دولة ليبيا
وزارة التعليم
مركز المناهج التعليمية والبحوث التربوية

الرياضيات

للسنة الثالثة من مرحلة التعليم الثانوي
القسم العلمي

1440 - 1441 هـ
2019 - 2020 م

مُقَدِّمَة

تركز سلسلة رياضيات التعليم الأساسي والثانوي على دمج مهارات التفكير. وتقانة المعلومات.والتربية الوطنية ضمن تعليم وتعلم الرياضيات.   وتتكون السلسلة من ثلاثة كتب للشق الثاني من مرحلة التعليم الأساسي. وثلاثة كتب للصفوف الثلاثة من مرحلة التعليم الثانوي. وقد رتبت المادة ترتيباً تربوياً سليماً يدعم فيه التفكير المجرد بأمثلة ملموسة. تساعد الطلبة عى فهم الحلول التي تم التوصل إليها جبرياً بشكل أفضل.

وقد روعى تقديم المفاهيم الواحد تلو الأخر لكي يستوعبها الطلبة بسهولة. وعُزز فهم المفاهيم بالإستخدام الحكيم للأمثلة المحلولة والتدريبات متدرجة الصعوبة. تُرَكِّز كتب مرحلة التعليم الأساسي على إتقان وتطبيق المهارات الأساسية بحيث. يُكوِّن أساس سليم للدراسات التالية. وتتضمن المهارات الأساسية التقدير. والحسابات الذهنية. ومعالجة البيانات.   وتُستخدم في كل جزء من السلسلة أنشطة لإرشاد الطلبة في كيفية استخدام مهارات التفكير مثل الاستقراء. ولاكتشاف القوانين والنظريات الرياضية بأنفسهم. وليتعرفوا كذلك على كيفية استخدام برامج الحاسوب في عدد من الأنشطة.

ويتم حث الطلبة من خلال نشاطات وأمثلة محلولة مناسبة على أستخدام استراتيجيات حل المشكلات. وتشجيع التعلم الذاتي مثل التقدير. وبناء النموذج. وإنشاء الجدول. وإعداد القائمة النظامية. والعمل إلي الخلف. واستخدام المعادلات. وتبسيط المشكلة. وتستخدم حيثما أمكن الأشكال البيانية لتذليل صعوبة المشكلات اللفظية ولجعلها أكثر طواعيه للحل.

ولجعل الطلبة يألفون الكتب قبل استخدامها. نورد فيما يلي الملامح المميزة لهذه السلسلة.
❖ يبدأ كل فصل "بمقدمة" قصيرة عن الموضوع. تليها قائمة بنواتج التعلم يمكن للطلبة استخدامها في تأكيد ما تعلموه بنهاية كل فصل من الكتاب.

ونأمل أن تساعد المادة المقدمة في السلسلة الطلبة على تقدير أهمية وقدرة الرياضيات في نشاطاتهم اليومية ، وربما في مهنتهم المستقبلية ، وأن يستمتعوا بأستخدام سلسلة الرياضيات اتلعليم الأساسي والثانوي.
❖يقدم للطلبة "أمثلة محلولة" لتعزيز فهم المفاهيم ولتعرفيهم بأنواع عديدة من المسائل.بما فيها التي تساعدهم على مراقبة تفكيرهم الذاتي.

تتضمن "التمرينات متدرجة الصعوبة" أسئلة مناسبة لمدى واسع من القدارات. وصممت الأسئلة بشكل يجعل الطلبة يستخدمون التفكير المنطقس الاستدلالي والاستقرائي لحل المشكلات الرياضية. (ويمكن أن يختار المعلمون مسائل مختلفة للطلبة من ذوي القدارات المختلفة).

"الرياضيات الممتعة" أو "استقصاء الرياضيات" والموجودة فيٍ نهاية كل فصل من الكتاب (فيما عدا فصول المراجعة) مخصصة لغرس وتنمية مهارات التفكير. وستعرض أيذاً هذه الأنشطة بعض القضايا الوطنية ذات الصلة على الطلبة. كما توجد ورقة للمراجعة في نهايةن كل فصل من الكتاب (فيما عدا فصول المراجعة) حتى يتمكن الطلبة من قياس مستوى كفايتهم باستمرار.

الرموز الرياضية

نظام الوحدات العالمية Si Units

يستخدم نظام الوحدات العالمية سبع وحدات أساسية وتشتق جميع الوحدات الأخرى من هذه الوحدات الأساسية بضرب أوقسمة وحدة في وحدة أخرى.

الكمية الفيزيائية	اسم الوحدة الأساسية	رمز الوحدة
الطول	متر	م
الكتلة	كيلو جرام	كجم
الزمن	الثانية	ث
التيار الكهربائي	أمبير	أم
درجات حرارة الترمومتر	كيلفن	ك
شدة الإضاءة	شمعة	شـ
كمية المادة	مول	مل

بعض جداول التحويل Some Conversion Tables

الطول:

10 ملليمتر (مم) =1 سم

10 سنتيمتر (سم) = 1 ديسيمتر (دس)

10 ديسيمتر (دس) = 1 متر (م)

10 متر (دس) = 1 ديكامتر (دام)

10 ديكامتر (دام) = 1 هيكتومتر (هكم)

10 هيكتومتر (هكم) = 1 كيلومتر (كم)

الكتلة:

10 ملليجرام (مج) =1 سنتيجرام (سجم)

10 سنتيجرام (سجم) = 1 ديسيجرام(دس)

10 ديسيجرام = 1 جرام

10 جرام = 1 ديكاجرام

10 ديكاجرام = 1 هيكتوجرام

10 هيكتوجرام = 1 كيلوجرام

1000 كيلوجرام = 1 طن

المساحة:

1 هكتار =10000 م^2

100 هكتار = 1 كم^2

الحجم والسعة:

1000 مل = 1 لتر

1 مل = 1 س^3

الزمن:

الدقيقة (ق) = 60 ثانية (ث)

الساعة = 60 دقيقة (ث)

1 يوم = 24 ساعة

1 عام = 365 يوم

1 سنة كبيسة = 366 يوم

الرموز الرياضية

$\ni$ تنتمي إلى

$\not\ni$ لا تنتمي إلى

$\varnothing$ مجموعة خالية

$\supset$ مجموعة جزئية فعلية

$\not\supset$ ليست مجموعة فعلية من

$\supseteq$ مجموعة جزئية من مجموعة أخرى

$\not\supseteq$ ليست مجموعة جزئية من

$\cup$ اتحاد المجموعات

$\cap$ تقاطع المجموعات

$=$ يساوي

$\neq$ لا يساوي

$\equiv$ لا يكافيء

$\approx$ تقريبا

$\propto$ يتناسب

$>$ أصغر من

$<$ أكبر من

$\geqslant$ أصغر من أو يساوي

$\leqslant$ أكبر من أو يساوي

ط = مجموعة الأعداد الطبيعية. = { 1 ، 2، 3 ، ... } -

ك =مجموعة الأعداد الكلية. { 0، 1 ، 2 ، 3 ، .. } -

ص = مجموعة الأعداد الصحيحة. { 0 ، ± 1 ، ± 2 ، ± 3 ، ... }

ن مجموعة الأعداد القياسية.

ح مجموعة الأعداد الحقيقية.

أ + ب وتعنى أ زائد ب

أ - ب وتعنى أ ناقص ب

أ × ب = أ. ب وتعني أ مضروبة في ب

$\frac{\text{أ}}{\text{ب}}$ وتعني أ مقسومة على ب

$\sqrt{\text{أ}}$ الجذرالتربيعي للعدد الحقيقي أ حيث: أ > الصفر

$|\text{أ}|$ القيمة المطلقة للعدد الحقيقي أ

π ط وقيمتها 3.14 أو 22 ÷ 7

مساحة المربع= طول ضلع المربع × نفسه

محيط المربع = طول ضلع المربع × 4

مساحة المستطيل= الطول × العرض

محيط المستطيل = (الطول + العرض) × 2

مساحة المثلث= $\frac{1}{2}$ القاعدة × الارتفاع

محيط المثلث = مجموع أطوال أضلاعه

محيط الدائرة=2 πنق.

مساحة الدائرة= π نق^2.

حجم الكرة = $\frac{4}{3}$ π نق^3

مساحة سطح الكرة = 4 π نق^2

المساحة الكلية للأسطوانة = 2× نق× π (ع+نق).

حجم المخروط الدائري القائم = $\frac{1}{3}$ π نق^2 ع

حجم المكعب = ل^3 حيث ل طول حرف المكعب

الفهرس

المصفوفات والمحددات

المصفوفات والمحددات
Limitations and Matrices

1-1: المحددات Limitations

ظهرت المحددات في البداية مرتبطة بحل المعادلات الخطية الآنية، فمثلا إذا رغبنا في نقطة تقاطع المستقيمين:

$$\text{أ}_1\text{س} + \text{ب}_1\text{ص} = \text{ج}_1 \quad \cdots\cdots \quad (i)$$

$$\text{أ}_2\text{س} + \text{ب}_2\text{ص} = \text{ج}_2 \quad \cdots\cdots \quad (ii)$$

فإننا نحاول أن نجد زوجا من الأعداد س ، ص يُحققان المعادلتين في آن واحد وإحدى الطرق لذلك بضرب المعادلة (i) في ب_2 والثانية في $-\text{ب}_1$.

$$\text{أ}_1\text{ب}_2\text{س} + \text{ب}_1\text{ب}_2\text{ص} = \text{ب}_2\text{ج}_1 \quad \cdots\cdots \quad (i')$$

$$-\text{أ}_2\text{ب}_1\text{س} - \text{ب}_1\text{ب}_2\text{ص} = -\text{ب}_1\text{ج}_2 \quad \cdots\cdots \quad (ii')$$

بالجمع...

$$\text{أ}_1\text{ب}_2\text{س} - \text{أ}_2\text{ب}_1\text{س} = \text{ب}_2\text{ج}_1 - \text{ب}_1\text{ج}_2$$

$$\boxed{\text{س} = \frac{\text{ب}_2\text{ج}_1 - \text{ب}_1\text{ج}_2}{\text{أ}_1\text{ب}_2 - \text{أ}_2\text{ب}_1}} \quad \cdots\cdots \quad ①$$

وبضرب المعادلة (i) في $-\text{أ}_2$ ، والمعادلة (ii) أ_1 .

$$-\text{أ}_1\text{أ}_2\text{س} - \text{أ}_2\text{ب}_1\text{ص} = -\text{أ}_2\text{ج}_1 \quad \cdots\cdots \quad (i'')$$

$$\text{أ}_1\text{أ}_2\text{س} + \text{أ}_1\text{ب}_2\text{ص} = \text{أ}_1\text{ج}_2 \quad \cdots\cdots \quad (ii'')$$

بالجمع...

$$\text{أ}_1\text{ب}_2\text{ص} - \text{أ}_2\text{ب}_1\text{ص} = \text{أ}_1\text{ج}_2 - \text{أ}_2\text{ج}_1$$

$$\boxed{\text{ص} = \frac{\text{أ}_1\text{ج}_2 - \text{أ}_2\text{ج}_1}{\text{أ}_1\text{ب}_2 - \text{أ}_2\text{ب}_1}} \quad \cdots\cdots \quad ②$$

من ①، ② نجد أنهما الثنائي الوحيد من الأعداد الذي يحقق المعادلتين (i) (ii)

بشرط أن يكون: $أ_1 ب_2 - أ_2 ب_1 \neq 0$. والتعبير $أ_1 ب_2 - أ_2 ب_1$ يُمكن كتابته رمزيا بالشكل التالي:

$$م_2 = \begin{vmatrix} أ_1 & ب_1 \\ أ_2 & ب_2 \end{vmatrix}$$

والذي يسمى محددا من الرتبة الثانية لأنه يحتوي على سطرين أفقيين (صفين) وعمودين بين خطين رأسيين والكميات $أ_1$ ، $ب_1$ ، $أ_2$ ، $ب_2$ التي يتكون منها المحدد تعرف بالعناصر (مكونات المحدد) والعناصر تعرف بالعناصر القطرية ويعرف التعبير ($أ_1 ب_2 - أ_2 ب_1$) بأنه قيمة المحدد $م_2$ ، وعلى ذلك فإن:

$$\begin{vmatrix} أ_1 & ب_1 \\ أ_2 & ب_2 \end{vmatrix} = أ_1 ب_2 - أ_2 ب_1$$

مثال1:

احسب قيمة كل من المحددات الأتية:

(i) $\begin{vmatrix} 2 & 4- \\ 3 & 7- \end{vmatrix}$ (ii) $\begin{vmatrix} أ + ب & ب \\ -ب & أ - ب \end{vmatrix}$ (iii) $\begin{vmatrix} قاهـ & ظا^2هـ \\ 1 & قاهـ \end{vmatrix}$

الحل:

(i) $\begin{vmatrix} 2 & 4- \\ 3 & 7- \end{vmatrix} = (2 \times -7) - (3 \times -4) = -2$

(ii) $\begin{vmatrix} أ + ب & ب \\ -ب & أ - ب \end{vmatrix} = (أ + ب)(أ - ب) - (-ب \times ب) = (أ^2 - ب^2) + ب^2$

$\therefore$ قيمة المحدد $= أ^2$

(iii) $\begin{vmatrix} قاهـ & ظا^2هـ \\ 1 & قاهـ \end{vmatrix} = (قا^2هـ - ظا^2هـ) = 1$

مثال2:

إذا كانت $\begin{vmatrix} 3س & -س \\ 2س & 5س \end{vmatrix} = أس^2$ فأوجد قيمة أ ، $س \neq 0$

الحل:

$(3س \times 5س) - (2س \times -س) = أس^2$

$15س^2 + 2س^2 = أس^2 \Leftarrow$

$17س^2 = أس^2$ بقسمة المعادلة على $س^2$

$\therefore أ = 17$

مثال3:

حل المعادلات الأتية:

(i) $\begin{vmatrix} 3 & \text{س} \\ \text{س} & 2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -1 & \text{س} \\ \text{س} & 2 \end{vmatrix} = 2$

(ii) $\begin{vmatrix} -3 & \text{س} \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5 & \text{س} \\ 2 & -3 \end{vmatrix}$

(iii) $\begin{vmatrix} -4 & {}^3\text{س} \\ \text{س}^{-2} & 2 \end{vmatrix} = -1$

الحل:

(i) (س^2 + 2) + (س - 6) = 2 ⟸ (س^2 + س - 6) = 0

(س + 3) (س - 2) = 0

إما : س + 3 = 0 ∴ س = -3

أو: س - 2 = 0 ∴ س = 2

مجموعة الحل هي: {-3 ، 2}

(ii) 2س + 15 = - س + 3 ⟸ 3س = -12 ... بالقسمة على 3

س = -4

مجموعة الحل هي: {-4}

على الطالب إيجاد قيمة س التي تحقق المعادلة في الفقرة (iii)

2-1 : محدد الرتبة الثالثة:

وهي على الصورة:

$$\text{م}_3 = \begin{vmatrix} \text{أ}_{31} & \text{أ}_{21} & \text{أ}_{11} \\ \text{أ}_{32} & \text{أ}_{22} & \text{أ}_{12} \\ \text{أ}_{33} & \text{أ}_{23} & \text{أ}_{13} \end{vmatrix}$$

لها تسعة عناصر مرتبة في ثلاثة (صفوف) وثلاثة (أعمدة) لكل عنصر في المحدد دلالتان على الصورة $\text{أ}_{\text{رك}}$
حيث ر يمثل الصف، ك يمثل العمود.

فالعنصر أ_{32} يكون في الصف الثاني والعمود الثالث

أي أن: ر = 2 ، ك = 3

و العنصر أ_{13} يكون في الصف الثالث والعمود الأول

أي أن: ر = 3 ، ك = 1

3-1 : العوامل المرافقة لعناصر محدد من الرتبة الثالثة:
(المحددات الصغرى والعوامل المرافقة لعناصر محدد)

إذا أخذنا أي عنصر فى المحدد م_3 وليكن العنصر $\text{أ}_{\text{رك}}$ الذي يقع في الصف ر والعمود ك فإن:

1-المحدد من الرتبة الثانية ينشأ عند حذف الصف ر و العمود ك يسمى المحدد الأصغر للعنصر $\text{أ}_{\text{رك}}$ ونرمز له بالرمز $\text{م}_{\text{رك}}$.

2-إذا ضربنا المحدد الأصغر $\text{م}_{\text{رك}}$ $(-1)^{\text{ر+ك}}$ فإن الكمية الناتجة وهي: $(-1)^{\text{ر+ك}}\text{م}_{\text{رك}}$ وتسمى بالعامل المرافق للعنصر $\text{أ}_{\text{رك}}$.

