} \,/\, \overline{\text{ف}})$

$= ٠,٣ \times ٠,٤ = ٠,١٢$



الشكل (٦-٢)

استقلال الحوادث

لاحظنا في الأمثلة السابقة أن وقوع أحد حادثين كان له تأثير في احتمال وقوع الآخر ، غير أن هذا ليس قاعدة ثابتة دائماً ؛ إذ توجد حوادث لا يؤثر وقوع أحدها على احتمال وقوع الآخر ، وفي هذه الحالة نقول إن هذه الحوادث مستقلة .

تعريف (استقلال الحوادث):

نقول إن الحادث ح_1 مستقل عن الحادث ح_2 إذا كان وقوع ح_2 ، أو عدم وقوعه ، لا يؤثر في احتمال وقوع ح_1 .

أي أن $\text{ل}(\text{ح}_1 \,/\, \text{ح}_2) = \text{ل}(\text{ح}_1)$

وحيث إن $\text{ل}(\text{ح}_1 \,/\, \text{ح}_2) = \dfrac{\text{ل}(\text{ح}_1 \cap \text{ح}_2)}{\text{ل}(\text{ح}_2)}$

$\therefore \text{ل}(\text{ح}_1) = \dfrac{\text{ل}(\text{ح}_1 \cap \text{ح}_2)}{\text{ل}(\text{ح}_2)}$ ومنها $\text{ل}(\text{ح}_1 \cap \text{ح}_2) = \text{ل}(\text{ح}_1) \times \text{ل}(\text{ح}_2)$

وتؤخذ هذه القاعدة تعريفاً آخر للاستقلال

تعريف:

يكون ح_1 ، ح_2 مستقلين $\Leftrightarrow$ $\text{ل}(\text{ح}_1 \cap \text{ح}_2) = \text{ل}(\text{ح}_1) \times \text{ل}(\text{ح}_2)$

مثال (٦): يحتوي صندوق على أربع كرات بيضاء وكرة واحدة سوداء، سحبت منه كرتان على التوالي مع الإرجاع، ما احتمال أن تكون:

أ كلتاهما بيضاء؟ ب احداهما بيضاء والأخرى سوداء؟

الحل:

أ ل(كلتاهما بيضاء) = ل(الأولى ب $\cap$ الثانية ب)

= ل(الأولى ب) × ل(الثانية ب) = $\frac{٤}{٥} \times \frac{٤}{٥} = \frac{١٦}{٢٥}$

ب ل(إحداهما بيضاء والأخرى سوداء)

= ل(الأولى بيضاء والثانية سوداء) + ل(الأولى سوداء والثانية بيضاء)

= ل(ب س) + ل(س ب) = $\frac{٤}{٥} \times \frac{١}{٥} + \frac{١}{٥} \times \frac{٤}{٥} = \frac{٤}{٢٥}$

ملاحظة:

إذا كانت $ح_١$ ، $ح_٢$ ، . . . $ح_ن$ حوادث مستقلة فإن:

ل($ح_١ \cap ح_٢ \cap . . . \cap ح_ن$) = ل($ح_١$) × ل($ح_٢$) × . . . × ل($ح_ن$)

مثال (٧): يطلق رجل النار على هدف ثابت، فإذا كان احتمال اصابته للهدف في كل مرة يطلق فيها النار = $\frac{١}{٣}$. أطلق الرجل على الهدف أربع مرات:

أ ما احتمال أن يصيب الهدف في المرة الأولى فقط؟

ب ما احتمال أن يصيب الهدف في المرتين الأولى والأخيرة فقط؟

جـ ما احتمال أن يصاب الهدف؟

الحل: نفرض أن ص حادث أن يصيب الهدف ، خ حادث أن يخطئ الهدف.

احتمال أن يصيب الرجل الهدف في كل مرة ثابت = $\frac{١}{٣}$

أي أن احتمال الإصابة في رمية ما لايتأثر بإصابته في رمية سابقة، أي أن الحوادث مستقلة

أ ل(أن يصيب الهدف في المرة الأولى فقط)= ل(ص خ خ خ)

= $\frac{١}{٣} \times \left(\frac{٢}{٣}\right)^{٣} = \frac{٨}{٨١}$

ب ل(أن يصيب الهدف في المرتين الأولى والأخيرة فقط) = ل (ص خ خ ص)

= $\frac{١}{٣} \times \left(\frac{٢}{٣}\right)^{٢} \times \frac{١}{٣} = \frac{٤}{٨١}$

جـ ل(أن يصاب الهدف) = ١ - ل (خ خ خ خ) = ١ - $\left(\frac{٢}{٣}\right)^{٤} = \frac{٦٥}{٨١}$

تمارين (٦-١)

١ إذا كان ح$_١$ ، ح$_٢$ ⊆ Ω ، بحيث ل(ح$_١$) = ٠,٧ ، ل(ح$_٢$) = ٠,٢٥ ، ل(ح$_١$ − ح$_٢$) = ٠,٥٥ ، فأوجد:

أ ل(ح$_١$ / ح$_٢$)
ب ل($\overline{ح}_١$ / $\overline{ح}_٢$)

٢ عند إلقاء قطعة نقد منتظمة أربع مرات، ما احتمال أن تظهر على الوجوه العلوية صورتان على الأقل إذا ظهرت صورة في المرّة الأولى؟

٣ إذا كان ح$_١$ ، ح$_٢$ ⊆ Ω ، بحيث ل(ح$_١$) = ٢ل(ح$_٢$) = ٣ل(ح$_١$ ∩ ح$_٢$)،

أ فأوجد ل(ح$_١$ / ح$_٢$)
ب وإذا كان ح$_١$ ، ح$_٢$ مستقلين فأوجد ل(ح$_١$).

٤ إذا كانت نتيجة امتحان الثانوية العامة في سنة ما لطلبة إحدى المحافظات الفلسطينية كالآتي:

الفرع	الأدبي	العلمي	التجاري	الصناعي
عدد الطلبة	١٣٠٠	١٠٠٠	٩٠٠	٨٠٠
نسبة النجاح	٪٧٠	٪٧٥	٪٨٠	٪٦٥

واختير أحد المتقدمين عشوائياً

أ ما احتمال أن يكون من الفرع التجاري إذا علم أنه ناجح؟

ب ما احتمال ألا يكون من الفرع العلمي إذا علم أنه راسب؟

٥ صندوقان في الأول سبع كرات حمراء وثلاث كرات بيضاء، وفي الثاني كرتان حمراوان وكرة واحدة بيضاء وكرة واحدة سوداء؛ نقلت كرة واحدة من الصندوق الأول إلى الصندوق الثاني ثم سحبت من الصندوق الثاني كرة واحدة؛ احسب احتمال أن تكون:

أ الكرة المنقولة بيضاء والمسحوبة حمراء
ب الكرة المنقولة والمسحوبةمن اللون نفسه

٦ إذا كان ح$_١$ ، ح$_٢$ حادثين في فراغ عيني، بحيث ل(ح$_١$) = ٠,٧ ، ل(ح$_٢$) = ٠,٤ ، ل(ح$_١$ ∪ ح$_٢$) = ٠,٨٢

أ هل ح$_١$ ، ح$_٢$ مستقلان ؟
ب هل ح$_١$ ، ح$_٢$ منفصلان؟

٧ يحتوي صندوق على ٢٠ كرة متشابهة، تحمل خمس كرات منها الرقم ١ ، ويحمل كل من الكرات الباقية الرقم ٢ . سحبت منه كرتان على التوالي مع الإرجاع، ما احتمال أن يكون مجموع الرقمين الظاهرين يساوي ٣ ؟

٨ عند إلقاء قطعة نقود خمس مرات، ما احتمال أن تظهر صورة مرّة واحدة على الأقل؟

٩ تقدم ثلاثة طلاب لحل سؤال في الاحتمالات كل على حدة، فإذا كان احتمال أن يحله الطالب الأول هو ٠,٨ ، واحتمال أن يحله الثاني هو ٠,٧ ، واحتمال أن يحله الثالث ٠,٦ ، فما احتمال أن يُحّل السؤال؟

١٠ إذا كان ح$_١$ ، ح$_٢$ حادثين مستقلين، فأثبت أن:

أ $\overline{ح}_١$ ، $\overline{ح}_٢$ مستقلان
ب ح$_١$ ، $\overline{ح}_٢$ مستقلان

٦-٢ نظرية بيز (Bayes' Theorem)

درسنا في البند السابق احتمال وقوع حادث معين بشرط وقوع حادث آخر، غير أنه يحدث في كثيرٍ من التجارب العشوائية أن يتأثر احتمال وقوع حادث مثل ح بوقوع أكثر من حادث من حوادث الفراغ العيني Ω، وسنعالج في هذا البند حساب هذا الاحتمال عند توافر شروط معينة .

تعريف:

يقال إن الحوادث غير الخالية $ح_١ ، ح_٢ ، ح_٣ ، \cdots ، ح_ن \subseteq \Omega$ شاملة ومتباعدة إذا وفقط إذا توافر الشرطان التاليان معاً :

١ $ح_١ \cup ح_٢ \cup ح_٣ \cup \ldots \cup ح_ن = \Omega$ .... (الحوادث شاملة)

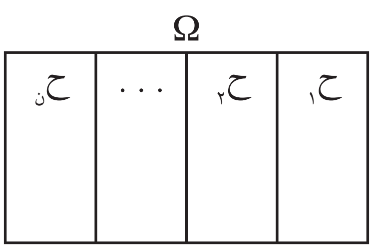
٢ $ح_ر \cap ح_ي = \varnothing$ ، $\forall$ ر ، ي $\in \{١ ، ٢ ، ٣ ، \ldots ، ن\}$، ر $\neq$ ي .... (الحوادث متباعدة)

ومن هذا التعريف يتبين أن :

$$ل(ح_١ \cup ح_٢ \cup \ldots \cup ح_ن) = ل(\Omega) = ١$$

$$\therefore\ ل(ح_١) + ل(ح_٢) + \ldots + ل(ح_ن) = ١$$

انظر الشكل (٦-٣)



الشكل (٦-٣)

مثال (١): إذا كانت $ح_١ ، ح_٢ ، ح_٣$ حوادث متباعدة وشاملة في فراغ عيني Ω، بحيث $ل(ح_١) = ٢ل(ح_٢) = ٥ل(ح_٣)$ ، فأوجد $ل(ح_١)$.

الحل:

$$ل(ح_١) + ل(ح_٢) + ل(ح_٣) = ١$$

وبفرض أن $ل(ح_١) = س$ يكون $ل(ح_٢) = \frac{س}{٢}$ ، $ل(ح_٣) = \frac{س}{٥}$

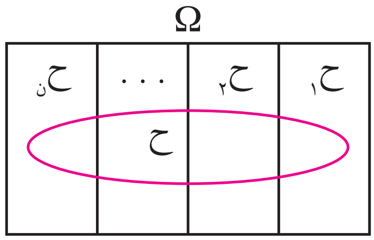
$$\therefore\ س + \frac{س}{٢} + \frac{س}{٥} = ١ \quad \text{ومنها} \quad س = \frac{١٠}{١٧}$$

$$\therefore\ ل(ح_١) = \frac{١٠}{١٧}$$

نظرية الاحتمال الكلي Total Probability Theorem

إذا كانت $ح_١$ ، $ح_٢$ ، $ح_٣$ ، . . . $ح_ن$ حوادث متباعدة وشاملة في فراغ عيني Ω ، وكان $ح \subseteq \Omega$

فإن $ل(ح) = \sum_{ر=١}^{ن} ل(ح_ر) \times ل(ح / ح_ر)$



الشكل (٦-٤)

البرهان:

$ح = (ح_١ \cap ح) \cup (ح_٢ \cap ح) \cup . . . \cup (ح_ن \cap ح)$

لاحظ الشكل (٦-٤).

وبما أن $ح_١ \cap ح$ ، $ح_٢ \cap ح$ ، . . . ، $ح_ن \cap ح$ متباعدة

$\therefore$ $ل(ح) = ل(ح_١ \cap ح) + ل(ح_٢ \cap ح) + . . . + ل(ح_ن \cap ح)$

$= ل(ح_١) \times ل(ح / ح_١) + ل(ح_٢) \times ل(ح / ح_٢) + . . . + ل(ح_ن) \times ل(ح / ح_ن)$

$= \sum_{ر=١}^{ن} ل(ح_ر) \times ل(ح / ح_ر)$

مثال (٢): يعمل في مكتب طباعة ثلاثة أشخاص أ ، ب ، جـ ، حيث يطبع أ ٧٠٪ من خطابات المكتب، ويطبع ب ٢٠٪ منها، ويطبع جـ باقي الخطابات؛ فإذا كانت ٠,٠٥ ، ٠,٠٧ ، ٠,١٥ من خطابات أ ، ب، جـ على الترتيب بها أخطاء، واختير أحد خطابات المكتب عشوائياً، فما احتمال أن يكون به خطأ؟

الحل:

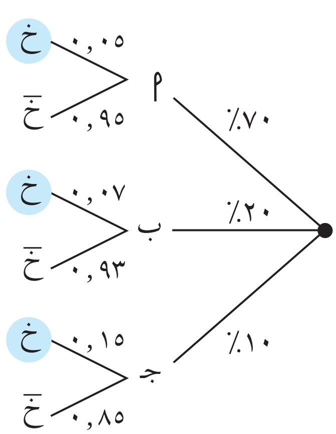
بفرض أن $ح_١$ حادث أن يطبع أ الخطاب

$ح_٢$ حادث أن يطبع ب الخطاب

$ح_٣$ حادث أن يطبع جـ الخطاب

وأن ح حادث وجود خطأ في الخطاب المختار،

تكون الحوادث $ح_١$ ، $ح_٢$ ، $ح_٣$ حوادث شاملة ومتباعدة



الشكل (٦-٥)

$\therefore$ $ل(ح) = ل(ح_١) \times ل(ح / ح_١) + ل(ح_٢) \times ل(ح / ح_٢) + ل(ح_٣) \times ل(ح / ح_٣)$

$= ٠,٧ \times ٠,٠٥ + ٠,٢ \times ٠,٠٧ + ٠,١ \times ٠,١٥ = ٠,٠٦٤$

انظر الشكل (٦-٥)

نظرية بيز Bayes' Theorem

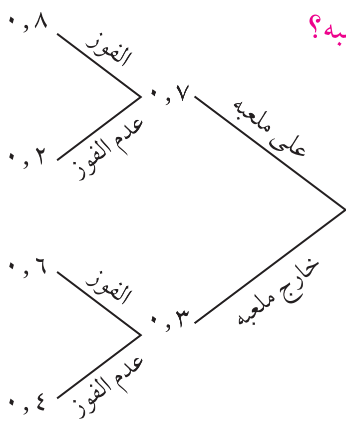
إذا كانت $ح_١$ ، $ح_٢$ ، . . . $ح_ن$ حوادث شاملة ومتباعدة في الفراغ العيني Ω ، وكان $ح \subseteq \Omega$ فإن :

$$ل(ح_ر / ح) = \frac{ل(ح_ر) \times ل(ح / ح_ر)}{\sum_{ي=١}^{ن} ل(ح_ي) \times ل(ح / ح_ي)}$$

مثال (٣): يلعب فريق كرة قدم ٧٠٪ من مبارياته على ملاعبه والباقي خارج ملاعبه ، فإذا كان احتمال أن يفوز على ملاعبه ٠,٨ واحتمال أن يفوز خارج ملاعبه هو ٠,٦ . إذا لعب هذا الفريق مباراة واحدة .