فمثلا في المحدد: $\text{م}_3 = \begin{vmatrix} \text{أ}_{31} & \text{أ}_{21} & \text{أ}_{11} \\ \text{أ}_{32} & \text{أ}_{22} & \text{أ}_{12} \\ \text{أ}_{33} & \text{أ}_{23} & \text{أ}_{13} \end{vmatrix}$

المحددات الصغر والعوامل المرافقة لعناصر الصف الأول هي كما يلي:

❶ بالنسبة للعنصر أ_{11}: المحدد الأصغر $\text{م}_3 = \begin{vmatrix} \text{أ}_{32} & \text{أ}_{22} \\ \text{أ}_{33} & \text{أ}_{23} \end{vmatrix}$ والعامل المرافق = $(-1)^{1+1}\text{م}_{11}$

❷ بالنسبة للعنصر أ_{21}: المحدد الأصغر $\text{م}_{21} = \begin{vmatrix} \text{أ}_{32} & \text{أ}_{12} \\ \text{أ}_{33} & \text{أ}_{13} \end{vmatrix}$ العامل المرافق = $(-1)^{2+1}\text{أ}_{21}\text{م}_{21}$

❸ بالنسبة للعنصر أ_{31}: المحدد الأصغر $\text{م}_{31} = \begin{vmatrix} \text{أ}_{22} & \text{أ}_{12} \\ \text{أ}_{23} & \text{أ}_{13} \end{vmatrix}$ العامل المرافق = $(-1)^{3+1}\text{م}_{31}$

❹ بالنسبة للعنصر أ_{32}: المحدد الأصغر $\text{م}_{32} = \begin{vmatrix} \text{أ}_{21} & \text{أ}_{11} \\ \text{أ}_{13} & \text{أ}_{13} \end{vmatrix}$ العامل المرافق = $(-1)^{3+2}\text{م}_{32}$

إيجاد قيمة المحدد من الرتبة الثالثة:

إن قيمة المحدد $م_3$ لأحد الصفوف أو أحد الأعمدة نحصل عليها من العلاقة:

$$مجـ \ (-1)^{ر+ع} \ أ_{رع} \ م_{رع}$$

فتكون قيمة المحدد $م_3$ بالنسبة للصف الأول (مثلا):

$$م_3 = (-1)^{1+1} أ_{11} م_{11} + (-1)^{2+1} أ_{21} م_{21} + (-1)^{3+1} أ_{31} م_{31}$$

وتكون قيمة المحدد $م_3$ بالنسبة للعمود الأول (مثلا):

$$م_3 = (-1)^{1+1} أ_{11} م_{11} + (-1)^{1+2} أ_{12} م_{12} + (-1)^{1+3} أ_{13} م_{13}$$

وهكذا نجد أنه يمكن حساب قيمة المحدد $م_3$ باختيار أحد الصفوف أو أحد الأعمدة (بقصد التبسيط) و يطلق عادة على عملية ايجاد قيمة المحدد (بالمفكوك) وتأخذ الرمز Δ (أي قيمة المحدد).

ويمكن الاستدلال على الإشارة المستخدمة في العوامل المرافقة لعناصر المحدد $م_3$ من الشكل التالي:

$$\begin{vmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{vmatrix}$$

يمكن التعبير عن المفكوك بطرق مختلفة كمجموع ثلاثة محددات صغرى من الرتبة الثانية كل منها مضروب في عنصر من صف أو عمود.

$$م_3 = أ_{11} \begin{vmatrix} أ_{22} & أ_{32} \\ أ_{32} & أ_{33} \end{vmatrix} - أ_{21} \begin{vmatrix} أ_{12} & أ_{32} \\ أ_{13} & أ_{33} \end{vmatrix} - أ_{31} \begin{vmatrix} أ_{12} & أ_{32} \\ أ_{13} & أ_{32} \end{vmatrix}$$

مثال4:

أثبت أن المعادلة $\begin{vmatrix} س & ص & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0$ تمثل خطا مستقيما يمر بالنقطتين (1 ، 0) ، (-1 ، 2)

الحل: بفك المحدد وفقا للعوامل المرافقة لعناصر الصف الأول ومساواة النتيجة بالصفر نحصل على:

$$س \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} - ص \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + 1 \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

$$س(2 - 0) - ص(-1 - 1) + (0 - 2) = 0$$

$$2س + 2ص - 2 = 0$$ ..... بالقسمة على 2

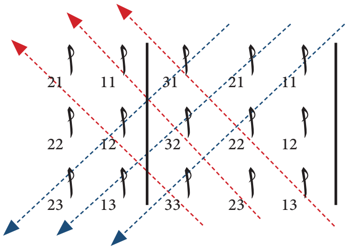
أو أن : $س + ص - 1 = 0$

وهذه المعادلة هي معادلة خط مستقيم ومن الواضح أن النقطتين (1 ، 0) ، (-1 ، 2) تحققان المعادلة.

كما يمكن الحصول على قيمة المحدد من الرتبة الثالثة باتباع الخطوات:

نعيد كتابة عناصر المحدد وعلى يسارها نكتب العمودان الأول والثاني.
ثم من الجمع لحواصل ضرب العناصر الواقعة على الخطوط.
من اليمين إلى اليسار والطرح من هذا المجموع،
مجموع حواصل ضرب العناصر الواقعة على الخطوط من اليسار إلى اليمين ويمثل بالشكل:

مجموع حواصل ضرب العناصر من اليسار إلى اليمين



مجموع حواصل ضرب العناصر من اليمين إلى اليسار

أي أن قيمة المحدد تكون:

(مجموع حواصل ضرب العناصر من اليمين إلى اليسار) - (مجموع حواصل ضرب العناصر من اليسار إلى اليمين).

مثال5:

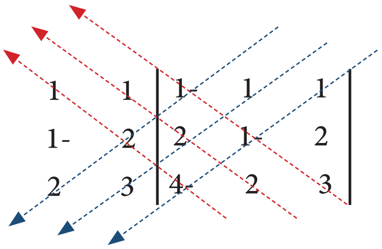
أوجد قيمة كل من:

(i) $\begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \\ -4 & 2 & 3 \end{vmatrix}$

(ii) $\begin{vmatrix} 4 & -2 & 1 \\ -\text{جتا}^2\text{س} & \text{جا}^2\text{س} & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}$

الحل:

(i)



$\Delta = (6) - (-1) = 7$

(ii) يترك للطالب.

4-1 : بعض خواص المحددات:

1- **لا تتغير قيمة المحدد إذا بدلت الأعمدة بالصفوف والصفوف بالأعمدة.**

مثال ذلك:

$$\begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 4 & 2- \end{vmatrix} \qquad \Delta_1 = 22$$

$$\begin{vmatrix} 2- & 3 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} \qquad \Delta_2 = 22$$

2- **تتغير إشارة قيمة المحدد إذا تبادل الوضع فيه بين أي صفين أو عمودين**

مثال ذلك:

$$\begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 6 & 2- \end{vmatrix} \qquad \Delta = 38$$

إذا تم استبدال ص: بـ ص$_2$ نجد أن:

$$\begin{vmatrix} 6 & 2- \\ 4 & 5 \end{vmatrix} \Leftarrow \qquad \Delta = -38$$

3- ينعدم المحدد $(\Delta = 0)$ إذا :

- وجد صف أو عمود كل عناصره أصفار.
- تساوي عناصر صفين أو عمودين.
- وجد تناسب بين عناصر أي صفين أو أي عمودين.
- وجد صف يساوي مجموع الصفين الآخرين أو عمود يساوي مجموع العمودين الآخرين.

مثال6: بدون فك المحدد أوجد قيمة المحددات الآتية:

(1) أ = $\begin{vmatrix} 0 & 9 & 3 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 18- & 5 \end{vmatrix}$

الحل: ∵ ع$_3$ عناصره أصفار ∴ $\Delta = 0$

(2) أ = $\begin{vmatrix} 5 & 2- & 3 \\ 3 & 1- & 5 \\ 2- & 1 & 2 \end{vmatrix}$

الحل: ∵ ص$_2$ = ص$_1$ + ص$_3$ ∴ $\Delta = 0$

ملحوظة :
يمكن أخذ عامل مشترك من أي صف أو عمود في محدد

(3) أ = $\begin{vmatrix} 2 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 3 \\ 3- & 1 & 9- \end{vmatrix}$

الحل: يتم أخذ 3 كعامل مشترك من العمود الأول

$$3 \begin{vmatrix} 2 & 5 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 3- & 1 & 3- \end{vmatrix}$$

∵ ع$_1$ = ع$_3$ ∴ Δ أ = 3 (0) ⇐ $\Delta = 0$

مثال7:

بدون فك المحدد أوجد قيمة ك إذا كان: $\begin{vmatrix} 2 & 7 & 2 \\ 1- & 5 & 1- \\ ك-8 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 0$

الحل:

$\Delta = 0$

إذا كان $ع_1 = ع_3$

$\therefore$ $3 = 8 - ك$

$ك = 11$

> **ملحوظة**
> في المصفوفات ضرب الثابت يتم في جميع العناصر.

3- عند ضرب المحدد في عدد حقيقي فإن الضرب يتم في صف واحد أو عمود فقط.

مثال8:

إذا كان: $أ = \begin{vmatrix} 3 & 9 & 5 \\ 2 & 8 & 4 \\ 1 & 7 & 2- \end{vmatrix}$ أوجد $2أ$

الحل:

$$2أ = 2 \begin{vmatrix} 3 & 9 & 5 \\ 2 & 8 & 4 \\ 1 & 7 & 2- \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 9 & 10 \\ 2 & 8 & 8 \\ 1 & 7 & 4- \end{vmatrix}$$

> **نتيجة**
> إذا ضرب عناصر صف أو عمود في عدد ثابت فإن قيمة المحدد الجديدة:
> ك× قيمة المحدد = ك × Δ.

> **ملحوظة**
> عند ضرب المحدد في عدد ك فإن الناتج = ك × قيمة المحدد.

4- إذا وجد صف أو عمود في صورة مجموع ن من الحدود فإن يمكن إيجاد حاصل جمع ن من المحددات.

مثال9:

$$\begin{vmatrix} ج & ب & أ \\ ع & و+س+ص & ى \\ ن & م & ل \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} ج & ب & أ \\ ع & و & ى \\ ن & م & ل \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} ج & ب & أ \\ 0 & س & 0 \\ ن & م & ل \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} ج & ب & أ \\ 0 & ص & 0 \\ ن & م & ل \end{vmatrix}$$

تمرين 1-أ

1- أوجد قيمة المحددات الآتية:

$أ = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4- & 5 \end{vmatrix}$ ، $ب = \begin{vmatrix} 9 & 5 & 4 \\ 6 & 3- & 2 \\ 4 & 1 & 8 \end{vmatrix}$

أثبت أن: $ب = \begin{vmatrix} أ^2 & أ & 1 \\ أ & أ & أ^2 \\ 1 & أ^2 & أ \end{vmatrix} = (أ^2-1)^2$ باستخدام خواص المحددات .

2- بدون فك المحددات أوجد قيمة المحددات الأتية:

$$أ = \begin{vmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 0 & -3 & 5 \\ 4 & 3 & 2 \end{vmatrix} \qquad ب = \begin{vmatrix} 9 & 12 & 3 \\ 5 & -1 & 0 \\ 3 & 4 & 1 \end{vmatrix}$$

$$جـ = \begin{vmatrix} \text{هـ} & \text{ص} & \text{س}^2 \\ 6 & 3\text{ل} & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} \qquad د = \begin{vmatrix} -3 & 2 & 5 \\ -4 & -10 & -6 \\ 6 & 4 & -2 \end{vmatrix}$$

3- أوجد قيمة المجهول في كلا مما يأتي الآتية:

(i)
$$\begin{vmatrix} \text{ع} & -2 & 7 \\ 5 & 1 & 6 \\ 6 & -3 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 7 \\ 1 & 9 & 5 \\ 6 & \text{ص} & 3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & -2 & 7 \\ 4 & \text{س} & 1 \\ 6 & -3 & 3 \end{vmatrix}$$

(ii)
$$0 = \begin{vmatrix} -2 & -1 & 2 \\ \text{ل} & 6 & 3 \\ 5 & 5 & 5 \end{vmatrix}$$

(iii) إذا كان
$$\begin{vmatrix} 2 & 5 & 7 \\ 10 & 8 & \text{ع} \\ 3 & 4 & 12 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 12 & 9 & 7 \\ 4 & \text{ل} & 5 \\ 3 & 10 & \text{هـ} \end{vmatrix}$$

4- إذا كان:
$$27 = \begin{vmatrix} \text{جـ} & 3\text{أ} \\ 3\text{د} & 2\text{ب} \end{vmatrix}$$
أثبت أن :
$$\begin{vmatrix} 1 & \text{جـ} + \text{د} & \text{أ} + \text{ب} \\ 1 & \text{جـ} - \text{د} & \text{أ} - \text{ب} \\ 1 & 2\text{جـ} & 2\text{أ} \end{vmatrix} = 54$$
بدون فك المحدد.

5 - باستخدام خواص المحددات أثبت:
$$\begin{vmatrix} \text{س} & \text{أ} + \text{ص} & \text{أ} - \text{ص} \\ \text{س} & \text{ب} + \text{ص} & \text{ب} - \text{ص} \\ \text{س} & \text{جـ} + \text{ص} & \text{جـ} - \text{ص} \end{vmatrix} = 0$$

6 - أوجد قيم س التي تجعل:

(i)
$$\begin{vmatrix} \text{س} & -1 & 0 \\ 3 & 4 & \text{س} \\ 2 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 10$$

(ii)
$$\begin{vmatrix} 5 & -1 & 2 \\ -1 & -3 & 1 \\ \text{س} & 4 & 3 \end{vmatrix} = 26$$

(iii)
$$\begin{vmatrix} 2 & 7 & 2 \\ 3\text{س}+1 & 5 & 4 \\ 6 & 3 & 6 \end{vmatrix} = 0$$

(iv)
$$\begin{vmatrix} \text{س}^2 & \text{س} & 1 \\ 9 & -3 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

5-1 : المصفوفات

مقدمة... المصفوفة هي أداة رياضية تُستخدم للتعبير عن البيانات بطريقة منسقة، وتعتبر المصفوفات من الدعامات الأساسية في دراسة البرامج الخطية.

مثال تمهيدي ... مصنع لإنتاج أجهزة الإذاعة المرئية الملونة به ثلاثة أقسام تنتج ثلاثة أجزاء رئيسية من الجهاز هي أ ، ب ، جـ ومتوسط الإنتاج اليومي للمصنع من هذه الأجزاء مبينة بالجدول التالي:

الأجزاء	أ	ب	جـ
القسم الأول	13	35	40
القسم الثاني	15	23	36
القسم الأول	10	30	45

فكل عدد في هذا الجدول له دلالة معينة فالعدد 13 مثلا يدل على متوسط الإنتاج اليومي من الجزء أ عن طريق القسم الأول، العدد 30 يدل على متوسط الإنتاج اليومي للمصنع من الجزء ب عن طريق القسم الثالث وهكذا... يمكن تقديم المعلومات السابقة بصورة مختصرة كالأتي:

يتم كتابة الأعداد المتضمنة في الجدول بنفس ترتيبها في الجدول مع وضعها داخل قوسين كبيرين من النوع [ ]

6-1 : الصورة العامة للمصفوفة:

يمكن كتابة المصفوفة التي تتكون من المحدد م من الصفوف، عدد من الأعمدة ن على النحو الأتي:

$$ف = \begin{bmatrix} أ_{11} & أ_{21} & أ_{31} & \cdots & أ_{ن1} \\ أ_{12} & أ_{22} & أ_{32} & \cdots & أ_{ن2} \\ أ_{13} & أ_{23} & أ_{33} & \cdots & أ_{ن3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ أ_{م1} & أ_{م2} & أ_{م3} & \cdots & أ_{من} \end{bmatrix} \quad \cdots\cdots (1)$$

ترميز موقع العنصر:

العنصر الذي يقع في الصف ر والعمود ى للمصفوفة ف من النوع م×ن يكتب $أ_{رى}$ وبذلك يكون من المناسب أن نأخذ المصفوفة ف هذه الصيغة المختصرة.

$$ف = \left[أ_{رى} \right]_{م\times ن} \quad \cdots\cdots (2)$$

حيث (ر = 1 ، 2 ، ... ، م ، ى =1، 2 ، ... ، ن)

7-1 : المفاهيم الأساسية:

1- المصفوفة الحقيقية (Real Matrix) : هي مصفوفة عناصرها أعداداً حقيقية.

2-إذا كان عدد الصفوف = عدد الأعمدة أي ($\text{م} = \text{ن}$) عندها تكون المصفوفة مربعة (Square Matrix)

ومن أمثلة المصفوفات المربعة:

(i) $\text{ف}_1 = [\,\text{أ}_{\text{ر ى}}\,]_{2\times2}$

(حيث: $\text{ر} = 1 ، 2$ ، $\text{ى} = 1 ، 2$)

وهي عبارة عن مصفوفة لها صفان وعمودان، وصورتها العامة تكون:

$$\text{ف}_1 = \begin{bmatrix} \text{أ}_{21} & \text{أ}_{11} \\ \text{أ}_{22} & \text{أ}_{12} \end{bmatrix}$$

كذلك (ii) $\text{ف}_2 = [\,\text{أ}_{\text{ر ى}}\,]_{3\times3}$

(حيث: $\text{ر} = 1 ، 2 ، 3$ $\text{ى} = 1 ، 2 ، 3$)

وهي عبارة عن مصفوفة لها ثلاثة صفوف وثلاثة أعمدة وصورتها العامة تكون:

$$\text{ف}_2 = \begin{bmatrix} \text{أ}_{31} & \text{أ}_{21} & \text{أ}_{11} \\ \text{أ}_{32} & \text{أ}_{22} & \text{أ}_{12} \\ \text{أ}_{33} & \text{أ}_{23} & \text{أ}_{13} \end{bmatrix}$$

مع ملاحظة أن المصفوفة المربعة يكون لها قطران أحدهما رئيسي والآخر غير رئيسي.

من (i) نجد أن القطر الرئيسي عناصره هي : أ_{11} ، أ_{22} ، و القطر غير الرئيسي عناصره هي: أ_{12} ، أ_{21} .

من (ii) نجد أن القطر الرئيسي عناصره هي : أ_{11} ، أ_{22} ، أ_{33} ، و القطر غير الرئيسي عناصره هي: أ_{13} ، أ_{22} ، أ_{31}

3-إذا كانت $\text{م} = 1$ سميت المصفوفة (مصفوفة الصف) وهي مصفوفة لها صف واحد فقط وعدد من الأعمدة

فمثلا: $\text{أ} = [5 \quad 4 \quad -2]$ لها صف واحد وثلاثة أعمدة فهي مصفوفة صف.

ومن أمثلة المصفوفات المربعة:

الصيغة العامة لها: $\text{ف}_1 = [\,\text{أ}_{\text{ر ى}}\,]$ (حيث: $\text{ر} = 1$ ، $\text{ى} = 1 ، 2 ، ... ، \text{ن}$)

4-إذا كانت $ن = 1$ سميت المصفوفة (مصفوفة عمود) وهي مصفوفة لها عمود واحد فقط وعدد من الصفوف

فمثلا: $أ = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix}_{3\times1}$

مصفوفة لها عمود واحد وثلاثة صفوف فهي مصفوفة عمود.

الصيغة العامة لها: ف = $[أ_{رى}]$ (حيث: ر = 1 ، 2، ... ، م ، ى = 1)

5- المصفوفة ليس لها قيمة عددية ولكنها مجرد طريقة لعرض البيانات.

6- المصفوفة الصفرية Null Matrix هي مصفوفة كل عناصرها أصفار ونرمز لها بالرمز $\underline{0}$.

الصيغة العامة لها: $\underline{0} = [أ_{رى}]$ حيث: $\underline{0} = \begin{cases} 0 & \text{عندما } ر = ى \\ 0 & \text{عندما } ر \neq ى \end{cases}$

فالصورة $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ عبارة عن مصفوفة صفرية من نوع 3×3

وكذلك $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ عبارة عن مصفوفة صفرية من نوع 2×3

7- المصفوفة القطرية Diagnoal Matrix هي مصفوفة مربعة جميع عناصرها أصفار باستثناء عناصر القطر الرئيسي أي ان:

ف = $[أ_{رى}]_{ن\times ن}$ تسمى مصفوفة قطرية إذا كان $أ_{رى} = 0$ لما $ر \neq ى$

وهذا يعطى معنى تسمية هذه المصفوفة بالمصفوفة القطرية وهي على سبيل المثال:

$\begin{bmatrix} س & 0 \\ 0 & ص \end{bmatrix}$ ، $\begin{bmatrix} س & 0 & 0 \\ 0 & ص & 0 \\ 0 & 0 & ع \end{bmatrix}$

8- مصفوفة الوحدة Unit Matrix هي مصفوفة قطرية عناصر القطر الرئيسي يكون الواحد الصحيح ويرمز لها بالرمز I أو هـ والصيغة العامة لها:

$$I = [\text{أ}_{\text{رو}}]_{\text{ن}\times\text{ن}}$$

$$I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

حيث: $I = \begin{cases} 1 & \text{عندما } \text{ر} = \text{و} \\ 0 & \text{عندما } \text{ر} \neq \text{و} \end{cases}$

9- تساوي مصفوفتين Equality of Matrices وتكون المصفوفتين ف_1 ، ف_2 متساويتان إذا وفقط إذا:

(i) كل عنصر في المصفوفة ف_1 له نظيره في المصفوفة ف_2 ويساويه.

(ii) لهما نفس النوع.

فإذا كانت: $\text{ف}_1 = [\text{أ}_{\text{رو}}]_{\text{م}\times\text{ن}}$ ، $\text{ف}_2 = [\text{ب}_{\text{رو}}]_{\text{م}\times\text{ن}}$

فإن: $\text{ف}_1 = \text{ف}_2 \Leftarrow \text{أ}_{\text{رو}} = \text{ب}_{\text{رو}}$

لكل ($\text{ر} = 1 ، 2 ، \dots ، \text{م}$ ، $\text{و} = 1 ، 2 ، \dots ، \text{ن}$)

فمثلا المصفوفتان:

$$\text{أ} = \begin{bmatrix} 6 & \text{س} & 2 \\ -5 & 3 & \text{ص} \end{bmatrix} \qquad \text{ب} = \begin{bmatrix} 6 & -1 & 2 \\ \text{ع} & 3 & 4 \end{bmatrix}$$

متساويتان إذا كانت س = -1 ، ع = -5 ، ص = 4

ويقال للمصفوفتين $\text{أ} = \begin{bmatrix} \text{س} + 2\text{ص} \\ 3\text{س} - 2\text{ص} \end{bmatrix}$ ، $\text{ب} = \begin{bmatrix} 8 \\ 3 \end{bmatrix}$

أنهما متساويتان إذا كانت 3س-ص = 3 ، س + 2ص = 8،

بحل المعادلتين نجد أن : س = 2 ، ص = 3

10- عملية ضرب المصفوفات:

ضرب مصفوفة في عدد حقيقي عند ضرب أي مصفوفة في عدد حقيقي نضرب جميع عناصر المصفوفة في ذلك العدد.

مثال 10 : إذا كانت $\text{أ} = \begin{bmatrix} 4 & 5 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}$ أوجد: 3أ ، -5أ ، $\frac{1}{2}$أ

الحل :

$$3\text{أ} = 3 \begin{bmatrix} 4 & 5 \\ 3 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 & 15 \\ 9 & -6 \end{bmatrix}$$

$$-5\text{أ} = -5 \begin{bmatrix} 4 & 5 \\ 3 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -20 & -25 \\ -15 & 10 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} \frac{4}{2} & \frac{5}{2} \\ \frac{3}{2} & \frac{-2}{2} \end{bmatrix}$$

$$\frac{1}{2}\text{أ} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 4 & 5 \\ 3 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{4}{2} & \frac{5}{2} \\ \frac{3}{2} & \frac{-2}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & \frac{5}{2} \\ \frac{3}{2} & -1 \end{bmatrix}$$

8-1 : العمليات على المصفوفات:

- عمليتي الجمع والطرح:

يشترط لجمع أو طرح أي مصفوفتين أن تكونا من نفس النوع حيث بجمع أو بطرح كل عنصر مع نظيره في المصفوفة الأخرى.

> لاحظ أن:
> 1-جمع المصفوفات عملية إبدالية.
> 2-طرح المصفوفات ليست عملية إبدالية.

مثال11: إذا كانت $\text{أ} = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 4 & -5 \end{bmatrix}$ ، $\text{ب} = \begin{bmatrix} 9 & 8 \\ 7 & 8 \end{bmatrix}$

أوجد أ + ب ، ب+أ ، أ - ب ، ب - أ

الحل:

$$\text{أ} + \text{ب} = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 4 & -5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 9 & 8 \\ 7 & 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11 & 13 \\ 11 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\text{ب} + \text{أ} = \begin{bmatrix} 9 & 8 \\ 7 & 8 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 4 & -5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11 & 13 \\ 11 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\text{أ} - \text{ب} = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 4 & -5 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 9 & 8 \\ 7 & 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -7 & -3 \\ -3 & -13 \end{bmatrix}$$

$$\text{ب} - \text{أ} = \begin{bmatrix} 9 & 8 \\ 7 & 8 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 4 & -5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 3 \\ 3 & 13 \end{bmatrix}$$

مثال12: إذا كانت: $\text{س} + \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ -2 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$

أوجد المصفوفة س

الحل:

$$\text{س} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ -2 & 5 \end{bmatrix}$$

$$\text{س} = \begin{bmatrix} -2 & 2 \\ 3 & -6 \end{bmatrix}$$

المعكوس الجمعي للمصفوفات:

إذا كان أ ، ب مصفوفتان معرفة عليهما عملية الجمع وكان أ + ب = صفر فإن ب تسمى المعكوس الجمعي للمصفوفة أ حيث ب = −أ مثال ذلك:

$$\text{أ} = \begin{bmatrix} 3- & 4 & 2 \\ 4 & 2- & 5 \end{bmatrix} \Leftarrow -\text{أ} = \begin{bmatrix} 3 & 4- & 2- \\ 4- & 2 & 5- \end{bmatrix}$$

حيث أ + (−أ) = $\underline{0}$

ملحوظة

لكل مصفوفة معكوس جمعي وينتج بعكس إشارة المصفوفة الأصلية فمثلا:

$$\text{أ} = \begin{bmatrix} 5- & 2 \\ 3- & 4 \end{bmatrix}$$

$$-\text{أ} = \begin{bmatrix} 5 & 2- \\ 3 & 4- \end{bmatrix}$$

9-1 : قابلية الضرب لمصفوفتين:

لتكن أ مصفوفة من نوع م×ن ، ب مصفوفة من نوع ك×ل فنقول أن المصفوفتين أ ، ب قابلتين للضرب على الصورة أ ب ، إذا كان ن = ك.

$$\boxed{\text{عدد أعمدة أ = عدد صفوف ب}}$$

ويكون حاصل ضرب المصفوفة أ في المصفوفة ب من نوع م × ل وذلك بإهمال العدد المشترك الذي يدل على عدد أعمدة أ وعدد صفوف ب.

لاحظ أن ... أ ، ب يكون غير معرف لما ن ≠ ك.

أمثلة توضيحية:

(i) إذا كانت أ مصفوفة من نوع 1×3 ، ب مصفوفة من نوع 3×1.

فإن أ ب = جـ، حيث جـ مصفوفة من نوع 3×3

(ii) إذا كانت أ مصفوفة من نوع 4×2 ، ب مصفوفة من نوع 3×4.

فإن أ ب = جـ، حيث جـ مصفوفة من نوع 3×2

(iii) إذا كانت أ مصفوفة من نوع 3×2 ، ب مصفوفة من نوع 2×1.

فإن أ ب غير معرفة لأن عدد أعمدة أ ≠ عدد صفوف ب ، ويمكن تمثيل عملية ضرب المصفوفتين ف$_1$ ، ف$_2$ على النحو التالي: حيث:

$$\text{ف}_1\text{ف}_2 = \begin{bmatrix} \text{جـ}_{1ن} & \cdots & \text{جـ}_{21} & \text{جـ}_{11} \\ \text{جـ}_{2ن} & \cdots & \text{جـ}_{22} & \text{جـ}_{12} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \text{جـ}_{من} & \cdots & \text{جـ}_{م2} & \text{جـ}_{م1} \end{bmatrix} \quad \text{ف}_2 = \begin{bmatrix} \text{ب}_{1ن} & \cdots & \text{ب}_{21} & \text{ب}_{11} \\ \text{ب}_{2ن} & \cdots & \text{ب}_{22} & \text{ب}_{12} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \text{ب}_{من} & \cdots & \text{ب}_{م2} & \text{ب}_{م1} \end{bmatrix} \quad \text{ف}_1 = \begin{bmatrix} \text{أ}_{1ن} & \cdots & \text{أ}_{21} & \text{أ}_{11} \\ \text{أ}_{2ن} & \cdots & \text{أ}_{22} & \text{أ}_{12} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \text{أ}_{من} & \cdots & \text{أ}_{م2} & \text{أ}_{م1} \end{bmatrix}$$

فالعنصر $ج_{11}$ يكون مجموع حواصل ضرب (عناصر الصف الأول من المصفوفة $ف_1$ في عناصر العمود الأول من المصفوفة $ف_2$)

أي أن العنصر $ج_{11} = أ_{11} ب_{11} + أ_{21} ب_{12} + ... + أ_{ن1} ب_{1م}$

فالعنصر $ج_{21}$ يحصل عليه مجموع حواصل ضرب (عناصر الصف الأول من المصفوفة $ف_1$ في عناصر العمود الثاني من المصفوفة $ف_2$)

أي أن العنصر $ج_{21} = أ_{12} ب_{11} + أ_{22} ب_{12} + ... + أ_{ن2} ب_{1م}$

فالعنصر $ج_{22}$ يتكون من مجموع حواصل ضرب (عناصر الصف الثاني من المصفوفة $ف_2$ في عناصر العمود الثاني من المصفوفة $ف_2$)

أي أن العنصر $ج_{22} = أ_{12} ب_{21} + أ_{22} ب_{22} + ... + أ_{ن2} ب_{2م}$

وهكذا نحصل على المصفوفة $ف_3 = ف_2 ف_1$ حيث:

$$ف_3 = \begin{bmatrix} ج_{11} & ج_{21} & \cdots ج_{ن1} \\ ج_{12} & ج_{22} & \cdots ج_{ن2} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots \end{bmatrix}$$

مثال 13 :

إذا كان $\begin{bmatrix} أ \\ ب \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 & -3 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$ أوجد قيمتى أ ، ب

الحل:

$$\begin{bmatrix} أ \\ ب \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 & -3 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 4أ & 3أ \\ 3ب & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 & -3 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$$

$\therefore 4أ = -4 \qquad أ = -1$

$\therefore 4ب = 4 \qquad أ = 1$

مثال 14 :

إذا كان س $\begin{bmatrix} 3 \\ 0 \end{bmatrix}$ + ص $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ أوجد س ، ص

الحل:

$$\begin{bmatrix} 3س \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} ص \\ ص \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 3س + ص \\ ص \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

من تساوي المصفوفتين نجد أن: ص = 0 $\therefore$ 3 س + ص = 1

3 س + 0 = 1 $\Leftarrow$ س $= \frac{1}{3}$

مثال 15 :

إذا كانت : أ = $\begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$ ، ب = $\begin{bmatrix} 5 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix}$

أوجد أ ب ، ب أ إن أمكن ذلك.

الحل:

أ ب

$3 \times 2 = 2 \times 2$

الناتج 2×3

$$\begin{bmatrix} \text{أ}_{31} & \text{أ}_{21} & \text{أ}_{11} \\ \text{أ}_{32} & \text{أ}_{22} & \text{أ}_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} = \text{أ ب}$$

حيث :

$$14 = 10 + 4 = 2 \times 5 + 2 \times 2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & 2 \end{bmatrix} = \text{أ}_{11}$$

$$5 = 5 + 0 = 1 \times 5 + 0 \times 2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & 2 \end{bmatrix} = \text{أ}_{21}$$

وهكذا ...

مما سبق ينتج أن:

$$\begin{bmatrix} 25 & 5 & 14 \\ 23 & 1 & 10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} = \text{أ ب}$$

ب أ نجد أن عدد الأعمدة لا تسوي عدد الصفوف

$3 \times 2 \neq 3 \times 2$

∴ لا يمكن الضرب لعدم تحقق الشرط.

مسألة (1) :

إذا كانت أ ، ب مصفوفتين مربعتين على نفس النوع ... فأشرح لماذا ؟

$(أ + ب)^2 \neq أ^2 + 2 أ ب + ب^2$ .... (i)

$(أ + ب)(أ - ب) \neq أ^2 - ب^2$ .... (ii)

$(أ ب)^2 = أ^2 ب^2 \Leftrightarrow أ ب = ب أ$ .... (iii)

بينما $(أ ب)^2 = أ^2 - ب^2$ **دائما .**

الحل:

$(أ + ب)^2 = (أ + ب)(أ + ب)$ .... (i)

$= أ^2 + أ ب + ب أ + ب^2$

$\neq أ^2 + 2 أ ب + ب^2$ **لأن** $أ ب \neq ب أ$

♦ حل آخر:

$(أ + ب)^2 = (أ + ب)(أ + ب)$

$= أ (أ + ب) + ب (أ + ب)$ .... **(التوزيع)**

$= أ^2 + أ ب + ب أ + ب^2$

$= أ^2 + 2 أ ب + ب^2$ .... **(الضرب ليس تبادليا)**

$(أ + ب)(أ - ب) = أ^2 - أ ب + ب أ - ب^2$ .... (ii)

$\neq أ^2 - ب^2$ **لأن** $أ ب \neq ب أ$

أو : $(أ + ب)(أ - ب) = أ (أ - ب) + ب (أ - ب)$

$= أ^2 - أ ب + ب أ - ب^2$

$\neq أ^2 - ب^2$ **لنفس الشرط**

$(أ ب)^2 = (أ ب)(أ ب) = أ (ب أ) ب$ .... (iii)

$(أ ب)^2 = أ (ب أ) ب$ (*)

$أ^2 ب^2 = أ أ ب ب = أ (أ ب) ب$ (**)

وبمقارنة العلاقتين (*) (**) نجد أن:

$(أ ب)^2 = أ^2 ب^2$ **إذا وفقط إذا كان نجد :** $أ ب = ب أ$

مسألة (2) :

هل التقرير الآتي صحيح (مدعما إجابتك بمثال) .

أ ب = $\underline{0}$ ، ب $\neq \underline{0}$، ب $\neq \underline{0}$

حيث أ ، ب مصفوفتين مربعتين.