أ ما احتمال أن يفوز فيها؟

ب إذا علم أنه قد فاز في المباراة فما احتمال أن تكون على ملاعبه؟



الشكل (٦-٦)

الحل:

نفرض أن $ح_١$ حادث المباراة على ملاعب الفريق

$ح_٢$ حادث المباراة خارج ملاعب الفريق

$ح$ حادث فوز الفريق ،

يكون الحادثان $ح_١$ ، $ح_٢$ حادثين شاملين ومتباعدين

أ $ل(ح) = ل(ح_١) \times ل(ح / ح_١) + ل(ح_٢) \times ل(ح / ح_٢)$

$= ٠,٧ \times ٠,٨ + ٠,٣ \times ٠,٦ = ٠,٥٦ + ٠,١٨ = ٠,٧٤$

ب ل(المباراة على ملاعبه / فاز في المباراة) $= ل(ح_١ / ح)$

$$= \frac{ل(ح_١) \times ل(ح / ح_١)}{\sum_{ي=١}^{٢} ل(ح_ي) \times ل(ح / ح_ي)} = \frac{٠,٧ \times ٠,٨}{٠,٧٤} = \frac{٢٨}{٣٧}$$

مثال (٤): ثلاث علب تحتوي على مصابيح كهربائية ، في العلبة الأولى ثمانية مصابيح منها ثلاثة صالحة ، وفي العلبة الثانية ثمانية مصابيح منها أربعة صالحة ، وفي العلبة الثالثة أربعة مصابيح منها ثلاثة صالحة . اختيرت علبة من العلب الثلاث عشوائياً ، ثم سحب منها مصباح عشوائياً .

أ ما احتمال أن يكون صالحاً؟

ب إذا علم أن المصباح غير صالح فما احتمال أن يكون من العلبة الأولى؟

الحل:

نفرض أن ح_1 : حادث المصباح من العلبة الأولى، ح_2 : حادث المصباح من العلبة الثانية

ح_3 : حادث المصباح من العلبة الثالثة، ح : حادث المصباح صالح

تكون الحوادث ح_1 ، ح_2 ، ح_3 حوادث شاملة ومتباعدة

أ

$$\text{ل}(\text{ح}) = \text{ل}(\text{ح}_1)\times \text{ل}(\text{ح}/\text{ح}_1) + \text{ل}(\text{ح}_2)\times \text{ل}(\text{ح}/\text{ح}_2) + \text{ل}(\text{ح}_3)\times \text{ل}(\text{ح}/\text{ح}_3)$$

$$= \frac{١}{٣}\times\frac{٣}{٨} + \frac{١}{٣}\times\frac{٤}{٨} + \frac{١}{٣}\times\frac{٣}{٤} = \frac{١٧}{٣٠}$$

$$= \frac{١}{٣}\left[\frac{٣}{٨} + \frac{٤}{٨} + \frac{٦}{٨}\right] = \frac{١}{٣}\times\frac{١٣}{٨} = \frac{١٣}{٢٤}$$

ب

ل (المصباح من العلبة الأولى/ المصباح غير صالح) = $\text{ل}(\text{ح}_1/\bar{\text{ح}})$

$$= \frac{\text{ل}(\text{ح}_1\cap\bar{\text{ح}})}{\text{ل}(\bar{\text{ح}})} = \frac{\text{ل}(\text{ح}_1)\times \text{ل}(\bar{\text{ح}}/\text{ح}_1)}{\text{ل}(\bar{\text{ح}})} = \frac{\frac{١}{٣}\times\frac{٥}{٨}}{١-\frac{١٣}{٢٤}} = \frac{٥}{٢٤}\times\frac{٢٤}{١١} = \frac{٥}{١١}$$

مثال (٥): صندوقان في الأول أربع كرات بيضاء واثنتان سوداوان، وفي الثاني كرتان بيضاوان وواحدة سوداء، نقلت كرة واحدة من الأول للثاني ثم سحبت كرتان على التوالي بدون ارجاع من الثاني :

أ ما احتمال أن تكون الكرتان المسحوبتان بيضاوين؟

ب إذا علم أن الكرتين المسحوبتين بيضاوان فما احتمال أن تكون المنقولة من الأول للثاني سوداء؟

الحل:

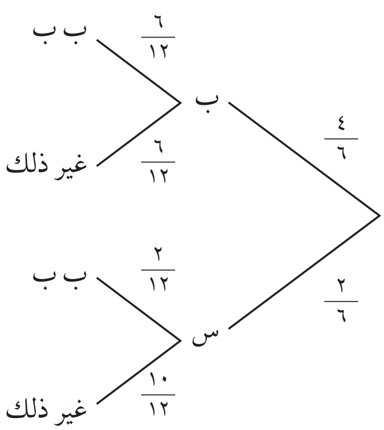
نفرض أن ح_1 : حادث الكرة المنقولة بيضاء، ح_2 : حادث الكرة المنقولة سوداء

ح : حادث الكرتان المسحوبتان بيضاوان

تكون الحوادث ح_1 ، ح_2 حوادث شاملة ومتباعدة

$\text{ل}(\text{ح}_1) = \frac{٤}{٦}$ ، $\text{ل}(\text{ح}/\text{ح}_1) = \frac{٣}{٤}\times\frac{٢}{٣} = \frac{٦}{١٢}$

$\text{ل}(\text{ح}_2) = \frac{٢}{٦}$ ، $\text{ل}(\text{ح}/\text{ح}_2) = \frac{٢}{٤}\times\frac{١}{٣} = \frac{٢}{١٢}$



الشكل (٦-٧)

أ

$$\text{ل}(\text{ح}) = \text{ل}(\text{ح}_1)\times \text{ل}(\text{ح}/\text{ح}_1) + \text{ل}(\text{ح}_2)\times \text{ل}(\text{ح}/\text{ح}_2)$$

$$= \frac{٤}{٦}\times\frac{٦}{١٢} + \frac{٢}{٦}\times\frac{٢}{١٢} = \frac{٢٨}{٧٢} = \frac{٧}{١٨}$$

ب

$$\text{ل}(\text{ح}_2/\text{ح}) = \frac{\text{ل}(\text{ح}_2)\times \text{ل}(\text{ح}/\text{ح}_2)}{\text{ل}(\text{ح})} = \frac{\frac{٢}{٦}\times\frac{٢}{١٢}}{\frac{٢٨}{٧٢}} = \frac{٤}{٢٨} = \frac{١}{٧}$$

تمارين (٦-٢)

١ إذا كان ٤٠٪ من الطلبة الذين تقدموا بطلبات قبول في إحدى الجامعات الفلسطينية في سنة ما هم من الفرع العلمي والباقي من الفرع الأدبي، فإذا قبلت الجامعة ثلث المتقدمين من الفرع الأدبي، وربع المتقدمين من الفرع العلمي، واختير أحد المتقدمين عشوائياً، فاحسب احتمال:

(أ) أن يكون مقبولاً. (ب) أن يكون من الفرع العلمي إذا علم أنه قد قبل فعلاً.

٢ أصاب مرض نادر ١٪ من السكان في بلد ما، وصمم اختبار للكشف عن هذا المرض؛ فإذا كانت نتيجة الاختبار إيجابية عند ٩٠٪ ممن هم مرضى فعلاً وإيبابية أيضاً عند ٥٪ ممن هم ليسوا مرضى فعلاً، وتقدم أحد سكان هذا البلد للفحص بهذا الاختبار:

(أ) ما احتمال أن تكون النتيجة إيجابية؟

(ب) إذا كانت نتيجة الاختبار إيجابية فما احتمال أن يكون الشخص مريضاً فعلاً؟

٣ يقوم بتدريس الصف الثاني الأساسي في مدرسة ما معلمتان فقط هما أ، ب. فإذا كانت نسبة حصص أ إلى حصص ب تساوي ٢ : ١، وكان احتمال أن تستعمل أ وسيلة تعليمية هو ٠,٧، واحتمال أن تستعمل ب وسيلة تعليمية تساوي ٠,٦، واختيرت إحدى حصص هذا الصف عشوائياً، فما احتمال:

(أ) أن تُستعمل فيها وسيلة تعليمية؟

(ب) أن تكون الحصة للمعلمة أ إذا استعملت فيها وسيلة تعليمية؟

٤ مصنع لأكياس النايلون فيه ثلاث وحدات إنتاجية تنتج الأولى مثلي إنتاج الثانية، وتنتج الثانية ثلثي ما تنتجه الثالثة؛ فإذا كانت نسبة الأكياس غير الصالحة في إنتاج الأولى والثانية والثالثة على الترتيب هي ٣٪، ٩٪، ٦٪، واختير كيس من إنتاج هذا المصنع عشوائياً:

(أ) ما احتمال أن يكون الكيس غير صالح؟

(ب) إذا علم أن الكيس الذي اختير كان صالحاً فما احتمال أن يكون من إنتاج الثانية؟

٥ صندوقان أ، ب يحتوي أ على أربع كرات بيضاء وواحدة سوداء، ويحتوي ب على كرتين بيضاوين وأربع كرات سوداء. تسحب عشوائياً كرة من الصندوق أ ويلاحظ لونها؛ فإذا كانت بيضاء تسحب من ب كرتان على التوالي مع الإرجاع، وإذا كانت سوداء تسحب من ب كرتان على التوالي دون إرجاع.

(أ) ما احتمال أن تكون الكرات الثلاث من اللون نفسه؟

(ب) ما احتمال أن تكون اثنتان بيضاوين والأخرى سوداء؟

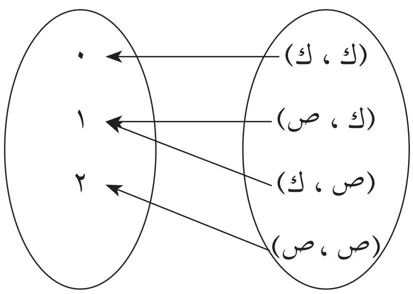
(جـ) إذا علم أن اثنتين كرة واحدة فقط من الكرات الثلاث سوداء فما احتمال أن تكون من الصندوق أ؟

٦ إذا كانت نسبة الذكور إلى الإناث في مدرسة مختلطة هي ٣:أ، وكانت نسبة النجاح بين الإناث ٠,٨، ونسبة النجاح بين الذكور ٠,٧٥، ونسبة النجاح في هذه المدرسة هي ٠,٧٧، فأوجد نسبة الذكور في الناجحين.

٦-٣ المتغير العشوائي المنفصل

في كثير من الأحيان يتم ربط نتائج التجارب العشوائية بأعداد حقيقية. فمثلاً إذا ألقيت قطعة نقد مرتين متتاليتين ولوحظ عدد الصور الظاهرة في المرتين، فإن هذا العدد المتغير يتخذ القيمة ٢ عندما تظهر صورتان على الوجهين العلويين، والقيمة ١ عندماتظهر صورة واحدة فقط، والقيمة صفر عندما لا تظهر أية صورة.

ويمكن توضيح ذلك بالمخطط السهمي في الشكل (٦-٨) الذي يمثل اقتراناً س مجاله Ω، ومداه {٠، ١، ٢} $\subseteq$ ح ؛ ويسمى مثل هذا الاقتران متغيراً عشوائياً منفصلاً.



الشكل (٦-٨)

بوجه عام:

تعريف:

يسمى الاقتران س الذي مجاله Ω، ومداه مجموعةٌ جزئيةٌ من الأعداد الحقيقية قابلةٌ للعد، متغيراً عشوائياً منفصلاً.

مثال (١): في تجربة ملاحظة ثلاثة مواليد من حيث الجنس وتسلسل الولادة:

أ اكتب Ω.

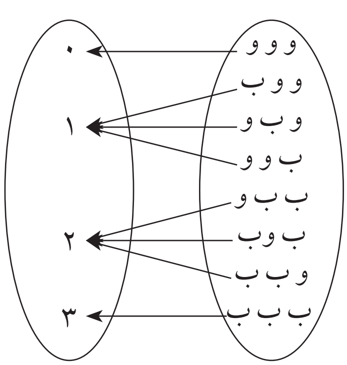
ب إذا كان س متغيراً يمثل عدد البنات في المواليد الثلاثة فمثّل س بمخطط سهمي.

جـ هل س متغير عشوائي منفصل؟ إن كان كذلك فما مداه؟

الحل:

أ Ω = {و و و ، و و ب ، و ب و ، ب و و ، ب ب و ، ب و ب ، و ب ب ، ب ب ب}

ب الشكل (٦-٩) يمثل المخطط السهمي للمتغير س



الشكل (٦-٩)

جـ بما أن س يربط كل عنصر من عناصر Ω بعدد حقيقي واحد فقط

$\therefore$ س اقتران مجاله Ω، ومداه المجموعة {٠، ١، ٢، ٣} $\subseteq$ ح القابلة للعد؛ وبالتالي فإن س متغير عشوائي منفصل.

مثال (٢): إذا كان ى هو المتغير العشوائي المنفصل الذي يدل على الفرق المطلق بين عدد النقاط الظاهرة على الوجهين العلويين عند إلقاء حجري نرد

أ جد مدى ى .

ب أكتب الحادث ح المكون من جميع عناصر Ω التي صورتها في الاقتران ى في العدد ١ .

الحل:

أ مدى ى = {٠ ، ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥}

ب ح = {(١،٢)، (٢،١)، (٢،٣)، (٣،٢)، (٣،٤)، (٤،٣)، (٤،٥)، (٥،٤)، (٥،٦)، (٦،٥)}

تعريف:

إذا كان ى متغيراً عشوائياً منفصلاً مداه {س$_١$ ، س$_٢$ ، . . . ، س$_ن$} ، فإن احتمال أن يتخذ ى القيمة س$_ر$ ، ويرمزلها بالرمز ل(س$_ر$) ، يساوي احتمال الحادث المكون من جميع عناصر Ω المرتبطة بالعدد س$_ر$.

مثال (٣): في تجربة سحب ثلاث كرات على التوالي دون إرجاع من صندوق يحتوي على سبع كرات بيضاء وكرتين حمراوين ، إذا كان ع متغيراً عشوائياً منفصلاً يدل على عدد الكرات البيضاء المسحوبة

أ جد مدى ع . ب جد ل (١) .

الحل:

أ مدى ع = {١ ، ٢ ، ٣}

لاحظ أن ع لا يتخذ القيمة صفراً؛ لأنه لا يمكن أن تكون الكرات الثلاث حمراء .

ب ل(١) = ل ({ب س س ، س ب س ، س س ب})

$$= \frac{٧}{٩} \times \frac{٢}{٨} \times \frac{١}{٧} + \frac{٢}{٩} \times \frac{٧}{٨} \times \frac{١}{٧} + \frac{٢}{٩} \times \frac{١}{٨} \times \frac{٧}{٧}$$

$$= \frac{٤٢}{٥٠٤} = \frac{١}{١٢}$$

تعريف (التوزيع الاحتمالي):

إذا كان ى متغيراً عشوائياً منفصلاً مداه {س$_١$ ، س$_٢$ ، . . . ، س$_ن$} ،

وكانت ل(س$_١$) ، ل(س$_٢$) ، . . . ، ل(س$_ن$) الاحتمالات المقابلة ، فإننا نسمي المجموعة

{(س$_١$ ، ل(س$_١$)) ، (س$_٢$ ، ل(س$_٢$)) ، . . . ، (س$_ن$ ، ل(س$_ن$))} التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي المنفصل ى .