الحل:

التقرير غير صحيح، هناك حالات تكون فيها المصفوفة أ $\neq \underline{0}$ ،

وكذلك ب $\neq \underline{0}$ بينما أ ب = $\underline{0}$ ومثال ذلك.

$$أ = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} ، ب = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}$$

$$أ ب = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ -2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$\therefore$ أ ب = $\underline{0}$ ، حيث أ $\neq \underline{0}$ ، ب $\neq \underline{0}$

مسألة (3) :

إذا كانت أ = $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ أثبت أن $أ^{ن} = 2^{ن-1}$ أ حيث عدد ن صحيح موجب

$$أ^2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = 2 أ$$

$$أ^3 = 2 \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = 4 أ = 2^2 أ$$

$$أ^4 = 4 \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = 8 أ = 2^3 أ$$

وهكذا ...

$$أ^{ن} = 2^{ن-1} أ$$

تمرين 1-ب

(1) إذا كانت أ = $\begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$

فأوجد المصفوفة في صورتها العامة بحيث أن: $\underset{\sim}{\text{س}}$ أ = أ $\underset{\sim}{\text{س}}$ ثم أذكر بعض المصفوفات التي تحقق هذه المعادلة.

(2) حل المعادلة $3\left(\text{س} - \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 5 & 0 \end{bmatrix}\right) = 2\,\text{س} + \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 2 & 1- \end{bmatrix}$

3- أوجد حاصل ضرب المصفوفات الآتية:

(أ)- $\begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$

(ب)- $\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2- & 1 \\ 6 & 3- \end{bmatrix}$

(جـ)- $\begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1- & 2- & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$

(د)- $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$

(هـ)- $\begin{bmatrix} 3- & 2 \\ 1 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 5- & 6 & 2 \end{bmatrix}$

4- إذا كانت أ = $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$ ب = $\begin{bmatrix} 5 & 2- \\ 8- & 7 \end{bmatrix}$

أوجد أ + ب ، أ − ب ثم أثبت أن (مع ذكر السبب.):

(i). (أ + ب) (أ − ب) ≠ أ^2 − ب^2 (ii). (أ + ب)^2 ≠ أ^2 + 2 أب + ب^2

(iii). (أب − ب أ)^2 مصفوفة قطرية ثم أوجد قيمة | (أب − ب أ)^2 |

5- إذا كانت أ = $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ ب = $\begin{bmatrix} \text{ص} & \text{س} \\ \text{ع} & 0 \end{bmatrix}$ و كانت ب^2 = أ فعين قيم ، س، ص، ع .

أوجد: 3أ − 2 ب.

6- إذا كانت $\begin{bmatrix} \text{ب}- & \text{أ} \\ \text{أ} & \text{ب} \end{bmatrix}$ = أ $\underset{\sim}{\text{س}}$ + ب $\underset{\sim}{\text{ص}}$ حيث أ، ب $\in$ ح فأوجد المصفوفتين $\underset{\sim}{\text{س}}$ ، $\underset{\sim}{\text{ص}}$.

7- أوجد ما تساويه كل المصفوفات الآتية $\begin{bmatrix} \text{ب} & \text{أ} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}^{\text{ن}}$ ، $\begin{bmatrix} 0 & \text{أ} \\ \text{ب} & 0 \end{bmatrix}^{\text{ن}}$ ، $\begin{bmatrix} 0 & \text{أ} \\ 0 & \text{ب} \end{bmatrix}^{\text{ن}}$

8- إذا كان: $\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 2- & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \text{ص} & \text{س} \\ \text{ل} & \text{ع} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ أوجد المصفوفة $\begin{bmatrix} \text{ص} & \text{س} \\ \text{ل} & \text{ع} \end{bmatrix}$

10-1: محورة المصفوفة Matrix of Determinant

إذا كانت ف مصفوفة من النوع م × ن وقمنا بتحوير على المصفوفة ، أي وضعنا الصفوف أعمدة والعكس، فإننا نحصل على مصفوفة من النوع ن × م تسمى محورة المصفوفة ف ويرمز لها بالرمز ف/.

أي أنه

إذا كانت: ف = $[\,أ_{رى}\,]_{م\times ن}$ (حيث: ر = 1، 2، ...، م ، ى = 1، 2، ...، ن)

فإن: ف/ = $[\,أ_{ىر}\,]_{ن\times م}$ (حيث: ى = 1، 2، ...، ن ، ر = 1، 2، ...، م)

تذكر

محورة (محورة) أ = أ ⇦ (أ/)/ = أ

محورة (أ+ب) = محورة أ + محورة ب

⇦ (أ+ب)/ = أ/ + ب/

محورة (أ ب) = محورة ب + محورة أ

⇦ (أ ب)/ = ب/ أ/

مثال 16 : إذا كان: ل = $\begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 3 & 4 & 2 \end{bmatrix}$ ، م = $\begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 1 & 0 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$ حل المعادلة: س/ + 2ل/ = م

حيث س/ محورة المصفوفة س ، ل/ محورة المصفوفة ل .

الحل :

$$س^{/} + 2\begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 3 & 4 & 2 \end{bmatrix}^{/} = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 1 & 0 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$$

$$\Leftarrow \quad س^{/} + \begin{bmatrix} 2 & 6 \\ 6 & 8 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 1 & 0 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$$

بإضافة المعكوس الجمعي للمصفوفة لطرفي المعادلة $\begin{bmatrix} 2 & 6 \\ 6 & 8 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$

$$\therefore \quad س^{/} + \underline{0} = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 1 & 0 \\ 3 & 5 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 & 6 \\ 6 & 8 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$$

$$\therefore \quad س^{/} = \begin{bmatrix} -3 & -3 \\ -5 & -8 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$$ حيث $\underline{0}$ هي المصفوفة الصفرية

$$\therefore \quad س = (س^{/})^{/} = \begin{bmatrix} -3 & -5 & 3 \\ -3 & -8 & 1 \end{bmatrix}$$

11- المصفوفة المثلثية العلوية Upper Triangular Matrix

هي مصفوفة مربعة بها مثلث صفري أسفل القطر الرئيسي مثل:

$$\begin{bmatrix} 5 & 3 & 2 \\ 9 & 4 & 0 \\ 6 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

القطر الرئيسي

ملحوظة:
شرط المثلثية العلوية :
$أ_{ر ى} = 0$ عندما $ر > ى$

12- المصفوفة المثلثية السفلية Lower Triangular Matrix

هي مصفوفة مربعة بها مثلث صفري أعلى القطر الرئيسي مثل:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 5 \\ 0 & -2 & 8 \\ 1 & 3 & 9 \end{bmatrix}$$

القطر الرئيسي

ملحوظة:
شرط المثلثية السفلية :
$أ_{ر ى} = 0$ عندما $ر < ى$

13- المصفوفة المتماثلة Symmetrical Matrix

هي مصفوفة مربعة عناصرها متماثلة حول القطر الرئيسي بنفس الإشارة أي أن المصفوفة تساوي محورتها مثل:

$$\begin{bmatrix} \boxed{-9} & 4 & 3 \\ 8 & 2 & 4 \\ 5 & 8 & \boxed{-9} \end{bmatrix}$$

القطر الرئيسي

ملحوظة:
في المصفوفة المتماثلة
$أ = أ^{/}$ أو $أ_{ر ى} = أ_{ى ر}$

مثال 17 : إذا كانت: $أ = \begin{bmatrix} ص & 2س & 5 \\ 16 & 9 & 8 \\ 3 & 4ع & 2ع + 1 \end{bmatrix}$

أوجد قيم س ، ص ، ع التي تجعل المصفوفة أ متماثلة.

الحل :

$2س = 8 \longrightarrow س = 4$

$4ع = 16 \longrightarrow ع = 4$

$2ع + 1 = ص \xrightarrow{ع = 4} 2 \times 4 + 1 = ص$

$\therefore ص = 9$

مثال 18 :

إذا كانت المصفوفة ب = $\begin{bmatrix} س^2 - 1 & 4 \\ 8 & 3 \end{bmatrix}$ متماثلة أوجد قيمة س .

الحل :

$س^2 - 1 = 3$

$س^2 = 4$

$س = \pm 2$ $س = |2|$

14. المصفوفة ملتوية التماثل «عكسية التماثل»

Skew Symmetric Matrix

هي مصفوفة مربع قطرها الرئيسي أصفار وباقي عناصرها متماثلة حول القطر الرئيسي بعكس الإشارة أي أن المصفوفة= - محورتها مثل:

$$أ = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 0 \\ \boxed{-4} & 0 & -3 \\ 0 & \boxed{4} & -2 \end{bmatrix}$$

ملحوظة:

في المصفوفة ملتوية التماثل يكون:

$أ = - أ'$

أو $أ + أ' = 0$

$أ_{ر ى} = أ_{ى ر}$

مثال 19 :

أوجد قيم أ ، ب ، جـ ، ى التي تجعل المصفوفة التالية ملتوية التماثل.

$$\begin{bmatrix} جـ + ى & 3 & أ - ب \\ ب - ى & 0 & أ \\ 3ب + جـ & -6 & 8 \end{bmatrix} \longleftarrow$$

تذكر أن...

$أ - ب = 0$

أو $3ب + جـ = 0$

لأنها من عناصر القطر الرئيسي

الحل :

$أ = -3$ ، $أ = ب$ ، $ب = -3 جـ$

$\therefore ب = -3$ ، $جـ = 1$

$ب - ى = +6$

$ى = ب - 6$

$ى = -9$

تذكر

في المصفوفة ملتوية التماثل تكون العناصر متماثلة حول القطر الرئيسي الذي يتكون من أصفار ولكن بتغير إشارات العناصر... أثبت ذلك.

ضع في ذاكرتك دائما

إذا كانت أ أية مصفوفة مربعة فإن:

1- (أ + أ/) مصفوفة متماثلة

مصفوفة + محورتها = مصفوفة متماثلة

2- (أ × أ/) مصفوفة متماثلة

مصفوفة × محورتها = مصفوفة متماثلة

3- (أ − أ/) مصفوفة ملتوية التماثل

مصفوفة − محورتها = مصفوفة ملتوية متماثلة

4- يمكن كتابة المصفوفة أ كمجموع مصفوفتين إحداهما متماثلة والأخرى ملتوية التماثل.

⇐ أ = س + ص

حيث : س = $\frac{1}{2}$ (أ + أ/)، ص = $\frac{1}{2}$ (أ − أ/) ، حيث أ/ مكملة المصفوفة أ

مثال 20 :

(i). أوجد المصفوفة ب بحيث: ب ر و = أ و ر لكل قيم ر ، و .

(ii). أوجد المصفوفة جـ بحيث: جـ = $\frac{1}{2}$ (أ + ب) .

(iii). أوجد المصفوفة و بحيث: و = $\frac{1}{2}$ (أ − ب) .

(iv). تحقق من أن: أ = جـ + و . وماذا تلاحظ ؟

حيث: ب = $\begin{bmatrix} 10 & 5 & -2 \\ -3 & 4 & 3 \\ 2 & -1 & -1 \end{bmatrix}$

الحل :

(i) ب ر و = أ و ر ⟵ ب = أ/ .

أي أن المصفوفة ب = محورة المصفوفة أ .

$$ب = \begin{bmatrix} 10 & 3 & -2 \\ -3 & 4 & 3 \\ 2 & -3 & -1 \end{bmatrix}$$

(i). $جـ = \frac{1}{2} \left(\begin{bmatrix} 10 & 5 & -2 \\ -3 & 4 & 3 \\ 2 & -1 & -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 & 3 & -2 \\ -1 & 4 & 5 \\ 2 & -3 & 10 \end{bmatrix} \right)$

$جـ = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 9 & 8 & -4 \\ -4 & 8 & 8 \\ 2 & -4 & 9 \end{bmatrix}$ ∴ فهي مصفوفة متماثلة.

(ii). $د = \frac{1}{2}\left(\begin{bmatrix} 10 & 5 & 2- \\ 3- & 4 & 3 \\ 2 & 1- & 1- \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1- & 3 & 2- \\ 1- & 4 & 5 \\ 2 & 3- & 10 \end{bmatrix}\right)$

$د = \begin{bmatrix} 11- & 2- & 0 \\ 2 & 0 & 2 \\ 0 & 2- & 11 \end{bmatrix}$ ∴ فهي مصفوفة ملتوية التماثل.

(iii). $ج + د = \frac{1}{2}\left(\begin{bmatrix} 11- & 2- & 0 \\ 2 & 0 & 2 \\ 0 & 2- & 11 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 9 & 8 & 4- \\ 4- & 8 & 8 \\ 2 & 4- & 9 \end{bmatrix}\right)$

$$ج + د = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 2- & 6 & 4- \\ 2- & 8 & 10 \\ 2 & 6- & 20 \end{bmatrix}$$

$$ج + د = \begin{bmatrix} 1- & 3 & 2- \\ 1- & 4 & 5 \\ 2 & 3- & 10 \end{bmatrix} = أ$$

$ج = \frac{1}{2}(أ + أ')$ ∴ وهي متماثلة.

$د = \frac{1}{2}(أ - أ')$ ∴ وهي ملتوية متماثلة.

$ج + د = \frac{1}{2}(أ + أ') + \frac{1}{2}(أ - أ')$ ∴ $ج + د = أ$.

تمرين 1 -ج:

1- أوجد قيم أ ، ب ، ج التي تجعل المصفوفة ف متماثلة.

حيث: $ف = \begin{bmatrix} 2ج & 8 & 8 \\ ب - 3 & 4 & أ \\ 2 & 2- & ج + 1 \end{bmatrix}$

إذا كانت $ف = \begin{bmatrix} 3 & -ب^2 & 0 \\ -1 & 0 & ب + 2 \\ 0 & 1 & -3 \end{bmatrix}$ ملتوية التماثل فإن ب = ... ، ....

2- إذا كانت محورة المصفوفة $\begin{bmatrix} 4م - 1 & ل + 3 \\ 6هـ & 2 - ن \end{bmatrix}$

تساوي المعكوس الجمعي للمصفوفة $\begin{bmatrix} 4م & 2 \\ 3ن & ل + 2 \end{bmatrix}$

أوجد قيمة كل من: ل ، م ، هـ ، ن

3- إذا كان حاصل ضرب المصفوفتين متماثلة، فما قيمة جـ ؟

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & \text{جـ} & 4 \\ -2 & -4 & 2\text{جـ} \end{bmatrix} \quad ، \quad \begin{bmatrix} 6 & \text{جـ}+1 & 1 \\ -4 & \text{جـ} & 2 \\ -2 & 1 & \text{جـ} \end{bmatrix}$$

4- إذا كانت

$$\text{أ} = \begin{bmatrix} -1 & 3 & 2 \\ 5 & 7 & 4 \\ 8 & -6 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{ب} = \begin{bmatrix} -3 & 2 & 1 \\ -7 & -6 & 4 \\ 5 & 3 & -1 \end{bmatrix} \quad \text{جـ} = \begin{bmatrix} -4 & 5 & \text{س} \\ -2 & \text{ص} & 8 \\ \text{ع} & -3 & -1 \end{bmatrix}$$

وكان فأوجد أ + ب = جـ قيم س، ص، ع . ثم اكتب المصفوفة جـ على صورة مجموع مصفوفتين إحداهما متماثلة والأخرى ملتوية التماثل.

5- إذا كانت

$$\text{ل} = \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \quad ، \quad \text{م} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

فأوجد المصفوفة س التي تحقق المعادلة: $12\,(\text{م ل})^{/} = |\text{م ل}|\,\text{س}^{/}$ ، حيث $\text{س}^{/}$ محورة المصفوفة س .

6- إذا كانت أ ، ب مصفوفتين مربعتين على نفس النوع وكانت أ مصفوفة متماثلة ، وب مصفوفة ملتوية التماثل، فأثبت أن المصفوفة $(\text{أب} + \text{ب أ})^2$ ملتوية التماثل وأن المصفوفة أ^2 متماثلة.

2

المتطابقات المثلثية

المتطابقات المثلثية
Trigonometric Identities

2-1 تعريف الزوايا المركبة:

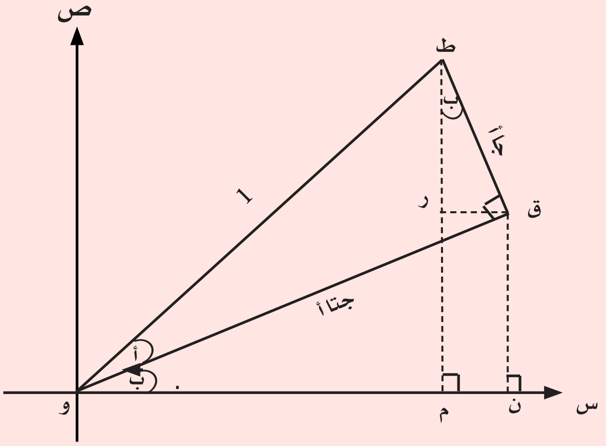
نعلم أن جا $30^\circ = \frac{1}{2}$ ، إذن، ما قيمة جا $(30^\circ+30^\circ)$؟ هل هي ضعف جا 30°، أي أن القيمة تساوي 1 ؟ علي كلٍّ ليست هذه هي المشكلة. أصغر زاوية موجبة θ جيبها يساوي 1 قياسها 90° إذن جا 60° ليست ضعف جا 30°، هذا واضح إذا راجعنا من العمل السابق أن ص = جا θ ليس خطًّا مستقيما. هذا يعني أن قيم جا θ لا تزيد خطيًّا كلما تزيد θ. بالمثل، ص = ظا θ ، ص = جتا θ ليستا دالتين خطيتين أيضا .

مما سبق، من المفيد أن تعرف العلاقة بين جا 30°، جا $(30^\circ+30^\circ)$ أي جا 60° لمزيد من التعميم سوف ندرس العلاقة بين النسب المثلثية لأي زاويتين أ ، ب والنسب المثلثية للزاوية المركبة (أ + ب)

سوف ندرس ست نتائج في هذا الموضوع، تسمى،

جا (أ + ب) ، جا (أ − ب)، جتا (أ + ب)، جتا (أ - ب)، ظا (أ+ ب)، ظا (أ − ب)

2-1-1 جا (أ + ب)



الشكل 2-1

و ق ط مثلث قائم الزاوية حيث ق (∠ و ق ط) = 90°

طول و ط = 1 وحدة طولية، ق (∠ ق و ط) = أ انظر شكل (2-1)

المثلث و ق ط دار عكس حركة عقارب الساعة، حول و بزاوية ب، كما هو موضح.

ط م، ق ن عمودان علي محور س، ق ر عمودي علي ط م

بالدوران، ∠ ق ط ر = ∠ ب

في Δ و ق ط، ق ط = جا أ، و ق = جتا أ لأن و ط = 1

في Δ و ق ن، ق ن = و ق جا ب = جتا أ جا ب

إذن في Δ و ط م، جا (أ + ب) = $\frac{\text{ط م}}{1}$ ،

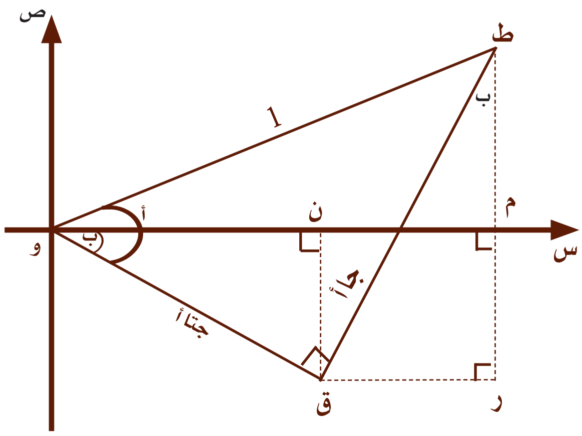
= ط ر + ر م

= ط ر + ق ن

= جا أ جتا ب + جتا أ جا ب

∴ جا (أ + ب) = جا أ جتا ب + جتا أ جا ب

2-1-2 جا (أ – ب)



الشكل 2 - 2

و ق ط مثلث قائم الزاوية حيث إن $\measuredangle$ و ق ط = 90^{o}، طول و ط يساوي 1 وحدة طولية،
($\measuredangle$ ق و ط) = أ انظر شكل (2-2)
المثلث و ق ط دار في اتجاه حركة عقارب الساعة حول و بزاوية ب إلى وضعها الحالي
كما هو موضح. ط م، ق ن عمودان على محور س.
ط م مد إلى ر بحيث يكون عموديا على ق ر
في Δ و ق ط، ق ط = جا أ،
و ق = جتا أ لأن و ط = 1
في Δ ق ط ر، ط ر = ق ط جتا ب = جا أ جتا ب
في Δ و ق ن، ق ن = و ق جا ب = جتا أ جا ب
$\therefore$ في Δ و ط م، ($\measuredangle$ ط و م) = (أ - ب)
جا (أ - ب) = $\frac{\text{ط م}}{1}$ ،
= ط ر – ر م
= ط ر – ق ن
= جا أ جتا ب – جتا أ جا ب
$\therefore$ جا (أ – ب) = جا أ جتا ب – جتا أ جا ب

3-1-2 جتا (أ + ب)

راجع شكل (1 - 2)
في Δ و ق ن، و ن = و ق جتا ب = جتا أ جتا ب،
في Δ ق ط ر، ق ر = ق ط جا ب = جا أ جا ب،
في Δ و ط م، جتا (أ + ب) = $\frac{\text{و م}}{1}$ ،
= و ن - ن م
= و ن - ق ر
= جتا أ جتا ب - جا أ جا ب
$\therefore$ جتا (أ + ب) = جتا أ جتا ب – جا أ جا ب

2-1-4 جتا (أ – ب)

راجع شكل (2-2)

في Δ و ق ن...... و ن = و ق جتا ب = جتا أ جتا ب

في Δ ق ط ر...... ق ر = ق ط جا ب = جا أ جا ب

في Δ و ط م...... جتا (أ – ب) = $\frac{\text{و م}}{1}$ ،

= و ن + ن م

= و ن + ق ر

= جتا أ جتا ب + جا أ جا ب

∴ جتا (أ – ب) = جتا أ جتا ب + جا أ جا ب

2-1-5 ظا (أ + ب)

∵ جا (أ + ب) = جا أ جتا ب + جتا أ جا ب .... (1)

∵ جتا (أ + ب) = جتا أ جتا ب - جا أ جا ب .... (2)

بقسمة (1) على (2)

$$\frac{\text{جا (أ + ب)}}{\text{جتا (أ + ب)}} = \frac{\text{جا أ جتا ب + جتا أ جا ب}}{\text{جتا أ جتا ب - جا أ جا ب}}$$

⇐ $$\text{ظا (أ + ب)} = \frac{\text{ظا أ + ظا ب}}{\text{1 - ظا أ ظا ب}}$$

بقسمة كل من البسط و المقام على (جتا أ جتا ب)

$$\text{ظا (أ + ب)} = \frac{\text{ظا أ + ظا ب}}{\text{1 – ظا أ ظا ب}}$$

2-1-6 ظا (أ – ب)

بالمثل:

$$\text{ظا (أ – ب)} = \frac{\text{جا أ جتا ب - جتا أ جا ب}}{\text{جتا أ جتا ب + جا أ جا ب}}$$

$$= \frac{\text{ظا أ - ظا ب}}{\text{1 + ظا أ ظا ب}}$$

$$\text{ظا (أ – ب)} = \frac{\text{ظا أ – ظا ب}}{\text{1 + ظا أ ظا ب}}$$

بتجميع النتائج الستة، نحصل على الزاوية المركبة أو صيغة الجمع.

جا (أ ± ب) = جا أ جتا ب ± جتا أ جا ب

جتا (أ ± ب) = جتا أ جتا ب ∓ جا أ جا ب

$$\text{ظا (أ ± ب)} = \frac{\text{ظا أ ± ظا ب}}{\text{1 ∓ ظا أ ظا ب}}$$

تسمى هذه الصيغ متطابقات مثلثية. وهي صحيحة لجميع قياسات الزوايا الحادة.
وهي أيضا صحيحة لقياسات جميع الزوايا.

مثال 1:

استخدم صيغة الزاوية المركبة لإيجاد الآتي بدلالة قياسات زوايا حادة :

(أ) جا 210°

(ب) جتا 420°

(جـ) ظا (180 + أ)° ، بفرض أن 0 < أ < 90°

(د) جتا (– س)° بفرض أن 0 < س < 90

الحل:

(أ) جا 210° = جا (180° + 30°)

= جا 180° جتا 30° + جتا 180° جا 30°

= - جا 30°

(ب) جتا 420° = جتا (360 + 60)°

= جتا 360° جتا60° – جا 360° جا 60°

= جتا 60°

(جـ) ظا (180 + أ)° = $\frac{\text{ظا }180° + \text{ظا أ}°}{1 - \text{ظا }180° \text{ ظا أ}}$

= $\frac{\text{ظا أ}°}{1 - 0}$

= ظا أ°

(د) جتا (– س)° = جتا (0 – س)°

= جتا 0° جتا س° + جا 0° جا س°

= جتا س°

مثال2:

إذا كان جا أ = $\frac{5}{13}$ ، جا ب = $\frac{4}{5}$ ، فأوجد قيمة كل من:

جا (أ + ب)، جتا (أ – ب)، ظا (أ + ب)،

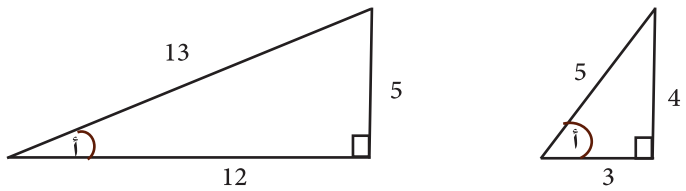
عندما تكون:

(i) أ ، ب زاويتان حادتان .

(ii) أ زاوية حادة، ب زاوية منفرجة .

ارسم مثلثات قائمة لإيجاد القيم للنسب المثلثية لكل من أ ، ب .

حدد الإشارات الموجبة أو السالبة لهذه النسب حسب الأرباع التي تقع فيها هذه الزوايا .



الشكل 2-3

الحل:

(i) جا (أ + ب) = جا أ جتا ب + جتا أ جا ب

$$= \frac{4}{5}\times\frac{12}{13}+\frac{3}{5}\times\frac{5}{13}$$

$$= \frac{48+15}{65}$$

$$= \frac{63}{65}$$

جتا (أ – ب) = جتا أ جتا ب + جا أ جا ب

$$= \frac{4}{5}\times\frac{5}{13}+\frac{3}{5}\times\frac{12}{13}$$

$$= \frac{20+36}{65}$$

$$= \frac{56}{65}$$

ظا (أ + ب) = $\dfrac{\text{ظا أ + ظا ب}}{\text{1 – ظا أ ظا ب}}$

$$= \frac{\frac{4}{3}+\frac{5}{12}}{1-\frac{4}{3}\times\frac{5}{12}}$$

$$= \frac{21}{12}\times\frac{9}{4} = \frac{63}{16}$$

(ii) ب زاوية منفرجة، هذا يعني أن ب تقع في الربع الثاني، ظا ب، جتا ب كلاهما سالب

جا (أ + ب) = جا أ جتا ب + جتا أ جا ب

$$= \frac{4}{5}\times\frac{12}{13}+\left(-\frac{3}{5}\right)\times\frac{5}{13}$$

$$= \frac{-15+48}{65}$$

$$= \frac{33}{65}$$

جتا (أ – ب) = جتا أ جتا ب + جا أ جا ب

$$= \frac{4}{5}\times\frac{5}{13}+\left(-\frac{3}{5}\right)\times\frac{12}{13}$$

$$= \frac{-36+20}{65}$$

$$= -\frac{16}{65}$$

ظا (أ + ب) = $\dfrac{\text{ظا أ + ظا ب}}{\text{1 – ظا أ ظا ب}}$

$$= \frac{-\frac{4}{3}+\frac{5}{12}}{1-\left(-\frac{4}{3}\right)\times\frac{5}{12}}$$

$$= -\frac{11}{12}\times\frac{9}{4} = -\frac{33}{56}$$

تمرين 2-1

(1) أوجد قيم الآتي بدلالة الجذور الصماء باستخدام صيغة الزاوية المركبة

(أ) جا $(30 + 45)^\circ$ (ب) جا $(45 - 30)^\circ$

(جـ) ظا $(30 + 45)^\circ$ (د) جا 105°

(هـ) ظا 15° (و) جتا $(-45)^\circ$

(2) عبر بصورة نسب مثلثيه فريدة:

(أ) جا 15° جتا 24° + جتا 15° جا 24°

(ب) جتا 50° جتا 20° + جا 50° جا 20°

(جـ) $\dfrac{1 + \text{ظا } 20^\circ}{1 - \text{ظا } 20^\circ}$

(3) أوجد، بدون استخدام الجداول الرياضية أو الآلة الحاسبة، قيمة كل من :

(أ) جتا 7° جا 23° + جا 7° جتا 23°

(ب) جتا 75° جتا 45° - جا 75° جا 45°

(جـ) $\dfrac{\text{ظا } 13^\circ + \text{ظا } 32^\circ}{1 - \text{ظا } 13^\circ \text{ ظا } 32^\circ}$

(4) عبر بصورة نسب مثلثيه فريدة:

(أ) $\frac{1}{2}$ جتا θ + $\frac{\sqrt{3}}{2}$ جا θ

(ب) $\frac{-1}{\sqrt{2}}$ جتا θ + $\frac{1}{\sqrt{2}}$ جا θ

(جـ) $\dfrac{\frac{1}{\sqrt{3}} + \text{ظا } \theta}{1 - \frac{\text{ظا } \theta}{\sqrt{3}}}$

(5) إذا كان جتا أ = $-\frac{4}{5}$ ، جتا ب = $\frac{12}{13}$ ، أ زاوية منفرجة ، ب زاوية حادة، فأوجد، من دون استخدام الجداول الرياضية أو الآلة الحاسبة، قيمة كل من:

(أ) جا (أ + ب)   (ب) جا (أ - ب)   (جـ) ظا (أ + ب)

(6) إذا كان $\dfrac{\text{ظا أ} + \text{ظا ب}}{1 - \text{ظا أ ظا ب}} = \dfrac{3}{\sqrt{3}}$، فأوجد، من دون استخدام الجداول أو الآلة الحاسبة قيمة أ + ب حيث أ ، ب زاويتان حادتان .

2-2 ضعف ومضاعفات العدد

صيغة الزاوية المركبة يمكن أن تمتد لإيجاد قيم ضعف ومضاعفات الزوايا مثل:

جا 2 أ ، جتا 2 أ ، ظا 2 أ ... الخ

بالتعويض عن ب بـ أ في (أ + ب) نحصل على 2 أ.

إذن جا 2 أ = جا (أ + أ)

= جا أ جتا أ + جتا أ جا أ

= 2 جا أ جتا أ

جا 2 أ = 2 جا أ جتا أ

بالمثل

جتا 2 أ = جتا (أ + أ)

= جتا أ جتا أ − جا أ جا أ

= جتا^2 أ − جا^2 أ

جتا 2 أ = جتا^2 أ − جا^2 أ

هذه النتيجة لها بديلان مهمان

نعلم أن جا^2 أ + جتا^2 أ = 1

⇦ جا^2 أ = 1 − جتا^2 أ، جتا^2 أ = 1 − جا^2 أ

بالتعويض عن جا^2 أ = 1 − جتا^2 أ، جتا^2 أ = 1 − جا^2 أ بالترتيب،

نجد أن جتا 2 أ = جتا^2 أ − (1 − جتا^2 أ)

جتا 2 أ = 2 جتا^2 أ − 1

جتا 2 أ = (1 − جا^2 أ) − جا^2 أ

جتا 2 أ = 1 − 2 جا^2 أ

مرة أخرى..... ظا 2 أ = ظا (أ + أ) $= \dfrac{\text{ظا أ} + \text{ظا أ}}{1 - \text{ظا أ ظا أ}}$

$= \dfrac{2\ \text{ظا أ}}{1 - \text{ظا}^2\ \text{أ}}$

إذن..... ظا 2 أ $= \dfrac{2\ \text{ظا أ}}{1 - \text{ظا}^2\ \text{أ}}$

تسمى هذه صيغة ضعف الزاوية والنتائج ملخصة فيما يلي :

جا 2 أ = 2 جا أ جتا أ

جتا 2 أ = جتا^2 أ - جا^2 أ

= 2 جتا^2 أ - 1

= 1 - 2 جا^2 أ

ظا 2 أ $= \dfrac{2\ \text{ظا أ}}{1 - \text{ظا}^2\ \text{أ}}$

نستطيع أيضًا إيجاد جا 3 أ بدلالة الزاوية الفريدة أ بالتعويض أولا عن 3 أ = أ + 2 أ كالآتي:

جا 3 أ = جا (أ + 2 أ)

= جا أ جتا 2 أ + جتا أ جا 2 أ ، ثم باستخدام صيغة ضعف الزاوية على 2 أ

جا 3 أ = جا أ (جتا^2 أ - جا^2 أ) + جتا أ (2 جا أ جتا أ)

= 3 جا أ - 4 جا^3 أ

النسب المثلثية الأخرى لمضاعفات أخرى للزاوية أ يمكن إيجادها بهذه الطريقة بالتعبير عن الزاوية المضاعفة بدلالة زوايا أصغر مثلًا:

جتا 4 أ = جتا (2 أ + 2 أ) التي يمكن فكها إلى الزاوية الفريدة أ.

3-2 المقدار أ جتا θ ± ب جا θ

للتعبير عن... أ جتا θ + ب جا θ ، على الصورة.... ر جتا $(\theta - \alpha)$

نفرض..... أ جتا θ + ب جا θ ≡ ر جتا $(\theta - \alpha)$

إذن....... أ جتا θ + ب جا θ ≡ ر جتا α جتا θ + ر جا α جا θ

بمساواة معاملي جتا θ، جا θ:

أ = ر جتا α

ب = ر جا α

بالتربيع والجمع:

ر^2 (جتا^2 α + جا^2 α) = أ^2 + ب^2

إذن ر^2 = أ^2 + ب^2

بأخذ الجذر الموجب:

إذن: ر = $\sqrt{\text{أ}^2 + \text{ب}^2}$

بالقسمة

$$\frac{\text{ب}}{\text{أ}} = \frac{\text{ر جا } \alpha}{\text{ر جتا } \alpha}$$

$$\text{ظا } \alpha = \frac{\text{ب}}{\text{أ}}$$

أ جتا θ + ب جا θ ≡ $\sqrt{\text{أ}^2 + \text{ب}^2}$ جتا $(\theta - \alpha)$، ظا $\alpha = \frac{\text{ب}}{\text{أ}}$

بالمثل يمكن إثبات أن:

أ جتا θ – ب جا θ ≡ $\sqrt{\text{أ}^2 + \text{ب}^2}$ جتا $(\theta + \alpha)$

أ جا θ + ب جتا θ ≡ $\sqrt{\text{أ}^2 + \text{ب}^2}$ جا $(\theta + \alpha)$

أ جا θ – ب جتا θ ≡ $\sqrt{\text{أ}^2 + \text{ب}^2}$ جا $(\theta - \alpha)$

ظا $\alpha = \frac{\text{ب}}{\text{أ}}$

القيم العظمى والصغرى للمقدار أ جتا θ ± ب جا θ.