لاحظ أن التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي المنفصل ع هو اقتران مجاله مجموعة قيم ع، ومداه احتمالاتها المقابلة. ويمكن تمثيل هذا الاقتران بالجدول التالي الذي يسمى جدول التوزيع الاحتمالي.

$س_ر$	$س_١$	$س_٢$	...	$س_ن$
$ل(س_ر)$	$ل(س_١)$	$ل(س_٢)$	...	$ل(س_ن)$

لاحظ أن:
١ $ل(س_ر) \geq ٠$ ، لجميع قيم ر = ١ ، ٢ ، ... ، ن
٢ $\sum_{ر=١}^{ن} ل(س_ر) = ١$

مثال (٤): إذا كان المتغير العشوائي ع يدل على مجموع النقط الظاهرة على الوجهين العلويين عند إلقاء حجري نرد منتظمين، فكون جدول التوزيع الاحتمالي للمتغير ع.

الحل: مدى ع = {٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥ ، ٦ ، ٧ ، ٨ ، ٩ ، ١٠ ، ١١ ، ١٢}

$ل(٢) = ل\left(\{(١ ، ١)\}\right) = \frac{١}{٣٦}$

$ل(٣) = ل\left(\{(١ ، ٢) ، (٢ ، ١)\}\right) = \frac{٢}{٣٦}$

$ل(٤) = ل\left(\{(١ ، ٣) ، (٢ ، ٢) ، (٣ ، ١)\}\right) = \frac{٣}{٣٦}$

⋮

$ل(١٢) = ل\left(\{(٦ ، ٦)\}\right) = \frac{١}{٣٦}$

∴ جدول التوزيع الاحتمالي للمتغير ع :

$س_ر$	٢	٣	٤	٥	٦	٧	٨	٩	١٠	١١	١٢
$ل(س_ر)$	$\frac{١}{٣٦}$	$\frac{٢}{٣٦}$	$\frac{٣}{٣٦}$	$\frac{٤}{٣٦}$	$\frac{٥}{٣٦}$	$\frac{٦}{٣٦}$	$\frac{٥}{٣٦}$	$\frac{٤}{٣٦}$	$\frac{٣}{٣٦}$	$\frac{٢}{٣٦}$	$\frac{١}{٣٦}$

مثال (٥): إذا كان ع متغيراً عشوائياً منفصلاً توزيعه الاحتمالي هو {(٢، ١,٠)، (٤، س)، (٥، ٢س)} فأوجد قيمة س.

الحل: $\sum_{ر=١}^{٣} ل(س_ر) = ١$

∴ ل(٢) + ل(٤) + ل(٥) = ١

١,٠ + س + ٢س = ١

٣س = ٠,٩ ومنها س = ٠,٣

تعريف (توقع المتغير العشوائي المنفصل):

إذا كان ى متغيراً عشوائياً منفصلاً مداه {س$_1$ ، س$_2$ ، . . . ، س$_ن$}، فإن توقع المتغير العشوائي ى ، ويرمز له بالرمز ت(ى)، يعرف هكذا : $ت(ى) = \sum_{ر=1}^{ن} س_ر \times ل(س_ر)$

لاحظ أن توقع المتغير العشوائي ى هو الوسط الحسابي للقيم التي يتخذها هذا المتغير .

مثال (٦): في تجربة سحب ثلاث كرات على التوالي مع الإرجاع من صندوق يحتوي على أربع كرات بيضاء وكرتين سوداوين ، إذا كان المتغير العشوائي ع يدل على عدد الكرات البيضاء المسحوبة فأوجد ت(ع) .

الحل:

مدى ع = { ٠ ، ١ ، ٢ ، ٣} ، ل (الكرة بيضاء) = $\frac{٤}{٦} = \frac{٢}{٣}$ ، ل (الكرة سوداء) = $\frac{١}{٣}$

$ل(٠) = ل\left(\{س\ س\ س\}\right) = \left(\frac{١}{٣}\right)^{٣} = \frac{١}{٢٧}$

$ل(١) = ل\left(\{ب\ س\ س ، س\ ب\ س ، س\ س\ ب\}\right) = ٣ \times \left(\frac{٢}{٣}\right) \times \left(\frac{١}{٣}\right)^{٢} = \frac{٢}{٩}$

$ل(٢) = ل\left(\{ب\ ب\ س ، ب\ س\ ب ، س\ ب\ ب\}\right) = ٣ \times \left(\frac{٢}{٣}\right)^{٢} \times \frac{١}{٣} = \frac{٤}{٩}$

$ل(٣) = ل\left(\{ب\ ب\ ب\}\right) = \left(\frac{٢}{٣}\right)^{٣} = \frac{٨}{٢٧}$

$ت(ع) = \sum_{ر=1}^{٣} س_ر \times ل(س_ر)$

$= ٠ \times \frac{١}{٢٧} + ١ \times \frac{٢}{٩} + ٢ \times \frac{٤}{٩} + ٣ \times \frac{٨}{٢٧} = \frac{٥٤}{٢٧} = ٢$

وهذا يعني أنه إذا أجريت التجربة عدداً كبيراً من المرات فإن الوسط الحسابي لعدد الكرات البيضاء المسحوبة يساوي ٢ .

مثال (٧): يحتوي صندوق على ٥٠ مغلفاً كما يلي :

١٠ مغلفات يحتوي كلٌّ منها على جائزة بقيمة ١٠ دنانير .

١٠ مغلفات يحتوي كلٌّ منها على جائزة بقيمة دينار واحد .

١٥ مغلفاً يحتوي كلٌّ منها على جائزة بقيمة نصف دينار .

والباقي فارغة لا تحتوي على أية جوائز .

أوجد توقعك للمبلغ الذي تحصل عليه عند سحب أحد هذه المغلفات عشوائياً .

الحل:

بفرض أن و هو المتغير العشوائي الذي يمثل قيمة الجائزة يكون :

مدى و = {٠ ، ٠,٥ ، ١ ، ١٠}

ل(٠) = ل(المغلف فارغ) = $\frac{١٥}{٥٠}$

ل(٠,٥) = ل(الجائزة نصف دينار) = $\frac{١٥}{٥٠}$

ل(١) = ل(الجائزة دينار) = $\frac{١٠}{٥٠}$

ل(١٠) = ل(الجائزة ١٠ دنانير) = $\frac{١٠}{٥٠}$

∴ ت(و) = $\sum_{ر=١}^{٤}$ س$_{ر}$ × ل(س$_{ر}$)

= ٠ × $\frac{١٥}{٥٠}$ + ٠,٥ × $\frac{١٥}{٥٠}$ + ١ × $\frac{١٠}{٥٠}$ + ١٠ × $\frac{١٠}{٥٠}$ = ٢,٣٥ ديناراً

نظرية:

إذا كان و ، ك متغيرين عشوائيين معرفين على الفراغ العيني Ω فإن :

١ ت(و ∓ ك) = ت(و) ∓ ت (ك)

٢ ت(أو + ب) = أت(و) + ب ، حيث أ ، ب ∈ ح

مثال (٨): إذا كان و ، ك متغيرين عشوائيين على فراغ عيني Ω، بحيث ت(و) = ٥ ، ت(ك) = ٨

فأوجد :

أ ت(٢و + ٣) ب ت(٤و – ٣ك + ٦)

الحل:

أ ت(٢و + ٣) = ٢ت(و) + ٣ = ٢ × ٥ + ٣ = ١٣

ب ت(٤و – ٣ك + ٦) = ٤ت(و) – ٣ت(ك) + ٦

= ٤ × ٥ – ٣ × ٨ + ٦ = ٢

تمارين (٦-٣)

١ يحتوي صندوق على ٣ كرات بيضاء وواحدة سوداء، سحبت منه كرتان على التوالي مع الإرجاع. إذا دل المتغير العشوائي ﻫ على عدد الكرات السوداء المسحوبة

(أ) عين مدى ﻫ (ب) اكتب التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي ﻫ (ج) جد توقع ﻫ

٢ يحتوي صندوق على كرة واحدة سوداء، وثلاث كرات بيضاء، وست كرات حمراء، سحبت منه كرتان دفعة واحدة، إذا دل المتغير العشوائي ك على عدد الكرات البيضاء المسحوبة

(أ) عين مدى ك (ب) أكتب جدول التوزيع الاحتمالي للمتغير ك (ج) جد توقع ك

٣ اختير عددان من المجموعة {٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥ ، ٦} دفعة واحدة. إذا دل المتغير م على عدد الأعداد التي تقبل القسمة على ٤ في العددين المختارين

(أ) عين مدى المتغير العشوائي م (ب) أكتب جدول التوزيع الاحتمالي للمتغير م

(ج) جد توقع المتغير م

٤ حجر نرد غير عادي مكتوب على ٤ وجوه منه الرقم ٣، وعلى الوجهين الآخرين الرقم ٦. ألقي الحجر مرتين متتاليتين. احسب توقع مجموع الرقمين الظاهرين في الرميتين

٥ إذا كان التوزيع الاحتمالي لمتغير عشوائي ﻫ هو {(أ، ١,٠)،(٥ ، ٢أ)} فما قيمة أ؟

٦ إذا كان ﻫ متغيراً عشوائياً يدل على عدد مرات ظهور الصورة عند إلقاء قطعة نقد غير عادية مرتين، وكان توقع ﻫ = ١,٦ ، فما احتمال ظهور الكتابة عند إلقاء قطعة النقد هذه مرة واحدة؟

٧ احسب توقع عدد الأطفال الذكور في عائلة لديها ثلاثة أطفال

٨ يرمي شخص قطعة نقود غير عادية احتمال ظهور الصورة على الوجه العلوي فيها = ٠,٧ ، فإذا ظهرت صورتان يُسجَّل العدد ٢٠، وإذا ظهر وجهان مختلفان يسجل العدد −١٠ ، وإذا ظهرت كتابتان يسجل العدد −٤٠ . احسب توقع العدد المسجل للشخص

٩ يحتوي صندوق على ١٠ مصابيح كهربائية منها ٨ صالحة. إذا تم فحص هذه المصابيح وكان المتغير العشوائي ﻫ يدل على رقم الفحص الذي يظهر فيه أول مصباح صالح

(أ) عين مدى ﻫ (ب) أكتب التوزيع الاحتمالي للمتغير ﻫ (ج) جد توقع ﻫ

١٠ إذا كان ﻫ متغيراً عشوائياً منفصلاً، وكان:

ل(س) = { جـ س ، س = ١
٣جـ س ، س = ٢
جـ(س+١) ، س = ٣، ٤

(أ) جد قيمة جـ (ب) كوّن جدول التوزيع الاحتمالي للمتغير ﻫ (ج) احسب ت(٢ ﻫ + ٣)

٦-٤ التوزيع ذو الحدين (Binomial Distribution)

سندرس في هذا البند أحد المتغيرات العشوائية المنفصلة المسمى المتغير العشوائي ذا الحدين ، الذي يرتبط بنوع خاص من التجارب العشوائية التي لها الخصائص التالية :

١ تتكون التجربة من عدد معين من المحاولات المتكررة .

٢ هذه المحاولات جميعاً متماثلة ومستقلة .

٣ تنتهي كل محاولة بإحدى نتيجتين : وقوع حادث معين ويسمى نجاحاً أو عدم وقوعه ويسمى فشلاً .

٤ احتمال النجاح ثابت في كل محاولة .

ويسمى التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي ذي الحدين التوزيع ذا الحدين .

فمثلاً عند إلقاء حجر نرد منتظم ١٠ مرات متتالية ، إذا كان المتغير العشوائي ى يمثل عدد مرات ظهور ٤ نقاط على الوجه العلوي ، فإنه يمكن اعتبار هذه التجربة مكونة من ١٠ محاولات متماثلة ومستقلة لرمي حجر النرد مرة واحدة ، ويكون احتمال وقوع الحادث ظهور ٤ نقاط على الوجه العلوي في كل محاولة مقداراً ثابتاً وهو $\frac{١}{٦}$. إن هذا المتغير هو متغير عشوائي ذو حدين لأن :

١ التجربة تتكون من ١٠ محاولات لرمي حجر النرد المنتظم مرة واحدة .

٢ المحاولات جميعاً متماثلة ومستقلة .

٣ لكل محاولة نتيجتان هما : ظهور ٤ نقاط على الوجه العلوي (نجاح) أو غير ذلك (فشل) .

٤ احتمال النجاح في كل محاولة ثابت هو $\frac{١}{٦}$.

مثال (١): في تجربة سحب ٥ كرات على التوالي مع الإرجاع من صندوق فيه ٦ كرات بيضاء واثنتان سوداوان ؛ إذا كان ى يرمز إلى عدد الكرات البيضاء المسحوبة ، فبين أن ى متغير عشوائي ذو حدين وجد مداه .

الحل: تجربة السحب مع الإرجاع هذه هي ٥ محاولات متماثلة ومستقلة لسحب كرة من الصندوق ، واحتمال ظهور كرة بيضاء (نجاح الحادث) في كل منها ثابت = $\frac{٦}{٨} = \frac{٣}{٤}$.

∴ ى متغير عشوائي ذو حدين .

مداه = {٠ ، ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥}

لاحظ أنه إذا كان السحب في هذا المثال دون إرجاع فإن المتغير العشوائي ى لا يكون ذا حدين ؛ لأن احتمال النجاح (ظهور بيضاء) غير ثابت في المحاولات الخمس .

مثال (٢): إذا أطلق رجل النار على هدف ثابت ثلاث مرات ، وكان احتمال إصابته للهدف في كل مرة هو $\frac{٤}{٥}$ ، وكان المتغير العشوائي ى يدل على عدد المرات التي يصيب فيها الرجل الهدف :

أ هل ى ذو حدين؟ ب ما مدى ى ؟

جـ احسب احتمال أن يصيب الرجل الهدف مرتين .

الحل:

أ ى متغير عشوائي ذو حدين ؛ لأن المحاولات الأربع متماثلة ومستقلة واحتمال النجاح (إصابة الهدف) ثابت في كل مرة = $\frac{٤}{٥}$ ، واحتمال الفشل (عدم إصابة الهدف) = $\frac{١}{٥}$.

ب مدى ى = {٠ ، ١ ، ٢ ، ٣} .