مثال3:

أوجد القيم العظمى والصغرى للدوال الآتية:

(أ) 5 جتا θ + 12 جا θ

(ب) 2 جا θ – جتا θ

والقيم المناظرة لـ : θ بين $0°$، $360°$

الحل:

(أ) نفرض 5 جتا θ + 12 جا θ ≡ ر جتا $(\theta - \alpha)$

ر = $\sqrt{12^2 + 5^2}$ = 13،

ظا $\alpha = \frac{12}{5}$

$\alpha = 67.38°$

∴ 5 جتا θ + 12 جا θ = 13 جتا $(\theta - 67.38°)$

قيمة جتا$(\theta - \alpha)$ العظمى تساوى 1 وقيمتها الصغرى تساوى سالب 1

إذن 5 جتا θ + 12 جا θ العظمى تساوى 13 والصغرى تساوى سالب 13

5 جتا θ + 12 جا θ له قيمة عظمى عندما جتا $(\theta - 67.38°) = 1$

أي: $\theta - 67.38° = 0°$

$\theta = 67.4°$ (مقربا لرقم عشري واحد)

5 جتا θ + 12 جا θ له قيمة صغرى عندما جتا $(\theta - 67.38°) = -1$

أي $\theta - 67.38° = 180°$

$\theta = 180° + 67.38° \approx 247.4°$ (مقربا لرقم عشري واحد).

(ب) بالمثل

نفرض 2 جا θ - جتا θ ≡ ر جا $(\theta - \alpha)$

إذن ر = $\sqrt{2^2 + 1^2} = \sqrt{5}$

ظا $\alpha = \frac{1}{2}$

$\alpha = 26.57°$

إذن...... 2 جا θ - جتا θ = $\sqrt{5}$ جا $(\theta - 26.57°)$

إذن ...... قيمة 2 جا θ - جتا θ العظمى تساوي $\sqrt{5}$ و الصغرى تساوي $-\sqrt{5}$

2 جا θ - جتا θ عظمى عندما جا $(\theta - 26.57°) = 1$

أي عندما: $\theta - 26.57° = 90°$

$\theta = 90° + 26.57°$

$= 116.6°$ (لرقم عشري واحد)

2 جا θ - جتا θ صغري عندما جا $(\theta - 26.57°) = -1$

أي عندما: $\theta - 26.57° = 270°$

$\theta = 270° + 26.57°$

$= 296.6°$ (لرقم عشري واحد)

|ر| يسمى سعة الدالة

2 - 4 حل المعادلة المثلثية أ جتا θ + ب جا θ = د حيث أ، ب، د ثوابت

مثال4: حل المعادلة: 3 جتا θ + 4 جا θ = 1 على الفترة $0° \leqslant \theta \leqslant 360°$

الحل: نفرض أن: 3 جتا θ + 4 جا θ ≡ ر جتا $(\theta - \alpha)$

إذن ر $= \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$

ظا $\alpha = \frac{4}{3}$

$\alpha = 53.13°$

المعادلة: 3 جتا θ + 4 جا θ = 1 يمكن إعادة كتابتها على الصورة

5 جتا $(\theta - 53.13°) = 1$

جتا $(\theta - 53.13°) = \frac{1}{5}$

$\theta - 53.13° = 78.46°$ أو $281.54°$

$\theta = 131.6°$ أو $334.7°$ (لرقم عشري واحد)

ملحوظة:
في حالة أ جتا θ - ب جا θ = ج
استخدم أ جتا θ - ب جا θ =
ر جتا $(\theta + \alpha)$ = ج

مثال5:

حل المعادلة 4 جا θ - 2 جتا θ = 3 على الفترة $0° \leq \theta \leq 360°$

الحل:

نفرض 4 جا θ - 2 جتا θ ≡ ر جا $(\theta - \alpha)$

ر $= \sqrt{4^2 + 2^2} = \sqrt{20}$

ظا $\alpha = \frac{2}{4}$

$\alpha = 26.57°$

إذن $\sqrt{20}$ جا $(\theta - 26.57°) = 3$

⇦ جا $(\theta - 26.57°) = 3$

$\theta - 26.57° = 42.13°$ ، $137.87°$

$\theta = 68.7°$، $164.4°$ (لرقم عشري واحد)

ملحوظة:
في حالة أ جتا θ + ب جا θ = ج
استخدم أ جتا θ + ب جا θ =
ر جتا $(\theta + \alpha)$ = ج

مثال 6: إذا كان ظا س = أ ، س حادة، فأوجد بدلالة أ :

(أ) ظا 2 س (ب) جا 2 س (جـ) جتا² $\frac{س}{2}$

الحل:

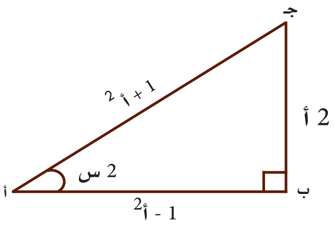
(أ) من صيغة ضعف الزاوية: ظا 2 س = $\frac{\text{2 ظا س}}{\text{1 - ظا}^2\text{ س}}$

نفرض ظا س = أ ، إذن ظا 2 س = $\frac{\text{2 أ}}{\text{1 - أ}^2}$

(ب) من الجزء (أ) لدينا ظا 2 س = $\frac{\text{2 أ}}{\text{1 - أ}^2}$

في Δ أ ب جـ، (شكل 2 - 4)

جا 2 س = $\frac{\text{2 أ}}{\text{1 + أ}^2}$



شكل 2 - 4

(جـ) إذا كان ظا س = أ

في المثلث و ط ر، (شكل 2 - 5)

جتا س = $\frac{1}{\sqrt{\text{1 + أ}^2}}$

ولكن جتا س = 2 جتا² $\frac{س}{2}$ − 1

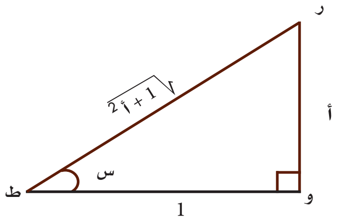
⇦ 2 جتا² $\frac{س}{2}$ = 1 + جتا س

$\text{جتا}^2 \frac{\text{س}}{2} = \frac{1 + \text{جتا س}}{2}$

بالتعويض عن $\text{جتا س} = \frac{1}{\sqrt{1+\text{أ}^2}}$

اذن $\text{جتا}^2 \frac{\text{س}}{2} = \frac{1 + \frac{1}{\sqrt{1+\text{أ}^2}}}{2}$

$= \frac{1}{2} + \frac{1}{2\sqrt{1+\text{أ}^2}}$



شكل (2 - 5)

مثال7:

حل المعادلات الآتية لقيم س حيث $0^\circ \geq$ س $\geq 360^\circ$

(أ) 6 جا س جتا س = 1

(ب) 3 ظا س = 2 ظا $(45^\circ$ - س)

(جـ) 3 ظا س - ظتا س = 2

الحل:

(أ) 6 جا س جتا س = 1

$\Leftarrow$ 3 (2 جا س جتا س) = 1

$\Leftarrow$ 3 جا 2 س = 1

$\Leftarrow$ جا 2 س $= \frac{1}{3}$

$\Leftarrow$ 2 س = 19.5° ، 160.5° ، 379.5° ، 520.5°

إذن س = 9.7° ، 80.3° ، 189.7° ، 260.3°

(ب) 3 ظا س = 2 ظا $(45^\circ$ - س)

$\Leftarrow$ 3 ظا س $= 2\left(\frac{1 - \text{ظا س}}{1 + \text{ظا س}}\right)$

$\Leftarrow$ 3 ظا س + 3 ظا^2 س = 2 - 2 ظا س

$\Leftarrow$ 3 ظا^2 س + 5 ظا س - 2 = 0

$\Leftarrow$ (3 ظا س - 1)(ظا س + 2) = 0

$\Leftarrow$ ظا س $= \frac{1}{3}$ أو ظا س = - 2

$\Leftarrow$ س = 18.4، 198.4° أو س = 116.6°، 296.6°

إذن س = 18.4°، 198.4°.

(جـ) 3 ظا س - ظتا س = 2

$\Leftarrow$ 3 ظا س - $\frac{1}{\text{ظا س}}$ = 2

$\Leftarrow$ 3 ظا^2 س - 1 = 2 ظا س

$\Leftarrow$ 3 ظا^2 س - 2 ظا س - 1 = 0

$\Leftarrow$ (3 ظا س + 1) (ظا س - 1) = 0

إذن..... ظاس = $-\frac{1}{3}$ ، ظا س = 1

$\Leftarrow$ س = 161.6°، 341.6° أو س = 45° ، 225°

إذن س = 45° ، 161.6° ، 225° ، 341.6°

2-5 إثبات المتطابقات المثلثية

المتطابقة الرياضية هي علاقة صحيحة لجميع قيم المجاهيل، مثل،

$(س + 1)^2 = س^2 + 2س + 1$.

المتطابقة المثلثية علاقة تتضمن دوال مثلثية.ليس هناك طريقة محددة في التعامل مع براهين المتطابقات المثلثية، فيما يلي بعض النقاط التي تستخدم كخطوط إرشادية

1- ابدأ بالطرف الأكثر تركيبا للمتطابقة المعطاة واثبت أنه يساوي الطرف الآخر.

2- المتطابقات الأساسية الثلاث، $جا^2\theta + جتا^2\theta = 1$ ، $1 + ظا^2\theta = قا^2\theta$

$1 + ظتا^2\theta = قتا^2\theta$، معا مع تغيرات مثل $جتا^2\theta = 1 - جا^2\theta$ مفيدة كثيرا

3- عندما تقع زاويتان مثل أ ، 2أ في متطابقة، يتعين تحويلها لنفس الزاوية.

4- استخدم التعويضات البسيطة مثل $ظا\theta = \frac{جا\theta}{جتا\theta}$ ، $ظتا\theta = \frac{1}{ظا\theta}$ أو $قتا\theta = \frac{1}{جا\theta}$ ....الخ.

مثال8:

إذا كان أ، ب، ج ثلاث زوايا مثلث، اثبت أن:

جا أ جتا ب جتا ج + جتا أ جا ب جتا ج + جتا أ جتا ب جا ج = جا أ جا ب جا ج

الحل:

(مجموع قياسات زوايا المثلث) $أ + ب + ج = 180^{\circ}$

$جا(أ + ب + ج) = 0$

⇦ $جا(أ + ب)جتا ج + جتا(أ + ب)جا ج = 0$

⇦ جا أ جتا ب جتا ج + جتا أ جا ب جتا ج + جتا أ جتا ب جا ج - جا أ جا ب جا ج = 0

⇦ جا أ جتا ب جتا ج + جتا أ جا ب جتا ج + جتا أ جتا ب جا ج = جا أ جا ب جا ج

مثال9:

اثبت أن $\frac{جا^3\theta}{جتا^2\theta} + جا\theta = ظا\theta\ قا\theta$

الحل:

خذ الطرف الأيمن:

$$\frac{جا^3\theta}{جتا^2\theta} + جا\theta = \frac{جا^3\theta + جا\theta\ جتا^2\theta}{جتا^2\theta}$$

$$= \frac{جا\theta(جا^2\theta + جتا^2\theta)}{جتا^2\theta}$$

$$= \frac{جا\theta}{جتا^2\theta}(جا^2\theta + جتا^2\theta) = 1$$

$$= ظا\theta\ قا\theta$$

إذن الطرفان متساويان

⇦ $\frac{جا^3\theta}{جتا^2\theta} + جا\theta = ظا\theta\ قا\theta$

مثال10:

اثبت أن $\dfrac{\text{جتا}(\text{أ}+\text{ب})+\text{جتا}(\text{أ}-\text{ب})}{\text{جا}(\text{أ}+\text{ب})-\text{جا}(\text{أ}-\text{ب})}=\text{ظتا ب}$

الحل:

ابدأ بالطرف الأيمن

$$\Leftarrow \quad \frac{\text{جتا}(\text{أ}+\text{ب})+\text{جتا}(\text{أ}-\text{ب})}{\text{جا}(\text{أ}+\text{ب})-\text{جا}(\text{أ}-\text{ب})}=\frac{\text{جتا أ جتا ب}-\text{جا أ جا ب}+\text{جتا أ جتا ب}+\text{جا أ جا ب}}{\text{جا أ جتا ب}+\text{جتا أ جا ب}-\text{جا أ جتا ب}+\text{جتا أ جا ب}}$$

$$=\frac{2\,\text{جتا أ جتا ب}}{2\,\text{جتا أ جا ب}}$$

$$=\text{ظتا ب}$$

إذن الطرفان متساويان

$$\Leftarrow \quad \frac{\text{جتا}(\text{أ}+\text{ب})+\text{جتا}(\text{أ}-\text{ب})}{\text{جا}(\text{أ}+\text{ب})-\text{جا}(\text{أ}-\text{ب})}=\text{ظتا ب}$$

مثال11:

اثبت أن $\dfrac{\text{جا أ}}{\text{جا 2أ}}+\dfrac{\text{جتا أ}}{1+\text{جتا 2أ}}=\text{قا أ}$

الحل:

خذ الطرف الأيمن: $\dfrac{\text{جا أ}}{\text{جا 2أ}}+\dfrac{\text{جتا أ}}{1+\text{جتا 2أ}}$

$$=\frac{\text{جا أ}}{2\,\text{جا أ جتا أ}}+\frac{\text{جتا أ}}{1+2\,\text{جتا}^2\text{أ}-1}$$

$$=\frac{1}{2\,\text{جتا أ}}+\frac{\text{جتا أ}}{2\,\text{جتا}^2\text{أ}}$$

$$=\frac{1}{2\,\text{جتا أ}}+\frac{1}{2\,\text{جتا أ}}$$

$$=\frac{2}{2\,\text{جتا أ}}$$

$$=\text{قا أ}$$

إذن الطرفان متساويان

$$\Leftarrow \quad \frac{\text{جا أ}}{\text{جا 2أ}}+\frac{\text{جتا أ}}{1+\text{جتا 2أ}}=\text{قا أ}$$

تمرين 2-ب

(1) اختصر:

(أ) $جتا^2 18^\circ - جا^2 18^\circ$ (ب) $\frac{1-ظا^2 10^\circ}{2 ظا 10^\circ}$ (جـ) 2 جا $\frac{س}{2}$ جتا $\frac{س}{2}$

(د) $2 جتا^2 2س - 1$ (هـ) جا س جتا س

(2) أوجد من دون استخدام الجداول الرياضية أو الآلة الحاسبة، قيمة الآتي:

(أ) $2 جتا 75^\circ جتا 75^\circ$ (ب) $جتا^2 22\frac{1}{2}^\circ - جا^2 22\frac{1}{2}^\circ$ (جـ) $\frac{ظا 112.5^\circ}{1-ظا 112.5^\circ}$

(3) إذا كان، جا أ $= \frac{4}{5}$ ، أ زاوية حادة، فأوجد، من دون استخدام الجداول أو الآلة الحاسبة قيمة كل من:

(أ) جا 2 أ (ب) جتا 2 أ (جـ) ظا 2 أ

(4) أثبت المتطابقات الآتية باستخدام قواعد الزاوية المركبة:

(أ) $جتا (90^\circ + أ) = - جا أ$ (ب) $\frac{1 - جتا 2\theta}{1 + جتا 2\theta} = ظا^2 \theta$

(جـ) $\frac{جا \theta}{1 + جتا \theta} = ظا \frac{1}{2}\theta$ (د) $(جتا أ - جا أ)^2 - جا أ = - جا 1$

(هـ) ظتا أ + ظا أ = 2 قتا 2 أ (و) $جا 2 أ = \frac{2 ظا أ}{1 + ظا^2 أ}$

(5) أوجد، قياسات قيم س، حيث $0^\circ \leq س \leq 360^\circ$، والتي تحقق المعادلات الآتية:

(أ) $\frac{1}{2}$ جا س = جا 2 س (ب) 7جا س + 3 جتا 2 س = 0 (هـ) ظا 2 س = 3 ظا س

(6) أوجد القيم العظمى والصغرى لكل من الدوال الآتية مع ذكر قيم θ من 0° إلى 360° :

(أ) $3 جا \theta + 4 جتا \theta$ (ب) $3 جتا \theta - 4 جا \theta$ (جـ) $م جا \theta - ن جتا \theta$

تمرين 2-جـ

(1) أوجد جميع قيم س بين 0°، 360° التي تحقق المعادلة: 5 جا س + 2 قتا س = 11

(2) إذا عُلم أن: $ظا \theta = س$، $جتا 2\theta = ص$، وأن θ زاوية حادة، فأوجد ص بدلالة س.