جـ ل(٢) = ل(إصابة الهدف مرتين فقط)

$= ل\Big(\{ص ص ف ، ف ص ص ، ص ف ص\}\Big)$

$= ٣ \times \left(\frac{٤}{٥}\right)^{٢} \times \left(\frac{١}{٥}\right)^{١} = \frac{٤٨}{١٢٥}$

لاحظ أن إصابة الهدف مرتين تتم بطرق عددها $\binom{٣}{٢}$، وأن احتمال وقوع كل منها يساوي $\left(\frac{٤}{٥}\right)^{٢} \times \left(\frac{١}{٥}\right)^{١}$ ، فيكون :

$ل(٢) = \binom{٣}{٢} \times \left(\frac{٤}{٥}\right)^{٢} \times \left(\frac{١}{٥}\right)^{١} = \frac{٤٨}{١٢٥}$

بوجه عام :

نظرية:

إذا كان ى متغيراً عشوائياً ذا حدين حيث عدد المحاولات = ن، واحتمال النجاح في كل محاولة = م ، فإن احتمال النجاح ر من المرات يساوي ل(ر) = $\binom{ن}{ر} \times م^{ر} \times (١ - م)^{ن-ر}$ ، ر ∈ {٠ ، ١ ، ٢ ، . . . . ، ن}

مثال (٣): سحبت ١٠ كرات على التوالي مع الإرجاع من صندوق فيه ثلاث كرات حمراء وواحدة سوداء ؛ إذا دل المتغير العشوائي ذو الحدين ى على عدد الكرات السوداء المسحوبة

أ ما مدى ى ؟ ب احسب كلاً من : ل(٢)، ل(٤)، ل(٧)

الحل:

أ المدى = {٠ ، ١ ، ٢ ، . . . . . ، ١٠}

ب ل(النجاح) = ل(ظهور سوداء) = أ = $\frac{١}{٤}$ ، ن = ١٠

$ل(٢) = \binom{١٠}{٢} \times \left(\frac{١}{٤}\right)^{٢} \times \left(١ - \frac{١}{٤}\right)^{١٠-٢} = \binom{١٠}{٢} \times \left(\frac{١}{٤}\right)^{٢} \times \left(\frac{٣}{٤}\right)^{٨}$

$ل(٤) = \binom{١٠}{٤} \times \left(\frac{١}{٤}\right)^{٤} \times \left(\frac{٣}{٤}\right)^{٦}$

$ل(٧) = \binom{١٠}{٧} \times \left(\frac{١}{٤}\right)^{٧} \times \left(\frac{٣}{٤}\right)^{٣}$

مثال (٤): يتألف امتحان من ستة أسئلة، واحتمال أن يجيب الطالب عن أي سؤال منها هو ٨ , ٠ ؛ فإذا تقدم هذا الطالب للامتحان

أ ما احتمال أن يجيب الطالب إجابة صحيحة عن سؤال واحد فقط؟

ب ما احتمال أن يجيب الطالب إجابة صحيحة عن سؤالين على الأكثر؟

الحل:

بفرض أن ر متغير عشوائي يدل على عدد الأسئلة التي يجيب عنها هذا الطالب إجابات صحيحة يكون ر متغيراً عشوائياً ذا حدين، حيث ن = ٦ ، أ = ٨ , ٠

أ $ل(١) = \binom{٦}{١} \times (٠,٨)^{١} \times (٠,٢)^{٥}$

ب $ل(ر \leq ٢) = ل(٠) + ل(١) + ل(٢)$

$= \binom{٦}{٠} \times (٠,٨)^{٠} \times (٠,٢)^{٦} + \binom{٦}{١} \times (٠,٨)^{١} \times (٠,٢)^{٥} + \binom{٦}{٢} \times (٠,٨)^{٢} (٠,٢)^{٤}$

مثال (٥): يحمل حجر نرد على كل من ثلاثة وجوه منه نقطة واحدة، وعلى كل من وجهين آخرين ٤ نقاط، وعلى الوجه السادس ٥ نقاط . ألقي هذا الحجر ٣ مرات ؛ فإذا كان ر متغيراً عشوائياً ذا حدين يدل على عدد مرات ظهور ٤ ، نقاط فكوّن جدول التوزيع الاحتمالي للمتغير ر ، ثم جد ت(ر) .

الحل:

ر متغير عشوائي ذو حدين فيه

ن = ٣ ، أ = ل (النجاح) = ل(ظهور ٤ نقاط) = $\frac{٢}{٦}$ = $\frac{١}{٣}$

مدى $ و = \{ ٠ ، ١ ، ٢ ، ٣ \} $

$$ ل(٠) = \binom{٣}{٠} \times \left(\frac{١}{٣}\right)^{٠} \times \left(\frac{٢}{٣}\right)^{٣} = \frac{٨}{٢٧} $$

$$ ل(١) = \binom{٣}{١} \times \left(\frac{١}{٣}\right)^{١} \times \left(\frac{٢}{٣}\right)^{٢} = \frac{١٢}{٢٧} $$

$$ ل(٢) = \binom{٣}{٢} \times \left(\frac{١}{٣}\right)^{٢} \times \left(\frac{٢}{٣}\right)^{١} = \frac{٦}{٢٧} $$

$$ ل(٣) = \binom{٣}{٣} \times \left(\frac{١}{٣}\right)^{٣} \times \left(\frac{٢}{٣}\right)^{٠} = \frac{١}{٢٧} $$

جدول التوزيع الاحتمالي للمتغير هو :

ر	٠	١	٢	٣
ل(ر)	$\frac{٨}{٢٧}$	$\frac{١٢}{٢٧}$	$\frac{٦}{٢٧}$	$\frac{١}{٢٧}$

$$ ت(و) = \sum_{ر=٠}^{٣} ر \times ل(ر) $$

$$ = ٠ \times \frac{٨}{٢٧} + ١ \times \frac{١٢}{٢٧} + ٢ \times \frac{٦}{٢٧} + ٣ \times \frac{١}{٢٧} = \frac{٢٧}{٢٧} = ١ $$

نلاحظ في هذا المثال أن ت(و) يساوي ١ ، وأن :

$ ١ = ٣ \times \frac{١}{٣} $ (عدد المحاولات × احتمال النجاح في المحاولة الواحدة) .

بوجه عام :

نظرية:

إذا كان و متغيراً عشوائياً ذا حدين فيه عدد المحاولات = ن ، واحتمال النجاح في المحاولة الواحدة = أ ،

فإن توقع و يعطى بالقاعدة : $ ت(و) = ن \times أ $

مثال (٦): ألقي حجرا نرد منتظمان ١٨ مرة . إذا كان و يدل على عدد مرات ظهور مجموع يساوي ٥ فأوجد ت(و) .

الحل:

و متغير عشوائي ذو حدين فيه ن = ١٨ ،

أ = ل (المجموع = ٥ نقاط) = ل$(\{(١ ، ٤)، (٤ ، ١)، (٢ ، ٣)، (٣ ، ٢)\})$

$ = \frac{٤}{٣٦} = \frac{١}{٩} $

$\therefore$ $ ت(و) = ن \times أ = ١٨ \times \frac{١}{٩} = ٢ $

تمارين (٦-٤)

١ إذا كان ى متغيراً عشوائياً ذا حدين فيه ن = ٧ ، أ = ٢ , ٠ فأوجد :

أ) ل(٣)　　ب) ت(ى)

٢ يحتوي صندوق على ثلاث كرات بيضاء، وكرتين سوداوين. سحبت ثماني كرات على التوالي مع الإرجاع. إذا كان ى متغيراً عشوائياً يدل على عدد الكرات السوداء المسحوبة فأوجد :

ل(١) ، ل(٢) ، ل(٥)

٣ في تجربة إلقاء حجر النرد المنتظم ٢٠ مرة متتالية، احسب احتمال ظهور عدد أصغر من ٥ في ١٢ مرة بالضبط

٤ في عائلة لديها ٦ أطفال، احسب احتمال :

أ) أن يكون لديها ٤ أطفال ذكور بالضبط　　ب) أن يكون في العائلة طفل ذكر على الأقل

٥ إذا كان ١٠٪ من إنتاج مصنع للمسامير معيباً، واختيرت ٥ مسامير عشوائياً من إنتاج هذا المصنع، فاحسب احتمال أن يكون اثنان منها على الأقل سليمين

٦ حجر نرد كتب على ثلاثة وجوه منه الرقم ١ ، وعلى وجهين آخرين الرقم ٤ ، وعلى الوجه السادس الرقم ٥ ، ألقي هذا الحجر ١٨ مرة متتالية

أ) ما احتمال ظهور الرقم ٥ ثلاث مرات فقط؟　　ب) ما احتمال ظهور الرقم ١ سبعة عشر مرة على الأقل؟

جـ) احسب توقع عدد مرات ظهور الرقم ٤

٧ إذا كان عدد الأطفال الذين تكون ولادتهم طبيعية يساوي ٧ أمثال عدد الأطفال الذين تكون ولادتهم غير طبيعية، واختير ٤ أطفال عشوائياً، فاحسب احتمال :

أ) أن تكون ولادة اثنين منهم فقط طبيعية .　　ب) أن تكون ولادة أحدهم على الأقل غير طبيعية

٨ تقدم طالب لامتحان مكون من ٢٥ فقرة من نوع الاختيار من متعدد لكل منها خمسة خيارات؛ فإذا أجاب طالب عنها بصورة عشوائية، وكان لكل فقرة منها أربع علامات، فأوجد :

أ) احتمال أن يحصل الطالب على العلامة ٨٠

ب) احتمال أن ينجح الطالب علماً بأن الحد الأدنى للنجاح العلامة ٦٠

جـ) توقع علامة الطالب

٩ قطعتا نقد احتمال ظهور الصورة في كلٍ منهما ٧ , ٠ ، ألقيت القطعتان معاً ٢٠ مرة، أوجد :

أ) احتمال أن تظهر صورتان ٧ مرات فقط　　ب) احتمال أن تظهر صورة وكتابة ٥ مرات فقط

جـ) احتمال أن تظهر كتابتان ٣ مرات فقط　　د) توقع عدد المرات التي تظهر فيها صورتان

١٠ تسحب كرات الواحدة تلو الأخرى مع الإرجاع من صندوق يحتوي على كرتين بيضاوين وواحدة سوداء؛ احسب أقل عدد من الكرات التي يجب أن تسحب لضمان أن يكون احتمال ظهور كرة بيضاء واحدة على الأقل يزيد على ٧٩ , ٠

٦-٥ المتغير العشوائي المتصل (Continuous Random Variable)

تعرفنا في بند (٦-٣) المتغير العشوائي المنفصل الذي مداه مجموعةٌ من الأعداد الحقيقية قابلةٌ للعد. وفي هذا البند سنتعرف متغيراً عشوائياً آخر يسمى المتغير العشوائي المتصل الذي يكون مداه فترة من الأعداد الحقيقية [ﺃ ، ب]، فمثلاً: المتغير العشوائي الذي يدل على طول فترة الحياة لمصباح كهربائي هو متغير عشوائي متصل، وكذلك المتغير العشوائي الذي يدل على أطوال، (أو أوزان) الأطفال عند ولادتهم هو متغير عشوائي متصل أيضاً.

تعريف:

١ إذا كان ى متغيراً عشوائياً متصلاً مداه [ﺃ ، ب] ، فإننا نسمي الاقتران ك الذي مجاله [ﺃ ، ب] ، ومجاله المقابل مجموعة الأعداد الحقيقية، اقتران كثافة احتمالية للمتغير العشوائى ى ، إذا وفقط إذا كان:

أ ك(س) ≥ ٠ ، ∀ س ∈ [ﺃ ، ب] ب $\int_{ﺃ}^{ب}$ ك(س) ءس = ١

٢ ل(جـ ≤ س ≤ د) = $\int_{جـ}^{د}$ ك(س) ءس ، حيث [جـ ، د] ⊆ [ﺃ ، ب]

مثال(١): إذا كان ى متغيراً عشوائياً متصلاً مداه [٠ ، ١]، وكان ك(س) = ٢س ، س ∈ [٠ ، ١]، فبين أن الاقتران ك اقتران كثافة احتمالية للمتغير ى .

الحل:

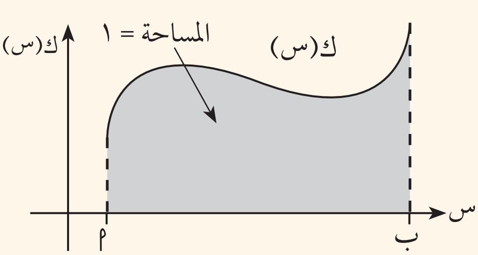
أ ك(س) ≥ ٠ ، ∀ س ∈ [٠ ، ١]

ب $\int_{٠}^{١}$ ك(س) ءس = $\int_{٠}^{١}$ ٢س ءس = س^{٢} $\Big|_{٠}^{١}$ = ١

∴ ك(س) اقتران كثافة احتمالية للمتغير العشوائي ى .

ملاحظات:

١ يتضح من التعريف أن اقتران الكثافة الاحتمالية للمتغير العشوائي المتصل الذي مجاله [ﺃ ، ب] هو اقتران غير سالب، يحصر منحناه مع محور السينات والمستقيمين س = ﺃ ، س = ب منطقة مساحتها وحدة مربعة واحدة.



الشكل (٦-١٠)

٢ احتمال أن يتخذ المتغير العشوائي المتصل ى القيمة س$_{١}$ ∈ [ﺃ ، ب] = ل(س$_{١}$) = $\int_{س_{١}}^{س_{١}}$ ك(س) ءس = ٠

مثال (٢): إذا كان $ع$ متغيراً عشوائياً متصلاً مداه $[-١ ، ٠]$، واقتران كثافته الاحتمالية $ك(س) = ٣س^٢$

فأوجد:

أ $ل\left(-\frac{١}{٢} \le س \le ٠\right)$

ب $ل\left(س < -\frac{١}{٢}\right)$

الحل:

أ $ل\left(-\frac{١}{٢} \le س \le ٠\right) = \int_{-\frac{١}{٢}}^{٠} ٣س^٢ \, ءس$

$$= س^٣ \Big|_{-\frac{١}{٢}}^{٠} = ٠ - \left(-\frac{١}{٨}\right) = \frac{١}{٨}$$

ب $ل\left(س < -\frac{١}{٢}\right) = ل\left(-١ \le س < -\frac{١}{٢}\right)$

$$= \int_{-١}^{-\frac{١}{٢}} ٣س^٢ \, ءس = س^٣ \Big|_{-١}^{-\frac{١}{٢}} = -\frac{١}{٨} + ١ = \frac{٧}{٨}$$

ويمكن حل الفرع (ب) بطريقة أخرى على النحو التالي:

$$ل\left(س < -\frac{١}{٢}\right) = \int_{-١}^{-\frac{١}{٢}} ٣س^٢ \, ءس = ١ - \int_{-\frac{١}{٢}}^{٠} ٣س^٢ \, ءس$$

$$= ١ - \frac{١}{٨} = \frac{٧}{٨}$$

مثال (٣): إذا كان $ع$ متغيراً عشوائياً متصلاً مداه $[٠ ، ٣]$

واقتران كثافته الاحتمالية $ك(س) = \begin{cases} م س & ، ٠ \le س \le ١ \\ م & ، ١ \le س \le ٢ \\ م(س-٣) & ، ٢ \le س \le ٣ \end{cases}$

أ جد قيمة $م$.