(3) إذا كان ظا س $= \frac{15}{8}$ ، جتا ص $= -\frac{3}{5}$، أن س، ص في نفس الربع، فاحسب من دون استخدام الجداول أو الآلة الحاسبة قيمة: جا (س + ص)

(4) إذا عُلم 2 أ زاوية حادة، أن جا 2 أ $= \frac{\sqrt{5}}{3}$ ، فاحسب ، من دون استخدام الجداول أو الآلة الحاسبة قيم :

(أ) جتا 2 أ (ب) ظا أ

(5) أثبت المتطابقات الآتية:

(أ) $جتا 2 أ = \frac{1 - ظا^2 أ}{1 + ظا^2 أ}$ (ب) $\frac{جا س}{جتا س - جا س} + \frac{جتا س}{جتا س + جا س} = قا 2 س$

(جـ) $ظتا 2\theta + قتا 2\theta = ظتا \theta$

(6) حل المعادلات الآتية في θ حيث $0^\circ \leq \theta \leq 360^\circ$

(أ) $3 جتا \theta + 4 جا \theta = 5$ (ب) $4 جا \theta - 3 جتا \theta = 2$ (جـ) $\sqrt{3} جا \theta + جتا \theta = 1$

الملخص:

1- صيغة الزاوية المركبة :

هذه النتائج صحيحة لجميع قيم أ ، ب

جا (أ ∓ ب) = جا أ جتا ب ∓ جتا أ جا ب

جتا (أ ± ب) = جتا أ جتا ب ∓ جا أ جا ب

ظا (أ ∓ ب) = $\frac{\text{ظا} \mp \text{ظا ب}}{1 \pm \text{ظا أ ظا ب}}$

2- قاعدة ضعف الزاوية :

جا 2أ = 2 جا أ جتا أ

جتا 2أ = جتا^2 أ − جا^2 أ

= 2 جتا^{2}أ − 1

= 1 − 2 جا^2 أ

ظا 2أ = $\frac{\text{2 ظا أ}}{\text{1 - ظا}^2\text{أ}}$

3- صيغة الزاوية المركبة:

المقدار أ جتا θ ± ب جا θ

أ جتا θ ∓ ب جا θ = $\sqrt{\text{أ}^2 + \text{ب}^2}$ جتا (θ±α)، حيث ظا α = $\frac{\text{ب}}{\text{أ}}$

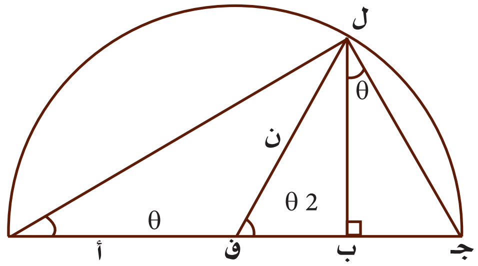
أ جا θ ∓ ب جتا θ = $\sqrt{\text{أ}^2 + \text{ب}^2}$ جا (θ±α)، حيث ظا α = $\frac{\text{ب}}{\text{أ}}$

هذا يساعدنا في إيجاد القيم العظمى والصغرى للمقدار

أ جتا θ ± ب جا θ، وأيضًا لحل المعادلات المثلثية المناظرة .

استقصاء الرياضيات

1-صيغة ضعف الزاوية:



شكل 2 - 6

لاحظ الشكل السابق :

للتسهيل، خذ حالة θ زاوية حادة.

(أ) نفرض أن ق∠ ل و جـ = 2 θ تحقق أن

(1) ق∠ ل أ جـ = θ (2) ق∠ ب ل جـ = θ (3) أ ل = 2 ن جتا θ

(4) ل جـ = 2 ن جا θ (5) ل ب = ن جا 2 θ (6) و ب = ن جتا 2 ب

(7) أ ب = ن (1 + جتا 2 θ) (8) ب جـ = ن (1 - جتا 2 θ)

(ب) من المثلث أ ب ل، من تعريف:

(1) جا θ، استنتج أن جا 2 θ = 2 جا θ جتا θ

(2) جتا θ، استنتج أن جتا 2 θ = 2 جتا^2 θ - 1

(3) ظا θ، استنتج أن ظا θ = $\dfrac{\text{جا } 2\theta}{1 + \text{جتا } 2\theta}$

بالمثل من المثلث ل ب جـ، من تعريف:

(1) جا θ، استنتج أن جتا 2 θ = 1 - 2 جا^2 θ

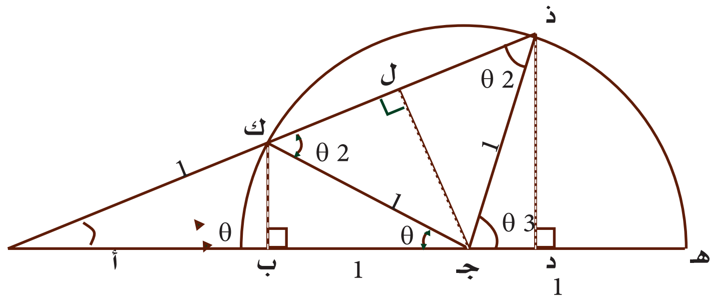
(2) جتا θ، استنتج أن جا 2 θ = 2 جا θ جتا θ

(3) ظا θ، استنتج أن ظا θ = $\dfrac{1 - \text{جتا } 2\theta}{\text{جا } 2\theta}$

من: ل ب^2 = أ ل^2 - أ ب^2 = ل جـ^2 - ب جـ^2

استنتج أن جتا 2 θ = جتا^2 θ - جا^2 θ

2-صيغة ثلاثة أمثال الزاوية :



شكل 2 - 7

ارسم خطًّا أفقيًّا أساسيًّا كون زاوية مقدارها θ عند أ . خذ أ ك يساوي وحدة طولية على الضلع العلوي، إذن ك و يساوي وحدة طولية مع و على المستقيم الأساسي، بأخذ و كمركز، ارسم نصف دائرة طولها وحدة طولية. الدائرة تقطع الضلع العلوي في النقطتين ك، ذ، اثبت أن ق (∠ ذ و هـ) = 3 θ حيث هـ نقطة تقاطع نصف الدائرة مع المستقيم الأساسي ارسم المستقيمات الأعمدة ك ب ، و ل ، ذ د وتحقق أن:

(أ) أب = جتا θ = و ب

(ب) ك ب = جا θ

(جـ) و ل = جا 2 θ

(د) ك ل = جتا 2 θ = ذ ل

(هـ) و د = جتا 3 θ

(و) ذ د = جا 3 ب

من المثلث أ د ذ، باستخدام أ د = أ ذ جتا θ، استنتج أن جتا 3 θ = 4 جتا^3 θ - 3 جتا θ.

أيضًا باستخدام د ذ = أ ذ جا θ، استنتج أن جا 3 θ = 3 جا θ - 4 جا^3 θ.

3 الْمَزِيد مِن الدَوال التَّفَاضُل

Further Differentiation

المزيد من الدوال والتفاضل

Further Differentiation

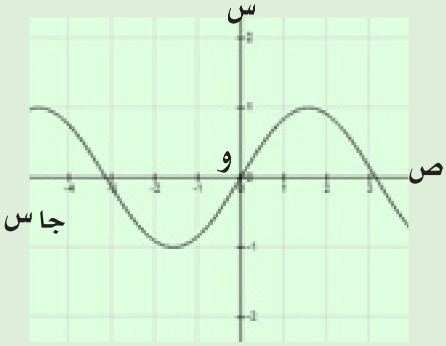
الدوال الزوجية والفردية :

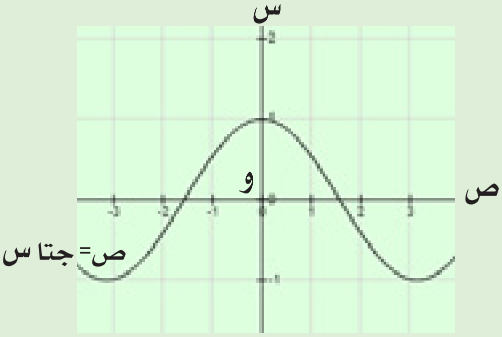
(1) الدالة الفردية:

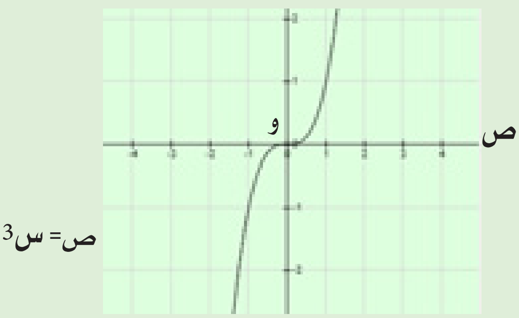
يقال للدالة أنها فردية إذا كانت: د(-س) =-د (س)
ومنحنى هذه الحالة متماثل حول نقطة الأصل.
ومن أمثلة الدوال الفردية:
ظا س ، جا س ، قتا س ، س^{ن} (حيث ن عدد فردي) (د (س))^{ن} ، د (س) تكون دالة كثيرة الحدود خالية من القوى الزوجية .

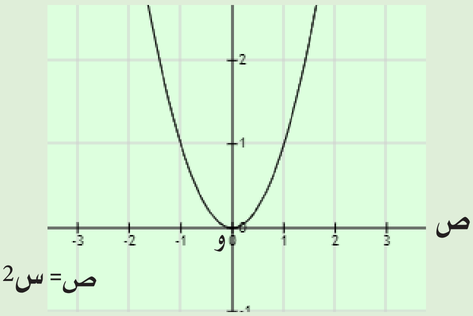
(2) الدالة الزوجية:

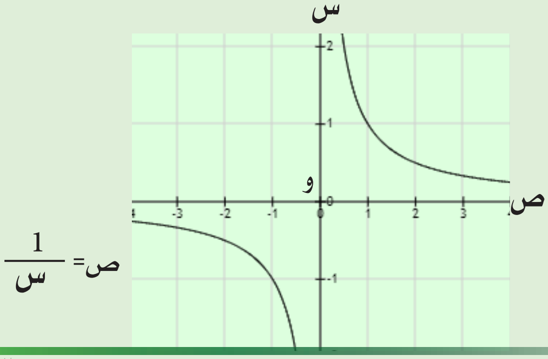
يقال للدالة أنها زوجية إذا كانت د(-س) =د (س)
ومنحنى هذه الحالة متماثل حول محورا الصادات.
ومن أمثلة الدوال الزوجية:
جتا س ، قا س ، قتا س، | س | ، س^{ن} (حيث ن عدد زوجي) (د (س))^{ن} ، د (س) تكون دالة كثيرة الحدود خالية من القوى الفردية .

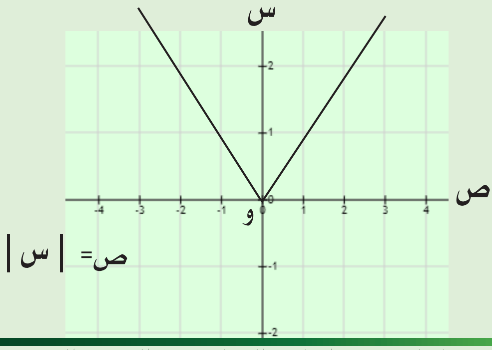












3-1 الدوال الزوجية الفردية:

مثال 1: أثبت أن الدالة : $د(س) = (س - \frac{1}{س})^4$ دالة زوجية .

الحل :

$$د(-س) = \left((-س) - \frac{1}{(-س)}\right)^4$$

$$= (-س + \frac{1}{س})^4$$

$$= (-(س - \frac{1}{س}))^4$$

$$= (س - \frac{1}{س})^4$$

$\therefore$ $د(-س) = د(س)$ فهي دالة زوجية .

مثال 2: ابحث ما إذا كانت الدوال المعرفة بالمعادلات التالية زوجية أم فردية أو ليست فردية ولا زوجية.

(أ) $د(س) = س \text{ جا } س + \text{جتا } س$

(ب) $د(س) = 5 - س^2$

(جـ) $د(س) = \frac{\text{جا } س + \text{جتا } س}{\text{جا } س - \text{جتا } س}$

(ء) $د(س) = |س|$

(هـ) $د(س) = \sqrt[3]{س^3 - 4}$

الحل :

(أ) $د(-س) = (-س) \text{ جا } (-س) + \text{جتا } (-س)$

$= (-س)(-\text{ جا } س) + \text{جتا } س$

$= س \text{ جا } س + \text{جتا } س$

$\therefore$ $د(-س) = د(س)$ ⇦ $\therefore$ الدالة زوجية.

(ب) $د(-س) = 5 - (-س)^2$

$= 5 - س^2$

$= د(س)$ ⇦ $\therefore$ الدالة زوجية.

(جـ) $د(-س) = \frac{\text{جا}(-س) + \text{جتا}(-س)}{\text{جا}(-س) - \text{جتا}(-س)}$

$$= \frac{-\text{جا } س + \text{جتا } س}{-\text{جا } س - \text{جتا } س}$$

$$= \frac{-(\text{جا } س - \text{جتا } س)}{-(\text{جا } س + \text{جتا } س)}$$

$$= \frac{\text{جا } س - \text{جتا } س}{\text{جا } س + \text{جتا } س}$$

$\therefore$ الدالة د ليست فردية ولا زوجية.

(ى) $د(-س) = |-س|$

$= |س|$

$= د(س)$ ∴ فهي دالة زوجية.

(هـ) $د(-س) = \sqrt[3]{(-س)^3 - 4}$

$= \sqrt[3]{-س^3 - 4}$

$= -\sqrt[3]{س^3 + 4}$ ∴ الدالة د لا تكون زوجية ولا فردية.

مثال 3: أثبت أن الدالة : $د(س) = \frac{س + س^3}{2}$ دالة فردية.

الحل : $د(-س) = \frac{(-س) + (-س)^3}{2} = \frac{-س - س^3}{2}$

$د(-س) = -\frac{1}{2}(س + س^3)$

$د(-س) = -د(س)$ ⇐ ∴ فهي دالة فردية.

تمرين 3 أ:

(1) أوجد فيما إذا كانت كل من الدوال الآتية زوجية أم فردية أنها أو ليست فردية ولا زوجية.

(أ) $د(س) = \frac{س^2 - 1}{س^2 + جاس}$ (ب) $د(س) = \frac{1}{1 - |س|}$ س $\in (-1 ، 1)$

(جـ) $د(س) = 3$ (ى) $د(س) =$ صفر

(2) بين ما إذا كانت الدالة $د(س) = 5^{س} + 5^{-س}$ زوجية أو فردية.

2-3 الدوال الأحادية والفوقية One-to-one and onto functions

تعريف 1:

يقال عن الدالة د: س ⟵ ص بأنها دالة أحادية إذا كان كل عنصر في مدى الدالة صورة لعنصر واحد فقط في النطاق... بمعنى أن: $د(س_1) = د(س_2) \Leftarrow س_1 = س_2 \Leftarrow$ لأي $س_1 ، س_2 \in س$

مثال 4:

إذا كانت : $د(س) = \{(س،ص) : ص = 3س + 7 ، س \in ع\}$ فبين إذا ما كانت دالة أحادية أم لا مع ذكر السبب.

الحل : $د(س) = 3س + 7$ ، $س \in ع$

$د(س_1) = 3س_1 + 7$ ، $د(س_2) = 3س_2 + 7$

$د(س_1) = د(س_2) \Leftarrow 3س_1 + 7 = 3س_2 + 7$

$3س_1 = 3س_2$ بقسمة الطرفين على 3

$س_1 = س_2$ ∴ الدالة أحادية

مثال 5:

إذا كانت : $د(س) = \{ (س، ص) ص = س^2 - 1 ، س \in ع \}$ فبين إذا ما كانت دالة أحادية أم لا مع ذكر السبب .

الحل :

الدالة ليست أحادية نلاحظ أن:

$د(3) = 9-1 \Leftarrow د(3) = 8$

$د(-3) = 9-1 \Leftarrow د(-3) = 8$ ولكن $3 \neq -3$

تعريف 2:

يقال عن الدالة $د: س \longleftarrow ص$ بأنها دالة فوقية إذا كان كل عنصر $ص \in ص$ يوجد له عنصر $س \in س$ بحيث $د(س) = ص$.

مثال 6:

بإعتبار الدالة المعرفة على مجموعة الأعداد الحقيقية $د: ع \longleftarrow ع^+$ معرفة بالقاعدة $د(س) = س^2$ ، نلاحظ أن هذه الدالة فوقية لأن كل عنصر في $ع^+$ يوجد أصل في $ع$.

مثال 7:

إذا كانت $د: [-1 ، 1] \longleftarrow ع$ معرفة بالقاعدة $د(س) = س^2$ بين أن د دالة ليست أحادية و لا فوقية.

الحل :

$\because د(\frac{1}{4}) = \frac{1}{16}$ ، $د(-\frac{1}{4}) = \frac{1}{16}$

$د(-\frac{1}{4}) = د(\frac{1}{4})$ ولكن $-\frac{1}{4} \neq \frac{1}{4}$

أي أن عنصرين مختلفين في النطاق لهما الصورة نفسها كما يوجد عناصر أخرى كثيرة غير $\frac{1}{4}$ ، $-\frac{1}{4}$ ونود الإشارة هنا الدالة ليست فوقية لأن مثلا $4 \in$ مدى د ، ولكن لايوجد عنصر $أ \in [-1 ، 1]$ بحيث $د(أ) = 4$.

مثال 8:

إذا كانت $د: س \longleftarrow \frac{س + 1}{3س - 1}$ ، $س \in ع - \{\frac{1}{3}\}$ ، $ص \in ع - \{\frac{1}{3}\}$ ، فنجد أن : $د(س) = ص$

$$3 ص س - ص = س + 1$$

$$3 س ص - س = ص + 1$$

$$س(3 ص - 1) = ص + 1$$

$$\therefore س = \frac{ص + 1}{3ص - 1} \qquad ص \neq \frac{1}{3}$$

بالتعويض بقيمة س في المعادلات الأصلية

$$\because د(س) = (\frac{س + 1}{3س - 1})$$

$$د(س) = (\frac{ص + 1}{3ص - 1} + 1) \times (\frac{1}{3(\frac{ص + 1}{ص - 1}) - 1})$$

$$\text{د}(\text{س}) = \left(\frac{\text{ص}+1+3\text{ص}-1}{3\text{ص}-1}\right)\left(\frac{3\text{ص}-1}{3\text{ص}+3-3\text{ص}+1}\right)$$

$$= \frac{4\text{ص}}{3\text{ص}-1} \times \frac{3\text{ص}-1}{4}$$

د(س) = ص ⇐ ∴ الدالة فوقية

مثال 9:

بين ما إذا كانت الدالة ص = 4 س ، س ∈ ط فوقية أو لا مع ذكر السبب.