ب جد $ل(س \le ٢)$

الحل:

أ $\int_{٠}^{٣} ك(س) \, ءس = ١$

$$\therefore \int_{٠}^{١} م س \, ءس + \int_{١}^{٢} م \, ءس + \int_{٢}^{٣} م(س-٣) \, ءس = ١$$

$$\left.\frac{أ\,س^{٢}}{٢}\right|_{٠}^{١} + أ\,(٢-١) + أ\left(٣س - \frac{س^{٢}}{٢}\right)\Big|_{٢}^{٣} = ١$$

$$\frac{١}{٢}أ + أ + أ\,(٤,٥ - ٤) = ١$$

$$٢أ = ١ \quad \text{ومنها} \quad أ = \frac{١}{٢}$$

$$\therefore \quad ك(س) = \begin{cases} \frac{١}{٢}\,س & ، \quad ٠ \leq س \leq ١ \\ \frac{١}{٢} & ، \quad ١ \leq س \leq ٢ \\ \frac{١}{٢}(٣-س) & ، \quad ٢ \leq س \leq ٣ \end{cases}$$

ب $ل(س \leq ٢) = \int_{٠}^{٢} ك(س)\,ءس = \int_{٠}^{١} \frac{١}{٢}\,س\,ءس + \int_{١}^{٢} \frac{١}{٢}\,ءس$

$$= \left.\frac{١}{٤}\,س^{٢}\right|_{٠}^{١} + \frac{١}{٢}(٢-١)$$

$$= \left(\frac{١}{٤} - ٠\right) + \frac{١}{٢} = \frac{٣}{٤}$$

تعريف (توقع المتغير العشوائي المتصل):

إذا كان و متغيراً عشوائياً متصلاً مداه [أ ، ب] واقتران كثافته الاحتمالية ك ، فإننا نعرف توقع المتغير العشوائي و هكذا : $ت(و) = \int_{أ}^{ب} س \times ك(س)\,ءس$

مثال (٤): إذا كان و متغيراً عشوائياً متصلاً واقتران كثافته الاحتمالية :

$$ك(س) = \begin{cases} ١ + س & ، \quad -١ \leq س < ٠ \\ ١ - س & ، \quad ٠ \leq س \leq ١ \end{cases}$$

فأوجد : **أ** ت(و) **ب** ت(٢و + ٥)

الحل:

أ $ت(و) = \int_{-١}^{١} س\,ك(س)\,ءس = \int_{-١}^{٠} (س + س^{٢})\,ءس + \int_{٠}^{١} (س - س^{٢})\,ءس$

$$= \left(\frac{س^{٢}}{٢} + \frac{س^{٣}}{٣}\right)\Big|_{-١}^{٠} + \left(\frac{س^{٢}}{٢} - \frac{س^{٣}}{٣}\right)\Big|_{٠}^{١}$$

$$= -\left(\frac{١}{٢} - \frac{١}{٣}\right) + \left(\frac{١}{٢} - \frac{١}{٣}\right) = ٠$$

ب ت(٢ و + ٥) = ت(٢ و) + ت(٥)

= ٢ت(و) + ٥

= ٢ × ٠ + ٥ = ٥

تمارين (٦-٥)

١ أي الاقترانات التالية يصلح أن يكون اقتران كثافة احتمالية لمتغير عشوائي متصل معرف على الفترة المبينة في كل حالة :

أ ك(س) = س^{٢} ، س ∈ [٠ ، ١]

ب ك(س) = $\frac{١}{٤}$ ، س ∈ [٠ ، ٤]

جـ ك(س) = $\frac{١}{س}$ ، س ∈ [١ ، هـ]، هـ العدد النيبيري

د ك(س) = |س − ١|، س ∈ [٠ ، ٢]

٢ إذا كان و متغيراً عشوائياً متصلاً مداه [٠ ، ١]، وكان ك(س) = جـ س (١−س) هو اقتران كثافته الاحتمالية :

أ جد قيمة جـ　　ب جد ل(٠ ≥ س ≥ $\frac{١}{٢}$)　　جـ جد ت(و)

٣ إذا كان و متغيراً عشوائياً متصلاً مداه [٠ ، ٢ ، واقتران كثافته الاحتمالية هو ك(س) = $\frac{١}{٢}$ س ، فأوجد :

أ ل(س ≥ ١ بشرط أن س > $\frac{١}{٢}$)　　ب توقع المتغير العشوائي و

٤ إذا كانت فترة طول الحياة لجهاز كهربائي هي متغير عشوائي متصل اقتران كثافته الاحتمالية هو :

ك(س) = $\frac{م}{س^{٣}}$　　٢٠٠٠ ≥ س ≥ ١٠٠٠٠ ، س بالساعات

أ جد قيمة م　　ب احتمال أن يعمل هذا الجهاز أقل من ٣٠٠٠ ساعة .

٥ إذا كان اقتران الكثافة الاحتمالية لطول قطر سلك كهربائي هو :

ك(س) = $\frac{٢}{٣}$ س وكان طول قطر هذا السلك يتراوح بين ١ ملم، جـ ملم .

أ جد قيمة جـ .

ب ما احتمال أن يكون طول القطر عند إحدى نقاط السلك < ١,٥ ملم؟

جـ ما توقع طول قطر هذا السلك؟

٦-٦ التوزيع الطبيعي (Normal Distribution)

سندرس في هذا البند أحد أهم المتغيرات العشوائية المتصلة الذي يطلق على توزيعه الاحتمالي اسم التوزيع الطبيعي؛ وهو توزيع يلائم إلى حد كبير كثيراً من التوزيعات التكرارية لظواهر طبيعية، مثل: الأطوال، أو الأوزان، أو معاملات الذكاء في الانسان، وكذلك نواتج بعض العمليات في العلوم الطبيعية والاجتماعية.

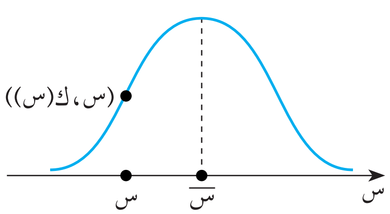
اكتشف التوزيع الطبيعي العالم الفرنسي ديموافر (De-Moivre) عام ١٧٣٣م، وشارك في تطويره عدد من العلماء من أشهرهم العالم الألماني جاوس (Gauss) الذي يسمى التوزيع أحياناً باسمه.

إن اقتران الكثافة الاحتمالية للمتغير العشوائي المتصل الذي يتبع التوزيع الطبيعي يتخذ الصورة العامة الآتية:

$$ك(س) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} هـ^{-\frac{1}{2}\left(\frac{س - \bar{س}}{\sigma}\right)^2} \quad ، \quad -\infty < س < \infty$$

حيث π النسبة التقريبية، هـ العدد النيبيري، $\bar{س}$ الوسط الحسابي (التوقع) للمتغير العشوائي، σ الانحراف المعياري للمتغير العشوائي س.

الشكل (٦-١١) يوضح التمثيل البياني العام لهذا الاقتران.



الشكل (٦-١١)

خواص منحنى التوزيع الطبيعي:

بالاعتماد على التمثيل البياني السابق، وعلى خواص اقتران الكثافة الاحتمالية للمتغير العشوائي المتصل بوجه عام، يمكن التوصل إلى الخصائص المهمة الآتية لمنحنى التوزيع الطبيعي:

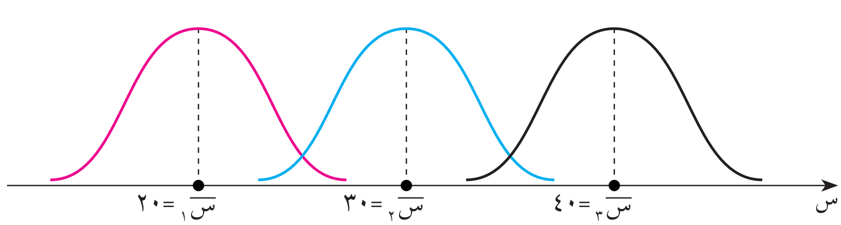
١ المنحنى متماثل حول وسطه الحسابي $\bar{س}$؛ وفيه يكون الوسط الحسابي = الوسيط = المنوال

٢ يشبه شكله شكل الجرس.

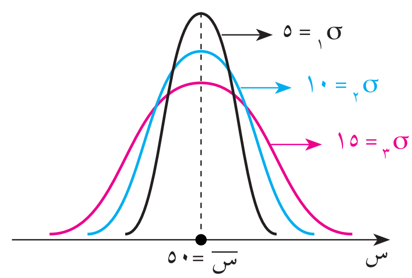
٣ يقترب طرفا المنحنى من محور السينات، أي أن $\lim_{س \to \mp\infty} ك(س) = 0$

٤ المساحة الكلية الواقعة تحت المنحنى تساوي وحدة واحدة.

٥ يعتمد المنحنى على البارامترين: الوسط الحسابي $\bar{س}$ والانحراف المعياري σ. لاحظ الشكلين (٦-١٢)، (٦-١٣).

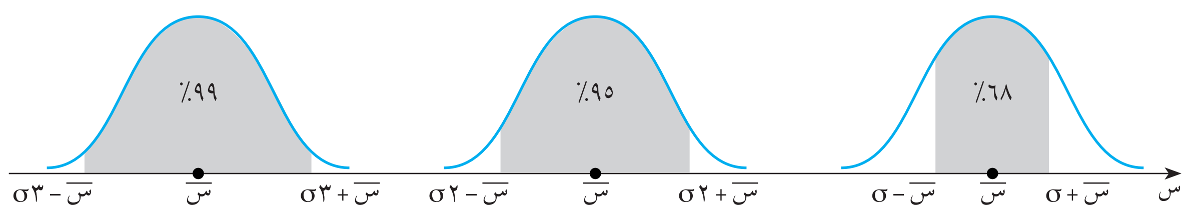


الشكل (٦-١٢): ثلاثة منحنيات طبيعية متساوية في الانحراف المعياري σ، ومختلفة في الوسط الحسابي $\bar{س}$



الشكل (٦-١٣): ثلاثة منحنيات طبيعية متساوية في الوسط الحسابي $\overline{س}$، ومختلفة في الانحراف المعياري σ

٦ تتوزع المفردات التي تتخذ شكل التوزيع الطبيعي بحيث يكون حوالي ٦٨٪ منها ضمن انحراف معياري واحد على جانبي الوسط، وحوالي ٩٥٪ منها ضمن انحرافين معياريين، وحوالي ٩٩٪ منها ضمن ثلاثة انحرافات معيارية. لاحظ الشكل (٦-١٤).



الشكل (٦-١٤)

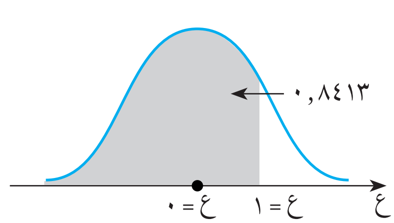
التوزيع الطبيعي المعياري:

إذا كان س متغيراً عشوائياً متصلاً يتبع التوزيع الطبيعي بوسط حسابي $\overline{س}$ وانحراف معياري σ، فإن تحويل قيم س إلى قيم معيارية وفق المعادلة ع = $\frac{س - \overline{س}}{\sigma}$، يحول المتغير العشوائي س إلى متغير عشوائي ع يتبع التوزيع الطبيعي بوسط حسابي يساوي صفراً، وانحراف معياري يساوي وحدة واحدة. نسمي التوزيع الطبيعي في هذه الحالة توزيعاً طبيعياً معيارياً؛ ويتخذ اقتران الكثافة الاحتمالية عندئذٍ الصورة الأبسط: ك(ع) = $\frac{١}{\sqrt{٢\pi}}$ هـ$^{-\frac{١}{٢}ع^٢}$

توجد جداول تمكننا من معرفة المساحة الواقعة تحت المنحنى الطبيعي المعياري والمحصورة بين أي قيمتين للمتغير ع، وهناك نوعان شائعان لهذه الجداول: أحدهما يعطي المساحة تحت المنحنى المعياري والمحصورة بين ع = ٠، وأية قيمة موجبة لـِ ع؛ والآخر يعطي جميع المساحة الواقعة تحت المنحنى المعياري إلى يسار ع، ويسمى جدول التوزيع الطبيعي المعياري التراكمي، وسنعتمده في هذا الكتاب. (أنظر الملحق في نهاية الكتاب).

الشكل (٦-١٥)، يبين المساحة تحت (ع = ١)، وهي ٠,٨٤١٣،

أي أن، ل(ع ≤ ١) = ٠,٨٤١٣.

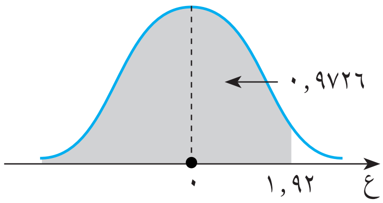


الشكل (٦-١٥)

مثال (١): باستخدام جدول التوزيع الطبيعي المعياري أوجد كلاً من :

أ ل(ع ≤ ١,٩٢)   ب ل(ع ≥ −٠,٥)

الحل:



الشكل (٦-١٧)

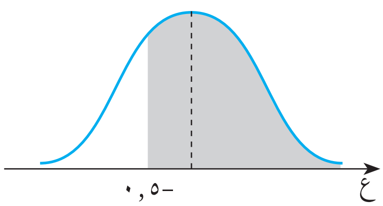
أ ل(ع ≤ ١,٩٢) = المساحة تحت (ع = ١,٩٢) = ٠,٩٧٢٦

لاحظ الشكل (٦-١٧)

وجدنا المساحة تحت ع = ١,٩٢ من الجدول مباشرة،

وذلك بالنظر إلى العدد الواقع عند تقاطع صف ع = ١,٩ ،

والعمود ٠,٠٢ ، وهو العدد ٠,٩٧٢٦



الشكل (٦-١٨)

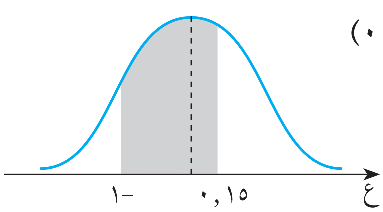
ب ل(ع ≥ −٠,٥) = ١ − المساحة تحت (ع = −٠,٥)

= ١ − ٠,٣٠٨٥ = ٠,٦٩١٥

لاحظ الشكل (٦-١٨)

مثال (٢): أوجد ل(−١ < ع < ٠,١٥)

الحل:



الشكل (٦-١٩)

ل(−١ < ع < ٠,١٥) = المساحة بين (ع = −١)، (ع = ٠,١٥)

= المساحة تحت (ع = ٠,١٥) − المساحة تحت (ع = −١)

= ٠,٥٥٩٦ − ٠,١٥٨٧ = ٠,٤٠٠٩

لاحظ الشكل (٦-١٩)

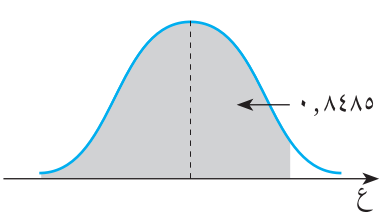
مثال(٣): أوجد قيمة ع في كلٍّ مما يلي :

أ المساحة تحتها تساوي ٠,٨٤٨٥   ب المساحة فوقها تساوي ٠,٦٦٢٨

جـ المساحة بين ع ، −ع تساوي ٠,٣٩

الحل:

أ ل(ع≥) = ٠,٨٤٨٥



الشكل (٦-٢٠)

بالرجوع إلى جدول التوزيع الطبيعي المعياري

والبحث عن المساحة ٠,٨٤٨٥ نجد أنها تقع عند

تقاطع صف ع = ١ وعمود ٠,٠٣ ∴ ع = ١,٠٣

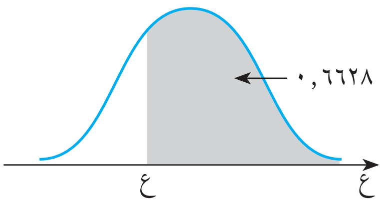
لاحظ الشكل (٦-٢٠)

ب ل(≤ع) = ٠,٦٦٢٨

∴ المساحة تحت ع = ١ − ٠,٦٦٢٨ = ٠,٣٣٧٢

من الجداول ع = −٠,٤٢

لاحظ الشكل (٦−٢١)



الشكل (٦−٢١)

جـ المساحة بين ع ، −ع = ٠,٣٩

المساحة تحت (−ع) + المساحة فوق (ع)

= ١ − ٠,٣٩ = ٠,٦١

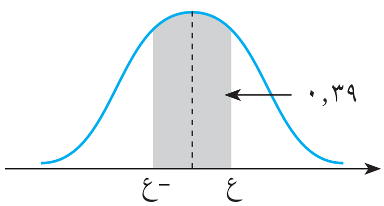
∴ المساحة تحت (−ع) = $\frac{٠,٦١}{٢}$ = ٠,٣٠٥

∴ المساحة تحت (ع) = ٠,٣٩ + ٠,٣٠٥

= ٠,٦٩٥٠

من الجداول ع = ٠,٥١

لاحظ الشكل (٦−٢٢)



الشكل (٦−٢٢)

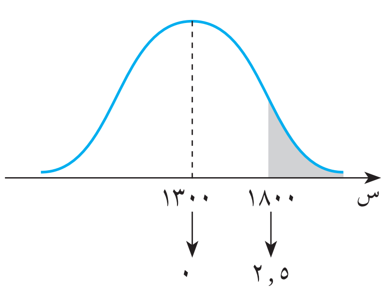
مثال (٤): الوسط الحسابي لأعمار المصابيح الكهربائية التي ينتجها أحد المصانع هو ١٣٠٠ ساعة بانحراف معياري مقداره ٢٠٠ ساعة . فإذا كانت هذه الأعمار تتبع التوزيع الطبيعي واختير أحد المصابيح عشوائياً فما احتمال أن يبقى صالحاً مدة تزيد على ١٨٠٠ ساعة؟

الحل: احتمال أن يبقى المصباح صالحاً مدة تزيد على ١٨٠٠ ساعة

= المساحة المظللة في الشكل (٦−٢٣).

ع = $\frac{س - \overline{س}}{\sigma}$

= $\frac{١٨٠٠-١٣٠٠}{٢٠٠}$ = ٢,٥



الشكل (٦−٢٣)

المساحة فوق (ع = ٢,٥) = ١ − المساحة تحت (ع = ٢,٥)

= ١ − ٠,٩٩٣٨

= ٠,٠٠٦٢

∴ الاحتمال المطلوب = ٠,٠٠٦٢

مثال (٥): تقدم ٨٠٠ طالب لامتحان عام، وكان توزيع علاماتهم يتبع التوزيع الطبيعي، بوسط حسابي = ٧٠ وانحراف معياري = ٨:

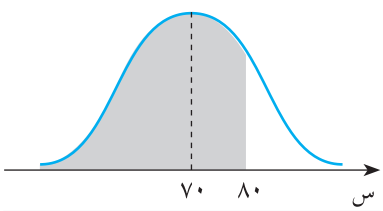
أ أوجد عدد الطلبة الذين تقل علاماتهم عن ٨٠.

ب إذا كانت علامة النجاح في الامتحان هي ٦٠ فما هي نسبة النجاح فيه؟

جـ إذا أعطي أفضل ١٠٪ من الطلبة تقدير ممتاز، فما هي أقل علامة يحصل عليها الطالب ليكون من فئة المتازين؟

الحل:

أ نسبة الطلبة الذين تقل علاماتهم عن ٨٠ هي المساحة المظللة في الشكل (٦-٢٤)



الشكل (٦-٢٤)

$$ع = \frac{س - \bar{س}}{\sigma} = \frac{٨٠ - ٧٠}{٨} = ١,٢٥$$

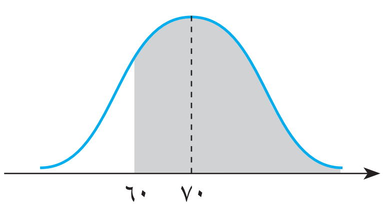
المساحة تحت (ع = ١,٢٥) = ٠,٨٩٤٤

∴ نسبة الطلبة = ٠,٨٩٤٤

∴ عدد الطلبة = ٠,٨٩٤٤ × ٨٠٠ ≈ ٧١٦ طالباً

ب نسبة النجاح = المساحة فوق العلامة ٦٠

وهي المساحة المظللة في الشكل (٦-٢٥)



الشكل (٦-٢٥)

$$ع = \frac{س - \bar{س}}{\sigma} = \frac{٦٠ - ٧٠}{٨} = -١,٢٥$$

المساحة تحت (ع = -١,٢٥) = ٠,١٠٥٦

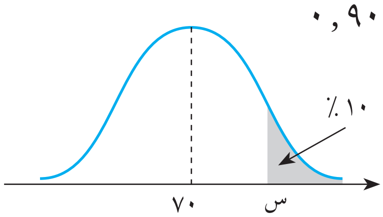
∴ المساحة فوق (ع = -١,٢٥) = ١ - ٠,١٠٥٦ = ٠,٨٩٤٤

∴ نسبة النجاح = ٠,٨٩٤٤ = ٨٩,٤٤٪

جـ فئة المتازين تمثلهم المساحة المظللة في الشكل (٦-٢٦).

المساحة المظللة = ٠,١٠، وبفرض أن الحد الأدنى لفئة المتازين هي س والعلامة المعيارية المقابلة لها هي ع يكون المساحة تحت ع = ١ - ٠,١٠ = ٠,٩٠

من الجداول قيمة ع ≈ ١,٢٨



الشكل (٦-٢٦)

لكن $ع = \frac{س - \bar{س}}{\sigma}$

∴ $١,٢٨ = \frac{س - ٧٠}{٨}$

س = ٧٠ + ٨ × ١,٢٨ = ٧٠+١٠,٢٤ = ٨٠,٢٤ ≈ ٨٠

تمارين (٦-٦)

١ إذا كان ع متغيراً عشوائياً يتبع التوزيع الطبيعي المعياري، فأوجد كلاً من:

أ) ل(ع ≤ ١,١٣)　　ب) ل(ع ≥ ١,٤٢)

ج) ل(-١,٣٥ ≥ ع ≥ ٢,٠١)　　د) ل(|ع| ≥ ٠,٦)

٢ إذا كان ع متغيراً عشوائياً يتبع التوزيع الطبيعي المعياري، فأوجد قيمة م في كلٍ مما يلي:

أ) ل(٠ ≥ ع ≥ م) = ٠,٤٢٣٦　　ب) ل(ع ≥ م) = ٠,٧٩٦٧　　ج) ل(م ≥ ع ≥ ٢) = ٠,١

٣ إذا كان س متغيراً عشوائياً يتبع التوزيع الطبيعي بوسط حسابي $\overline{\text{س}}$ = ٥,٦، وانحراف معياري σ = ١,٤ فأوجد كلاً مما يلي:

أ) ل(س < ٥,٧)　　ب) ل(س > ٤,٤)　　ج) ل((س > ٤,٣) أو (س < ٤,٦))

٤ إذا كان توزيع معاملات الذكاء في المجتمع يتبع التوزيع الطبيعي بحيث إن الوسط الحسابي = ١٠٠ والانحراف المعياري = ١٥، فجد نسبة الأشخاص الذين تقع معاملات ذكائهم:

أ) فوق ١٣٥　　ب) فوق ١٢٠　　ج) تحت ٩٠　　د) بين ٧٥، ١٢٥

٥ خط إنتاج في مصنع ينتج أكياساً من السكر بوسط حسابي يساوي ١,٠١، كغم وانحراف معياري يساوي ٠,٠٢ كغم

أ) أوجد نسبة الأكياس التي تزن أقل من ١,٠٣ كغم.

ب) أوجد نسبة الأكياس التي تزن أكثر من ١,٠٢ كغم.

ج) أوجد نسبة الأكياس التي تتراوح أوزانها بين ١كغم، ١,٠٥ كغم.

٦ متغير عشوائى له توزيع طبيعي بوسط حسابي $\overline{\text{س}}$ = ٥٢؛ فإذا كان ل(س < ٥١,١٥) = ٠,٠٤٤٦ فما هو الانحراف المعياري للمتغير س؟

٧ الانحراف المعياري لمتغير عشوائى يتبع التوزيع الطبيعي هو ٣,٩؛ فإذا كان ٧١,٣٧٪ من القيم أكبر من ٢٤٩,٨ فما هو الوسط الحسابي لقيم المتغير؟

٨ إذا كانت أوزان الأدوات المنتجة في مصنع تتبع التوزيع الطبيعي، وكان ٥٪ من الأدوات يزيد وزنها على ٨٥ غم، وكان ١٠٪ من الأدوات يقل وزنها عن ٢٥ غم

أ) فأوجد كلاً من الوسط الحسابي والانحراف المعياري لأوزان الأدوات.

ب) جد الوزنين المتماثلين حول الوسط بحيث يقع ٧٥٪ من الأوزان بينهما.

٩ إذا كان الزمن الذي يستغرقه موزع الحليب للوصول الحليب إلى بيت ما يتبع التوزيع الطبيعي بوسط حسابي مقداره ١٢، دقيقة وانحراف معياري مقداره دقيقتان، وكان هذا الموزع ينقل الحليب إلى ذلك البيت يومياً على مدار السنة (٣٦٥ يوماً)، فما هو (بالتقريب) عدد الأيام التي يستغرق فيها الموزع زمناً:

أ) يزيد على ١٧ دقيقة؟　　ب) يقل عن ١٠ دقائق؟　　ج) ينحصر بين ٩، ١٣ دقيقة؟

تمارين عامة

١ اختر رمز الإجابة الصحيحة لكلٍ من الأسئلة التالية :

١ عند إلقاء قطعة نقد منتظمة ٣ مرات فإن احتمال أن تظهر صورة واحدة على الأقل هو :

أ $\frac{٢}{٣}$ ب $\frac{٣}{٨}$ جـ $\frac{٧}{٨}$ د غير ذلك

٢ إذا اختيرت كرتان على التوالي دون إرجاع من صندوق يحتوي على ثماني كرات بيضاء ، واثنتين حمراوين ، وخمس سوداء ، فإن احتمال أن تكون الثانية حمراء إذا كانت الأولى بيضاء هو :

أ $\frac{١}{٧}$ ب $\frac{١}{١٤}$ جـ $\frac{٢}{١٣}$ د $\frac{١}{٣}$

٣ إذا كان ى متغيراً عشوائياً متصلاً مداه [١ ، ٣]، واقتران كثافته الاحتمالية ك(س) = جـ، جـ ثابت ، فإن توقع ى هو :

أ ١ ب $\frac{١}{٢}$ جـ ٢ د غير ذلك

٤ في تجربة إلقاء قطعتي نقد منتظمتين ١٢ مرة ، يكون توقع عدد مرات ظهور صورتين هو :

أ ٦ ب ٢ جـ ٤ د ٣

٥ تقدم صف فيه ٢٠ طالبة لامتحان ما فكان عدد الناجحات ١٦ طالبة ، فإذا اختيرت طالبتان من الصف عشوائياً فإن احتمال أن تكونا ناجحتين هو :

أ $\frac{١٦}{٢٠} \times \frac{١٥}{١٩}$ ب $\frac{١٦}{٢٠} \times \frac{١٦}{٢٠}$ جـ $\frac{١}{٢٠} \times \frac{١}{٢٠}$ د $\frac{١}{٢} \times \frac{١}{٢}$

٦ صندوقان في الأول ن من الكرات البيضاء ، ن من الكرات الحمراء وفي الثاني ن من الكرات البيضاء ، ٢ن من الكرات الحمراء . إذا اختير أحد الصندوقين عشوائياً ، وسحبت منه كرة واحدة ، فإن احتمال أن تكون بيضاء هو :

أ $\frac{٣}{٤}$ ب $\frac{٥}{١٢}$ جـ $\frac{٢}{٣}$ د غير ذلك

٧ إذا كان التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي ى هو : {(٢ ، س)، (٣ ، ٠,١)، (٥ ، ٢س)}، فإن توقع ى هو :

أ ٠,٣ ب $\frac{١٠}{٣}$ جـ $\frac{٣٩}{١٠}$ د $\frac{١٠}{٣٩}$

٨ عند إلقاء حجر نرد منتظم ٦ مرات يكون احتمال ظهور ٤ نقاط على الوجه العلوي ٥ مرات على الأكثر :

أ $\frac{٥}{٦}$ ب $١ - \left(\frac{١}{٦}\right)^{٥}$ جـ $١ - \left(\frac{١}{٦}\right)^{٦}$ د $١ - \left(\frac{٥}{٦}\right)^{٦}$

٩ يحتوي صندوق على ٣ كرات بيضاء ، ٥ كرات حمراء ؛ سحبت منه كرات واحدة تلو الأخرى دون إرجاع ؛ فإذا كان المتغير العشوائي ى يدل على رقم السحب الذي تظهر فيها أول كرة حمراء ، فإن مدى ى هو :

أ {١ ، ٢ ، ٣} ب {١ ، ٢ ، ٣ ، ٤}

جـ {١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥} جـ {٤}

١٠ إذا كان ق متغيراً عشوائياً منفصلاً مداه {١ ، ٢ ، ٣ ، ٤}، فإن أحد الأعداد التالية لا يمكن أن يساوي التوقع للمتغير ق:

أ) ٤ ب) ١,٥ ج) ٣ د) ٣,٥٨

١١ في تجربة إلقاء قطعة نقد منتظمة ثلاث مرات متتالية، يكون احتمال أن تظهر ثلاث صور على الأوجه العلوية إذا ظهرت صورة في الرمية الأولى هو:

أ) ١/٢ ب) ٢/٣ ج) ١/٨ د) ١/٤

١٢ إذا كان ح١ ، ح٢ حادثين متباعدين وشاملين للفراغ العيني Ω فإن:

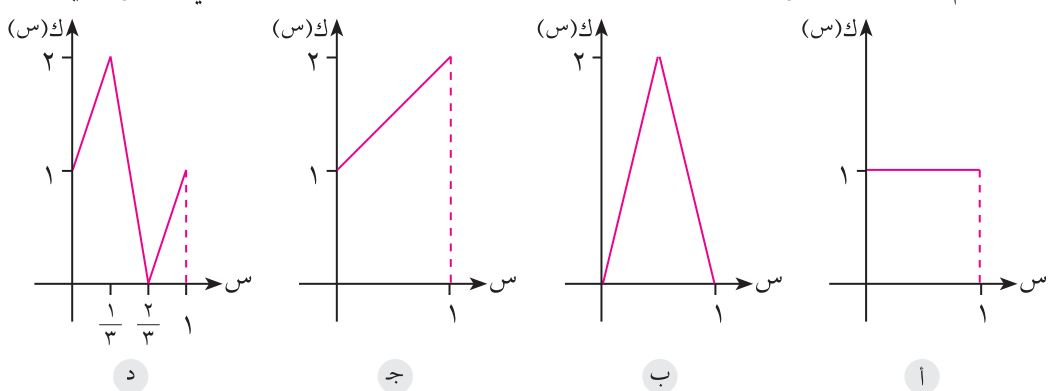
أ) ح١ ، ح٢ مستقلان ب) ح١ ⊇ ح٢ ج) ح١ − ح٢ = ∅ د) غير ذلك

١٣ إذا كان ق متغيراً عشوائياً مداه {١ ، ٢} فإن ت(ق٢) يساوي:

أ) ١ × (ل(١))٢ + ٢ × (ل(٢))٢ ب) ١ × (ل(١)٢ + (٢ × ل(٢))٢

ج) ١ × (ل(١) + ٢ × ل(٢))٢ د) ١ × ل(١) + ٤ل(٢)

١٤ أحد الرسوم البيانية التالية يمثل اقتراناً لا يمكن أن يكون اقتران كثافة احتمالية للمتغير العشوائي المتصل الذي مداه [٠ ، ١]:



١٥ إذا كان ح١ ،ح٢ حادثين مستقلين وكان ل(ح١) = ٠,٤ ، ل(ح̄٢/ح١) = ٠,٧ فإن ل(ح١ ∩ ح٢) يساوي:

أ) ٠,٢٨ ب) ٠,٤ ج) ٠,٨ د) ٠,١٢

١٦ إذا كان ت(ق) = ٣ ، ت(ك) = −٢ حيث ق ، ك متغيران عشوائيان فإن ت(٥ + ٢ق − ك) يساوي:

أ) ٨ ب) ٥ ج) ١٣ د) ٩

٢ يحتوي صندوق على ١٠ كرات مرقمة من ١−١٠؛ سحبت من الصندوق ثلاث كرات على التوالي مع الإرجاع. ما احتمال ظهور الكرة التي تحمل الرقم ٥ مرتين بالضبط؟

٣ من بين ٦ بطاقات تحمل كل منها عدداً موجباً، و٤ بطاقات تحمل كل منها عدداً سالباً، اختيرت بطاقتان على التوالي مع الإرجاع.

أ) ما احتمال أن يكون حاصل ضرب العددين على البطاقتين سالباً؟

ب) ما احتمال أن يكون حاصل ضرب العددين على البطاقتين موجباً؟

٤ يحتوي صندوق على ٦ كرات بيضاء، و٤ كرات حمراء. سحبت الكرات من الصندوق واحدة تلو الأخرى دون إرجاع

(أ) ما احتمال أن تظهر أول كرة حمراء في السحبة الثالثة؟

(ب) ما احتمال أن تظهر كرة حمراء للمرة الثانية في السحبة الرابعة؟

٥ يحتوي صندوق على خمس قطع نقود ثلاث منها عادية، والباقيتان غير عاديتين تحمل كل منهما صورتين؛ سحبت من الصندوق قطعة واحدة عشوائياً، ثم ألقيت ثلاث مرات

(أ) ما احتمال ظهور ثلاث صور؟

(ب) وإذا علم أنه ظهرت ثلاث صور، فما احتمال أن تكون القطعة المسحوبة غير عادية؟

٦ صندوقان ﻫ، ب، يحتوي الصندوق ﻫ على ٧ كرات بيضاء، و٣ كرات سوداء؛ ويحتوي الصندوق ب على كرة بيضاء واحدة و٩ كرات سوداء. نقلت كرة من ب إلى ﻫ ثم سحبت كرة من ﻫ .

(أ) ما احتمال أن تكون الكرة المسحوبة بيضاء؟

(ب) وإذا علم أن الكرة المسحوبة كانت سوداء، فما احتمال أن تكون الكرة المنقولة بيضاء؟

٧ يرمي كل من شخصين ٣ أحجار نرد منتظمة؛ ما احتمال أن يحصلا على العدد نفسه من الصور؟

٨ يحتوي صندوق على ١٠ مصابيح منها ٣ تالفة. سحب مصباحان عشوائياً على التوالي دون إرجاع. إذا كان المصباح الثاني تالفاً، فما احتمال أن يكون الأول صالحاً؟

٩ يرمي شخص ﻫ حجر نرد عادياً، ويرمي شخص ب حجر نرد غير عادي يحمل على أوجهه الأرقام:

١، ١، ١، ٤، ٤، ٥

(أ) ما احتمال أن يحصل الاثنان على رقمين مختلفين؟

(ب) ما احتمال أن يحصل أحدهما على الأقل على عدد زوجي؟

١٠ في مناظرة تلفزيونية، يطلب من المشترك الإجابة عن أسئلة متتالية، وتنتهي المناظرة عند إجابته عن أي سؤال إجابة خاطئة، أو عند إجابته عن ثلاثة أسئلة إجابات صحيحة. وعند انتهاء المناظرة يسجل للمشترك عدد إجاباته الصحيحة. فإذا كان احتمال أن يجيب أحد المشتركين عن أي من الأسئلة الثلاثة يساوي $\frac{٢}{٣}$، فأوجد توقع العدد المسجل لهذا المشترك.

١١ إذا كان اقتران الكثافة الاحتمالية لمتغير عشوائي هو:

ك(س) = ٢س ، ٠ ≤ س ≤ ١ ، فاحسب ل$\left(\frac{١}{٣} \le \text{س} \le \frac{١}{٢}\right)$

١٢ في مدينة ما كان ٦٠٪ من الأشخاص يتكلمون الإنجليزية، ٧٠٪ يتكلمون الفرنسية، ٥٠٪ يتكلمون اللغتين معاً. اختير أحد الأشخاص عشوائياً.

(أ) ما احتمال أن يتكلم الفرنسية علماً بأنه يتكلم الإنجليزية؟

(ب) ما احتمال أن يتكلم الانجليزية علماً بأنه لا يتكلم الفرنسية؟

(ج) ما احتمال أن يتكلم احدى اللغتين فقط؟

١٣ إذا كان ح$_١$ ، ح$_٢$ حادثين في Ω، وكان ل(ح$_١$) = $\frac{١}{٢}$ ، ل(ح$_١$ ∪ ح$_٢$) = $\frac{٢}{٣}$ ، ل(ح$_١$ − ح$_٢$) = $\frac{١}{٣}$ ، فاثبت أن ح$_١$ ، ح$_٢$ مستقلان .

١٤ إذا كان احتمال ظهور صورتين عند إلقاء قطعة نقد غير منتظمة مرتين متتاليتين يساوي $\frac{٤}{٩}$ ، وألقيت هذه القطعة ٣ مرات متتالية، وكان المتغير العشوائي ى يمثل عدد مرات ظهور الكتابة :

(أ) اكتب التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي ى . (ب) احسب ت(ى) .

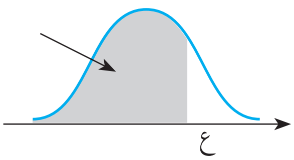
١٥ إذا كان اقتران الكثافة الاحتمالية للمتغير العشوائي ى هو :

ك(س) = ٣س^{ن} ، ٠ ≤ س ≤ ١ ، حيث ن عدد صحيح موجب، فأوجد :

(أ) قيمة ن (ب) توقع ى (جـ) قيمة أ بحيث ل(س ≤ أ) = ٠,٥

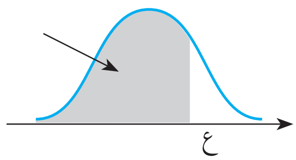
١٦ تتبع علامات الطلاب في فحص ما التوزيع الطبيعي بوسط حسابي يساوي ٥٠ ، وانحراف معياري يساوي ١٠ ؛ فإذا صنفت علامات الطلاب تنازلياً ضمن خمس فئات أ ، ب ، جـ ، د ، هـ ، على الترتيب وكانت نسبها هي : ١٠٪ ، ٢٠٪ ، ٤٠٪ ، ٢٠٪ ، ١٠٪ على التوالي ؛ فعين حدي كل فئة من هذه الفئات .

ملحق: جدول التوزيع الطبيعي المعياري التراكمي



ع	٠,٠٠	٠,٠١	٠,٠٢	٠,٠٣	٠,٠٤	٠,٠٥	٠,٠٦	٠,٠٧	٠,٠٨	٠,٠٩
٣,٧–	٠,٠٠٠١	٠,٠٠٠١	٠,٠٠٠١	٠,٠٠٠١	٠,٠٠٠١	٠,٠٠٠١	٠,٠٠٠١	٠,٠٠٠١	٠,٠٠٠١	٠,٠٠٠١
٣,٦–	٠,٠٠٠٢	٠,٠٠٠٢	٠,٠٠٠١	٠,٠٠٠١	٠,٠٠٠١	٠,٠٠٠١	٠,٠٠٠١	٠,٠٠٠١	٠,٠٠٠١	٠,٠٠٠١
٣,٥–	٠,٠٠٠٢	٠,٠٠٠٢	٠,٠٠٠٢	٠,٠٠٠٢	٠,٠٠٠٢	٠,٠٠٠٢	٠,٠٠٠٢	٠,٠٠٠٢	٠,٠٠٠٢	٠,٠٠٠٢
٣,٤–	٠,٠٠٠٣	٠,٠٠٠٣	٠,٠٠٠٣	٠,٠٠٠٣	٠,٠٠٠٣	٠,٠٠٠٣	٠,٠٠٠٣	٠,٠٠٠٣	٠,٠٠٠٣	٠,٠٠٠٢
٣,٣–	٠,٠٠٠٥	٠,٠٠٠٥	٠,٠٠٠٥	٠,٠٠٠٤	٠,٠٠٠٤	٠,٠٠٠٤	٠,٠٠٠٤	٠,٠٠٠٤	٠,٠٠٠٤	٠,٠٠٠٣
٣,٢–	٠,٠٠٠٧	٠,٠٠٠٧	٠,٠٠٠٦	٠,٠٠٠٦	٠,٠٠٠٦	٠,٠٠٠٦	٠,٠٠٠٦	٠,٠٠٠٥	٠,٠٠٠٥	٠,٠٠٠٥
٣,١–	٠,٠٠١٠	٠,٠٠٠٩	٠,٠٠٠٩	٠,٠٠٠٩	٠,٠٠٠٨	٠,٠٠٠٨	٠,٠٠٠٨	٠,٠٠٠٨	٠,٠٠٠٧	٠,٠٠٠٧
٣,٠–	٠,٠٠١٣	٠,٠٠١٣	٠,٠٠١٣	٠,٠٠١٢	٠,٠٠١٢	٠,٠٠١١	٠,٠٠١١	٠,٠٠١١	٠,٠٠١٠	٠,٠٠١٠
٢,٩–	٠,٠٠١٩	٠,٠٠١٨	٠,٠٠١٨	٠,٠٠١٧	٠,٠٠١٦	٠,٠٠١٦	٠,٠٠١٥	٠,٠٠١٥	٠,٠٠١٤	٠,٠٠١٤
٢,٨–	٠,٠٠٢٦	٠,٠٠٢٥	٠,٠٠٢٤	٠,٠٠٢٣	٠,٠٠٢٣	٠,٠٠٢٢	٠,٠٠٢١	٠,٠٠٢١	٠,٠٠٢٠	٠,٠٠١٩
٢,٧–	٠,٠٠٣٥	٠,٠٠٣٤	٠,٠٠٣٣	٠,٠٠٣٢	٠,٠٠٣١	٠,٠٠٣٠	٠,٠٠٢٩	٠,٠٠٢٨	٠,٠٠٢٧	٠,٠٠٢٦
٢,٦–	٠,٠٠٤٧	٠,٠٠٤٥	٠,٠٠٤٤	٠,٠٠٤٣	٠,٠٠٤١	٠,٠٠٤٠	٠,٠٠٣٩	٠,٠٠٣٨	٠,٠٠٣٧	٠,٠٠٣٦
٢,٥–	٠,٠٠٦٢	٠,٠٠٦٠	٠,٠٠٥٩	٠,٠٠٥٧	٠,٠٠٥٥	٠,٠٠٥٤	٠,٠٠٥٢	٠,٠٠٥١	٠,٠٠٤٩	٠,٠٠٤٨
٢,٤–	٠,٠٠٨٢	٠,٠٠٨٠	٠,٠٠٧٨	٠,٠٠٧٥	٠,٠٠٧٣	٠,٠٠٧١	٠,٠٠٦٩	٠,٠٠٦٨	٠,٠٠٦٦	٠,٠٠٦٤
٢,٣–	٠,٠١٠٧	٠,٠١٠٤	٠,٠١٠٢	٠,٠٠٩٩	٠,٠٠٩٦	٠,٠٠٩٤	٠,٠٠٩١	٠,٠٠٨٩	٠,٠٠٨٧	٠,٠٠٨٤
٢,٢–	٠,٠١٣٩	٠,٠١٣٦	٠,٠١٣٢	٠,٠١٢٩	٠,٠١٢٥	٠,٠١٢٢	٠,٠١١٩	٠,٠١١٦	٠,٠١١٣	٠,٠١١٠
٢,١–	٠,٠١٧٩	٠,٠١٧٤	٠,٠١٧٠	٠,٠١٦٦	٠,٠١٦٢	٠,٠١٥٨	٠,٠١٥٤	٠,٠١٥٠	٠,٠١٤٦	٠,٠١٤٣
٢,٠–	٠,٠٢٢٨	٠,٠٢٢٢	٠,٠٢١٧	٠,٠٢١٢	٠,٠٢٠٧	٠,٠٢٠٢	٠,٠١٩٧	٠,٠١٩٢	٠,٠١٨٨	٠,٠١٨٣
١,٩–	٠,٠٢٨٧	٠,٠٢٨١	٠,٠٢٧٤	٠,٠٢٦٨	٠,٠٢٦٢	٠,٠٢٥٦	٠,٠٢٥٠	٠,٠٢٤٤	٠,٠٢٣٩	٠,٠٢٣٣
١,٨–	٠,٠٣٥٩	٠,٠٣٥١	٠,٠٣٤٤	٠,٠٣٣٦	٠,٠٣٢٩	٠,٠٣٢٢	٠,٠٣١٤	٠,٠٣٠٧	٠,٠٣٠١	٠,٠٢٩٤
١,٧–	٠,٠٤٤٦	٠,٠٤٣٦	٠,٠٤٢٧	٠,٠٤١٨	٠,٠٤٠٩	٠,٠٤٠١	٠,٠٣٩٢	٠,٠٣٨٤	٠,٠٣٧٥	٠,٠٣٦٧
١,٦–	٠,٠٥٤٨	٠,٠٥٣٧	٠,٠٥٢٦	٠,٠٥١٦	٠,٠٥٠٥	٠,٠٤٩٥	٠,٠٤٨٥	٠,٠٤٧٥	٠,٠٤٦٥	٠,٠٤٥٥
١,٥–	٠,٠٦٦٨	٠,٠٦٥٥	٠,٠٦٤٣	٠,٠٦٣٠	٠,٠٦١٨	٠,٠٦٠٦	٠,٠٥٩٤	٠,٠٥٨٢	٠,٠٥٧١	٠,٠٥٥٩
١,٤–	٠,٠٨٠٨	٠,٠٧٩٣	٠,٠٧٧٨	٠,٠٧٦٤	٠,٠٧٤٩	٠,٠٧٣٥	٠,٠٧٢١	٠,٠٧٠٨	٠,٠٦٩٤	٠,٠٦٨١
١,٣–	٠,٠٩٦٨	٠,٠٩٥١	٠,٠٩٣٤	٠,٠٩١٨	٠,٠٩٠١	٠,٠٨٨٥	٠,٠٨٦٩	٠,٠٨٥٣	٠,٠٨٣٨	٠,٠٨٢٣
١,٢–	٠,١١٥١	٠,١١٣١	٠,١١١٢	٠,١٠٩٣	٠,١٠٧٥	٠,١٠٥٦	٠,١٠٣٨	٠,١٠٢٠	٠,١٠٠٣	٠,٠٩٨٥
١,١–	٠,١٣٥٧	٠,١٣٣٥	٠,١٣١٤	٠,١٢٩٢	٠,١٢٧١	٠,١٢٥١	٠,١٢٣٠	٠,١٢١٠	٠,١١٩٠	٠,١١٧٠
١,٠–	٠,١٥٨٧	٠,١٥٦٢	٠,١٥٣٩	٠,١٥١٥	٠,١٤٩٢	٠,١٤٦٩	٠,١٤٤٦	٠,١٤٢٣	٠,١٤٠١	٠,١٣٧٩
٠,٩–	٠,١٨٤١	٠,١٨١٤	٠,١٧٨٨	٠,١٧٦٢	٠,١٧٣٦	٠,١٧١١	٠,١٦٨٥	٠,١٦٦٠	٠,١٦٣٥	٠,١٦١١
٠,٨–	٠,٢١١٩	٠,٢٠٩٠	٠,٢٠٦١	٠,٢٠٣٣	٠,٢٠٠٥	٠,١٩٧٧	٠,١٩٤٩	٠,١٩٢٢	٠,١٨٩٤	٠,١٨٦٧
٠,٧–	٠,٢٤٢٠	٠,٢٣٨٩	٠,٢٣٥٨	٠,٢٣٢٧	٠,٢٢٩٦	٠,٢٢٦٦	٠,٢٢٣٦	٠,٢٢٠٦	٠,٢١٧٧	٠,٢١٤٨
٠,٦–	٠,٢٧٤٣	٠,٢٧٠٩	٠,٢٦٧٦	٠,٢٦٤٣	٠,٢٦١١	٠,٢٥٧٨	٠,٢٥٤٦	٠,٢٥١٤	٠,٢٤٨٣	٠,٢٤٥١
٠,٥–	٠,٣٠٨٥	٠,٣٠٥٠	٠,٣٠١٥	٠,٢٩٨١	٠,٢٩٤٦	٠,٢٩١٢	٠,٢٨٧٧	٠,٢٨٤٣	٠,٢٨١٠	٠,٢٧٧٦
٠,٤–	٠,٣٤٤٦	٠,٣٤٠٩	٠,٣٣٧٢	٠,٣٣٣٦	٠,٣٣٠٠	٠,٣٢٦٤	٠,٣٢٢٨	٠,٣١٩٢	٠,٣١٥٦	٠,٣١٢١
٠,٣–	٠,٣٨٢١	٠,٣٧٨٣	٠,٣٧٤٥	٠,٣٧٠٧	٠,٣٦٦٩	٠,٣٦٣٢	٠,٣٥٩٤	٠,٣٥٥٧	٠,٣٥٢٠	٠,٣٤٨٣
٠,٢–	٠,٤٢٠٧	٠,٤١٦٨	٠,٤١٢٩	٠,٤٠٩٠	٠,٤٠٥٢	٠,٤٠١٣	٠,٣٩٧٤	٠,٣٩٣٦	٠,٣٨٩٧	٠,٣٨٥٩
٠,١–	٠,٤٦٠٢	٠,٤٥٦٢	٠,٤٥٢٢	٠,٤٤٨٣	٠,٤٤٤٣	٠,٤٤٠٤	٠,٤٣٦٤	٠,٤٣٢٥	٠,٤٢٨٦	٠,٤٢٤٧
٠,٠	٠,٥٠٠٠	٠,٤٩٦٠	٠,٤٩٢٠	٠,٤٨٨٠	٠,٤٨٤٠	٠,٤٨٠١	٠,٤٧٦١	٠,٤٧٢١	٠,٤٦٨١	٠,٤٦٤١

تابع جدول التوزيع الطبيعي المعياري التراكمي



ع	٠,٠٠	٠,٠١	٠,٠٢	٠,٠٣	٠,٠٤	٠,٠٥	٠,٠٦	٠,٠٧	٠,٠٨	٠,٠٩
٠,٠	٠,٥٠٠٠	٠,٥٠٤٠	٠,٥٠٨٠	٠,٥١٢٠	٠,٥١٦٠	٠,٥١٩٩	٠,٥٢٣٩	٠,٥٢٧٩	٠,٥٣١٩	٠,٥٣٥٩
٠,١	٠,٥٣٩٨	٠,٥٤٣٨	٠,٥٤٧٨	٠,٥٥١٧	٠,٥٥٥٧	٠,٥٥٩٦	٠,٥٦٣٦	٠,٥٦٧٥	٠,٥٧١٤	٠,٥٧٥٣
٠,٢	٠,٥٧٩٣	٠,٥٨٣٢	٠,٥٨٧١	٠,٥٩١٠	٠,٥٩٤٨	٠,٥٩٨٧	٠,٦٠٢٦	٠,٦٠٦٤	٠,٦١٠٣	٠,٦١٤١
٠,٣	٠,٦١٧٩	٠,٦٢١٧	٠,٦٢٥٥	٠,٦٢٩٣	٠,٦٣٣١	٠,٦٣٦٨	٠,٦٤٠٦	٠,٦٤٤٣	٠,٦٤٨٠	٠,٦٥١٧
٠,٤	٠,٦٥٥٤	٠,٦٥٩١	٠,٦٦٢٨	٠,٦٦٦٤	٠,٦٧٠٠	٠,٦٧٣٦	٠,٦٧٧٢	٠,٦٨٠٨	٠,٦٨٤٤	٠,٦٨٧٩
٠,٥	٠,٦٩١٥	٠,٦٩٥٠	٠,٦٩٨٥	٠,٧٠١٩	٠,٧٠٥٤	٠,٧٠٨٨	٠,٧١٢٣	٠,٧١٥٧	٠,٧١٩٠	٠,٧٢٢٤
٠,٦	٠,٧٢٥٧	٠,٧٢٩١	٠,٧٣٢٤	٠,٧٣٥٧	٠,٧٣٨٩	٠,٧٤٢٢	٠,٧٤٥٤	٠,٧٤٨٦	٠,٧٥١٧	٠,٧٥٤٩
٠,٧	٠,٧٥٨٠	٠,٧٦١١	٠,٧٦٤٢	٠,٧٦٧٣	٠,٧٧٠٤	٠,٧٧٣٤	٠,٧٧٦٤	٠,٧٧٩٤	٠,٧٨٢٣	٠,٧٨٥٢
٠,٨	٠,٧٨٨١	٠,٧٩١٠	٠,٧٩٣٩	٠,٧٩٦٧	٠,٧٩٩٥	٠,٨٠٢٣	٠,٨٠٥١	٠,٨٠٧٨	٠,٨١٠٦	٠,٨١٣٣
٠,٩	٠,٨١٥٩	٠,٨١٨٦	٠,٨٢١٢	٠,٨٢٣٨	٠,٨٢٦٤	٠,٨٢٨٩	٠,٨٣١٥	٠,٨٣٤٠	٠,٨٣٦٥	٠,٨٣٨٩
١,٠	٠,٨٤١٣	٠,٨٤٣٨	٠,٨٤٦١	٠,٨٤٨٥	٠,٨٥٠٨	٠,٨٥٣١	٠,٨٥٥٤	٠,٨٥٧٧	٠,٨٥٩٩	٠,٨٦٢١
١,١	٠,٨٦٤٣	٠,٨٦٦٥	٠,٨٦٨٦	٠,٨٧٠٨	٠,٨٧٢٩	٠,٨٧٤٩	٠,٨٧٧٠	٠,٨٧٩٠	٠,٨٨١٠	٠,٨٨٣٠
١,٢	٠,٨٨٤٩	٠,٨٨٦٩	٠,٨٨٨٨	٠,٨٩٠٧	٠,٨٩٢٥	٠,٨٩٤٤	٠,٨٩٦٢	٠,٨٩٨٠	٠,٨٩٩٧	٠,٩٠١٥
١,٣	٠,٩٠٣٢	٠,٩٠٤٩	٠,٩٠٦٦	٠,٩٠٨٢	٠,٩٠٩٩	٠,٩١١٥	٠,٩١٣١	٠,٩١٤٧	٠,٩١٦٢	٠,٩١٧٧
١,٤	٠,٩١٩٢	٠,٩٢٠٧	٠,٩٢٢٢	٠,٩٢٣٦	٠,٩٢٥١	٠,٩٢٦٥	٠,٩٢٧٩	٠,٩٢٩٢	٠,٩٣٠٦	٠,٩٣١٩
١,٥	٠,٩٣٣٢	٠,٩٣٤٥	٠,٩٣٥٧	٠,٩٣٧٠	٠,٩٣٨٢	٠,٩٣٩٤	٠,٩٤٠٦	٠,٩٤١٨	٠,٩٤٢٩	٠,٩٤٤١
١,٦	٠,٩٤٥٢	٠,٩٤٦٣	٠,٩٤٧٤	٠,٩٤٨٤	٠,٩٤٩٥	٠,٩٥٠٥	٠,٩٥١٥	٠,٩٥٢٥	٠,٩٥٣٥	٠,٩٥٤٥
١,٧	٠,٩٥٥٤	٠,٩٥٦٤	٠,٩٥٧٣	٠,٩٥٨٢	٠,٩٥٩١	٠,٩٥٩٩	٠,٩٦٠٨	٠,٩٦١٦	٠,٩٦٢٥	٠,٩٦٣٣
١,٨	٠,٩٦٤١	٠,٩٦٤٩	٠,٩٦٥٦	٠,٩٦٦٤	٠,٩٦٧١	٠,٩٦٧٨	٠,٩٦٨٦	٠,٩٦٩٣	٠,٩٦٩٩	٠,٩٧٠٦
١,٩	٠,٩٧١٣	٠,٩٧١٩	٠,٩٧٢٦	٠,٩٧٣٢	٠,٩٧٣٨	٠,٩٧٤٤	٠,٩٧٥٠	٠,٩٧٥٦	٠,٩٧٦١	٠,٩٧٦٧
٢,٠	٠,٩٧٧٢	٠,٩٧٧٨	٠,٩٧٨٣	٠,٩٧٨٨	٠,٩٧٩٣	٠,٩٧٩٨	٠,٩٨٠٣	٠,٩٨٠٨	٠,٩٨١٢	٠,٩٨١٧
٢,١	٠,٩٨٢١	٠,٩٨٢٦	٠,٩٨٣٠	٠,٩٨٣٤	٠,٩٨٣٨	٠,٩٨٤٢	٠,٩٨٤٦	٠,٩٨٥٠	٠,٩٨٥٤	٠,٩٨٥٧
٢,٢	٠,٩٨٦١	٠,٩٨٦٤	٠,٩٨٦٨	٠,٩٨٧١	٠,٩٨٧٥	٠,٩٨٧٨	٠,٩٨٨١	٠,٩٨٨٤	٠,٩٨٨٧	٠,٩٨٩٠
٢,٣	٠,٩٨٩٣	٠,٩٨٩٦	٠,٩٨٩٨	٠,٩٩٠١	٠,٩٩٠٤	٠,٩٩٠٦	٠,٩٩٠٩	٠,٩٩١١	٠,٩٩١٣	٠,٩٩١٦
٢,٤	٠,٩٩١٨	٠,٩٩٢٠	٠,٩٩٢٢	٠,٩٩٢٥	٠,٩٩٢٧	٠,٩٩٢٩	٠,٩٩٣١	٠,٩٩٣٢	٠,٩٩٣٤	٠,٩٩٣٦
٢,٥	٠,٩٩٣٨	٠,٩٩٤٠	٠,٩٩٤١	٠,٩٩٤٣	٠,٩٩٤٥	٠,٩٩٤٦	٠,٩٩٤٨	٠,٩٩٤٩	٠,٩٩٥١	٠,٩٩٥٢
٢,٦	٠,٩٩٥٣	٠,٩٩٥٥	٠,٩٩٥٦	٠,٩٩٥٧	٠,٩٩٥٩	٠,٩٩٦٠	٠,٩٩٦١	٠,٩٩٦٢	٠,٩٩٦٣	٠,٩٩٦٤
٢,٧	٠,٩٩٦٥	٠,٩٩٦٦	٠,٩٩٦٧	٠,٩٩٦٨	٠,٩٩٦٩	٠,٩٩٧٠	٠,٩٩٧١	٠,٩٩٧٢	٠,٩٩٧٣	٠,٩٩٧٤
٢,٨	٠,٩٩٧٤	٠,٩٩٧٥	٠,٩٩٧٦	٠,٩٩٧٧	٠,٩٩٧٧	٠,٩٩٧٨	٠,٩٩٧٩	٠,٩٩٧٩	٠,٩٩٨٠	٠,٩٩٨١
٢,٩	٠,٩٩٨١	٠,٩٩٨٢	٠,٩٩٨٢	٠,٩٩٨٣	٠,٩٩٨٤	٠,٩٩٨٤	٠,٩٩٨٥	٠,٩٩٨٥	٠,٩٩٨٦	٠,٩٩٨٦
٣,٠	٠,٩٩٨٧	٠,٩٩٨٧	٠,٩٩٨٧	٠,٩٩٨٨	٠,٩٩٨٨	٠,٩٩٨٩	٠,٩٩٨٩	٠,٩٩٨٩	٠,٩٩٩٠	٠,٩٩٩٠
٣,١	٠,٩٩٩٠	٠,٩٩٩١	٠,٩٩٩١	٠,٩٩٩١	٠,٩٩٩٢	٠,٩٩٩٢	٠,٩٩٩٢	٠,٩٩٩٢	٠,٩٩٩٣	٠,٩٩٩٣
٣,٢	٠,٩٩٩٣	٠,٩٩٩٣	٠,٩٩٩٤	٠,٩٩٩٤	٠,٩٩٩٤	٠,٩٩٩٤	٠,٩٩٩٤	٠,٩٩٩٥	٠,٩٩٩٥	٠,٩٩٩٥
٣,٣	٠,٩٩٩٥	٠,٩٩٩٥	٠,٩٩٩٥	٠,٩٩٩٦	٠,٩٩٩٦	٠,٩٩٩٦	٠,٩٩٩٦	٠,٩٩٩٦	٠,٩٩٩٦	٠,٩٩٩٧
٣,٤	٠,٩٩٩٧	٠,٩٩٩٧	٠,٩٩٩٧	٠,٩٩٩٧	٠,٩٩٩٧	٠,٩٩٩٧	٠,٩٩٩٧	٠,٩٩٩٧	٠,٩٩٩٧	٠,٩٩٩٨
٣,٥	٠,٩٩٩٨	٠,٩٩٩٨	٠,٩٩٩٨	٠,٩٩٩٨	٠,٩٩٩٨	٠,٩٩٩٨	٠,٩٩٩٨	٠,٩٩٩٨	٠,٩٩٩٨	٠,٩٩٩٨
٣,٦	٠,٩٩٩٨	٠,٩٩٩٨	٠,٩٩٩٩	٠,٩٩٩٩	٠,٩٩٩٩	٠,٩٩٩٩	٠,٩٩٩٩	٠,٩٩٩٩	٠,٩٩٩٩	٠,٩٩٩٩
٣,٧	٠,٩٩٩٩	٠,٩٩٩٩	٠,٩٩٩٩	٠,٩٩٩٩	٠,٩٩٩٩	٠,٩٩٩٩	٠,٩٩٩٩	٠,٩٩٩٩	٠,٩٩٩٩	٠,٩٩٩٩

المراجع

1- Thomas Calculus, 10th Edition, Addison Wisely, 2000
2- Calculus with Analytic Geometry, Edwards & Penny, 4th Edition, Prentice hall 1994
3- Calculus, Howard Anton, 6th Edition, John Wiley, 1999
4- Calculus, One & Several Variables, S.L.Salas, Einar hille, 4th Edition, 1982,
5- Probability Kubais Fahady, J. Shamoon
6- Intoduction to Probability Theory & Statistical Inference, 3th Edition, Harold J. Larson
7- Basic Statistics for Business & Economics, 4th Edition, by Lind, Marchal, & Williams
8- Complete Business Statistics, by Amir D. Aczel & Jayavel Sounderpandian 3th Edition

أسماء المشاركين في إقرار الكتاب