الحل :

∵ ص = 4 س ⇐ س = $\frac{1}{4}$ ص

∴ ص = 4 س ، س ∈ ط ، يوجد قيمة لـ س ∉ ط

∴ الدالة ليست فوقية.

تمرين 3ب:

(1) كل دالة من الدوال الأتية أثبت أنها أحادية أو ليست أحادية .

(أ) د(س) = س^2 ، س ∈ ع

(ب) د(س) = س^2 ، س ∈ [0 ، 4]

(جـ) د(س) = | س − 2 | ، س ∈ [−3 ، 2]

(ى) د(س) = 3 ، س ∈ [−2 ، 3]

(هـ) د(س) = جا س ، س ∈ [$-\frac{\text{ط}}{2}$ ، $\frac{\text{ط}}{2}$]

(2) بين أي من الدوال السابقة فوقية ؟

3-3 معكوس الدالة Invertible function :

تكمن أهمية الدوال الأحادية في كونها الدوال التى لها دوال عكسية حسب التعريف التالي:

تعريف:

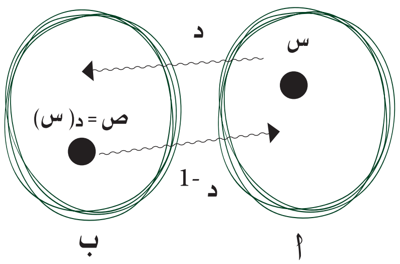
لتكن دالة أحادية لها نفس النطاق أ والمدى ب فإن الدالة العكسية د$^{-1}$ لها النطاق ب والمدى أ و معرفة:

ص = د(س) ⟵ س = د$^{-1}$ (ص) لكل ص في ب

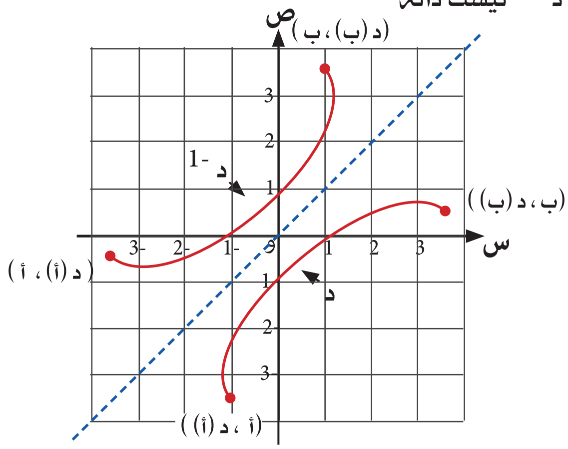
إذا كانت د تأخذ س إلى ص فإن: د$^{-1}$ ترجع ص إلى س ، نطاق د$^{-1}$ = مدى د ، مدى د$^{-1}$ = نطاق د .

ملحوظة :

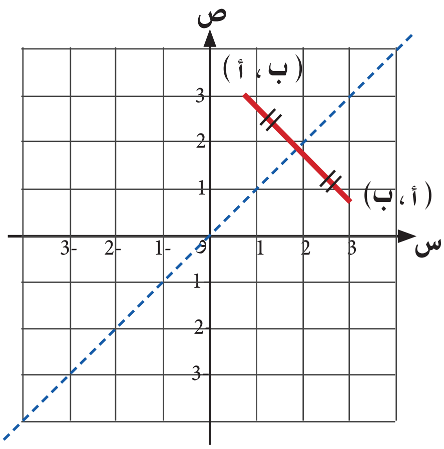
1. يجب عدم الخلط بين د$^{-1}$ التى تشير للدالة العكسية والأس (-1).
2. د$^{-1}$ (س) لاتعني $\frac{1}{\text{د}(\text{س})}$
3. $\frac{1}{\text{د}(\text{س})}$ = (د(س))$^{-1}$



● إذا لم تكن دالة أحادية فإن $د^{-1}$ ليست دالة

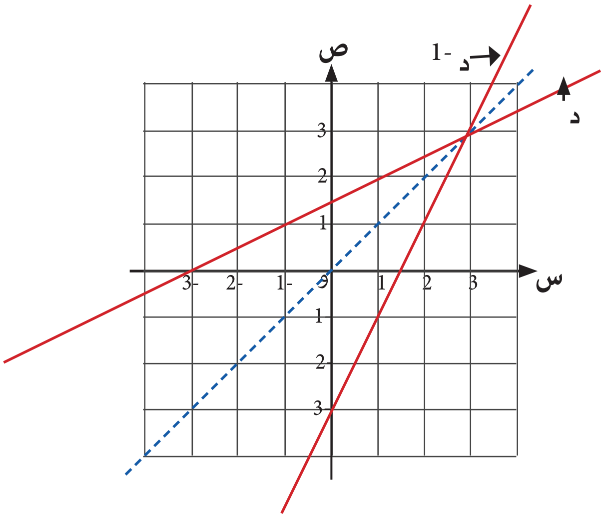


● مبدأ استبدال س: ص والعكس للحصول على $د^{-1}$ يعطى طريقة للحصول على الرسم البياني لـ $د^{-1}$ إذا كانت د(أ) = ب فإن أ = $د^{-1}$ (ب) عليه فإن النقطة (أ، ب) على د، وفقط إذا كانت النقطة (ب، أ) تقع على $د^{-1}$.



مثال 10:

إذا كانت الدالة د: س ← 2 س − 3 ، س ∈ ع بين أن الدالة د لها دالة عكسية على الصورة ص = $د^{-1}$ (س) ثم ارسم الدالة مستخدما الرسم البياني للدالة د .



الحل:

ص = 2 س − 3 ⇦

∴ س = 2 ص − 3 (نجعل س، ص يتبادلان الوضع)

نحصل على: س = $د^{-1}$ (ص) ومنها

ص = $\frac{س + 3}{2}$ = $د^{-1}$ (س)

مثال 11 :

أوجد الدالة العكسية للدالة د: ح − { 0 } ⟵ ح − { 0 } حيث $\text{د}(\text{س}) = \frac{2}{\text{س}}$

الحل :

الدالة تناظر أحادي (يترك للطالب)

نوجد س بدلالة ص فنحصل على : $\text{س} = \frac{2}{\text{ص}}$ ⟸ $\text{ص} = \frac{2}{\text{س}} = \text{د}^{-1}(\text{س})$

مثال 12 :

إذا كانت د: ح − { 2 } ⟵ ح − { 1 } حيث : $\text{د}(\text{س}) = \frac{\text{س} + 3}{\text{س} - 2}$

أثبت أن د تناظر أحادي، ثم أوجد د^{-1} على صورة ص = د (س)

الحل :

$\text{د}(\text{س}_1) = \text{د}(\text{س}_2)$ ⟸ $\frac{\text{س}_1 + 3}{\text{س}_1 - 2} = \frac{\text{س}_2 + 3}{\text{س}_2 - 2}$

$\text{س}_1\text{س}_2 - 2\text{س}_1 + 3\text{س}_2 - 6 = \text{س}_1\text{س}_2 + 3\text{س}_1 - 2\text{س}_2 - 6$

$5\text{س}_1 = 5\text{س}_2$

$\therefore \text{س}_1 = \text{س}_2$ ⟸ أحادية

$\because \text{ص} = \frac{\text{س} + 3}{\text{س} - 2}$

$\text{س ص} - 2\text{ص} = \text{س} + 3$

$\text{س ص} - \text{س} = 2\text{ص} + 3$

$\text{س} = \frac{2\text{ص} + 3}{\text{ص} - 3}$ ، $\text{ص} \neq 1$

بالتعويض في $\text{ص} = \frac{\text{س} + 3}{\text{س} - 2}$

$\text{د}(\text{س}) = \left(\frac{2\text{ص}+3}{\text{ص}-3} + 3\right) \times \left(\frac{1}{\frac{2\text{ص}+3}{\text{ص}-3} - 2}\right)$

$= \left(\frac{2\text{ص}+3+3\text{ص}-3}{\text{ص}-3}\right) \times \left(\frac{\text{ص}-1}{2\text{ص}+3-2\text{ص}+2}\right)$

$= \left(\frac{5\text{ص}}{\text{ص}-1}\right) \times \left(\frac{\text{ص}-1}{5}\right)$

$\text{د}(\text{س}) = \text{ص}$

$\forall$ س $\in (-\infty ، 2) \cup (2 ، +\infty)$

$\exists$ ص $\in (-\infty ، 1) \cup (1 ، +\infty)$

∴ الدالة فوقية ⟸ للدالة د دالة عكسية.

ملحوظة:
بعض الدوال قد يكون لها د^{-1} والبعض الآخر لا يكون لها د^{-1}

ملحوظة:
$\forall$ س تعني لكل س
$\exists$ ص تعني يوجد ص

نوجد س بدلالة ص فنحصل على : $\text{س} = \frac{\text{ص}+3}{\text{س}-2}$ ، $\text{ص} \neq 1$

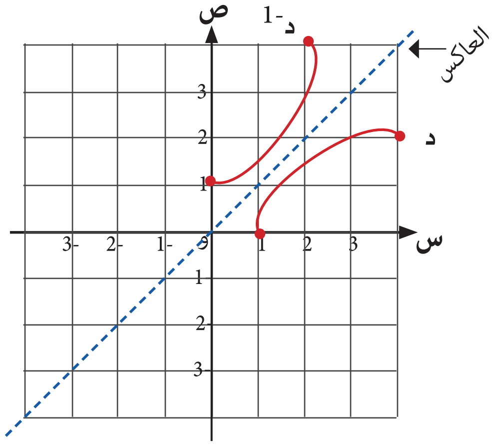
فتكون د^{-1} على صورة ص = د^{-1} (س) على النحو التالي:

$\text{د}^{-1}(\text{س}) = \frac{2\text{س}+3}{\text{س}-1}$ ، $\text{س} \neq 1$

بحيث نط د^{-1} = مد د ، مد د^{-1} = نط د

مثال 13 :

أوجد معادلة د^{-1} بحيث $\text{د}(\text{س}) = \sqrt{\text{س}-1}$ ثم ارسم بيانيا الدالتين د (س) ، د^{-1} (س)



الحل :

$\text{ص} = \sqrt{\text{س}-1}$ س $\geqslant 0$ ، ص $\geqslant 0$

$\text{ص}^2 = \text{س} - 1 \Leftarrow \therefore \text{س} = \text{ص}^2 + 1$ ، ص $\geqslant 0$

باستبدال س ، ص و العكس نجد أن:

$\text{ص} = \text{س}^2 + 1$ ، س $\geqslant 0$

$\therefore \quad \text{د}^{-1}(\text{س}) = \text{س}^2 + 1$ ، س $\geqslant 0$

تمرين 3-ج:

(1) أوجد معكوس الدالة لكل مما يأتي:

(أ) د(س) = 4 س   (ب) د(س) = س^3

(جـ) د(س) = $\text{س}^2 - 1$ ، س $\geqslant 0$ (ء) د(س) = $\frac{2\text{س}+3}{3\text{س}-5}$ ، س $\neq \frac{5}{3}$

(2) بين ما إذا كانت العبارة صحيحة أم لا، إذا كانت الدالة أحادية التناظر فإن:

(أ) الدالة العكسية د^{-1} تكون أحادية التناظر أيضا.

(ب) $(\text{د}^{-1})^{-1}$ = د

3-4 الدالة المركبة Function of function :

لأي دالتين د1 ، د2 بحيث نط د 1 $\cap$ مد د 2 $\neq \varnothing$

عليه يمكن إيجاد الدالة المركبة ونرمز لها بالرمز د 1 $\circ$ د 2 وتقرأ (د 1 تليها د 2) لها قيم معرفة على النحو التالي: (د 1 $\circ$ د 2) (س) = د 1 [د 2 (س)]

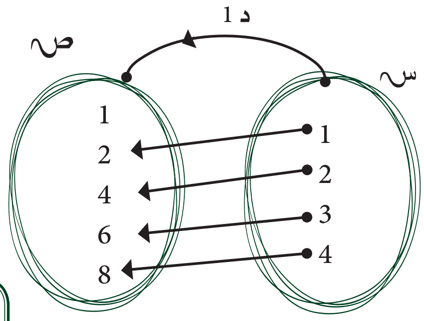
فمثلا إذا كان لدينا الدالتين:

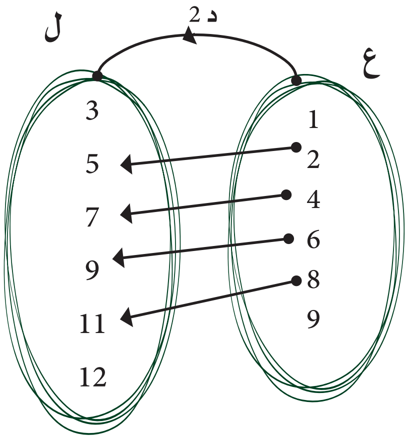
د 1 : س = {1 ، 2 ، 3 ، 4} $\longrightarrow$ ص = {1 ، 2 ، 4 ، 6 ، 8}

حيث د 1 (س) = 2 س

د 2 : ع = {1 ، 2 ، 4 ، 6 ، 8 ، 9}   ل = {3 ، 5 ، 7 ، 9 ، 11 ، 12}

حيث د 2 (س) = س + 3



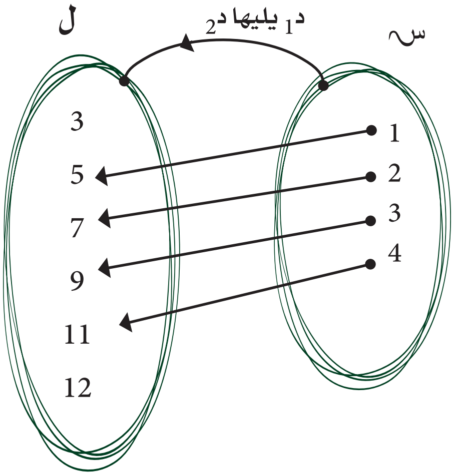


$\boxed{\text{مدى } \text{د}_1 \subset \text{ع}}$

وبالتالي :

$1 \xrightarrow{\text{د}_1} 2 \xrightarrow{\text{د}_2} 5$ **أي** $1 \xrightarrow{\text{د}_1 \text{ يليها } \text{د}_2} 5$

$2 \xrightarrow{\text{د}_1} 4 \xrightarrow{\text{د}_2} 7$ **أي** $2 \xrightarrow{\text{د}_1 \text{ يليها } \text{د}_2} 7$



وهكذا نصل إلى د_1 يليها د_2:

$(\text{د}_2 \circ \text{د}_1)(1) = 5$

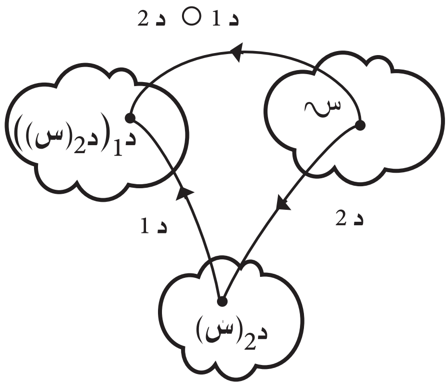
$(\text{د}_2 \circ \text{د}_1)(2) = 7$

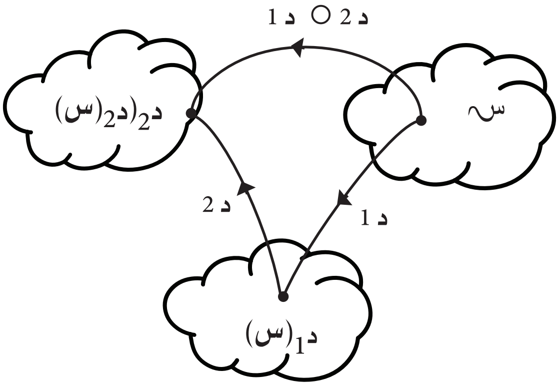
$(\text{د}_2 \circ \text{د}_1)(3) = 9$

$(\text{د}_2 \circ \text{د}_1)(4) = 11$

وبصفة عامة: إذا كانت الدالتين

$\text{د}_1 : \text{س} \leftarrow \text{ص}$ ، $\text{د}_2 : \text{ع} \leftarrow \text{ل}$





مثال 14:

إذا كانت د(س) $= \sqrt{س}$ ، د(س) = س + 2 أوجد:

(أ) (د1 ○ د2)(س) (ب) (د1 ○ د2)(س)

(جـ) (د1 ○ د1)(س) (ء) (د2 ○ د2)(س)

الحل:

الدالة المركبة	النطاق
(أ) (د1 ○ د2)(س) = د1 (د2 (س)) $= \sqrt{س + 2}$	[-1 ، ∞)
(ب) (د1 ○ د2)(س) = د2 (د1 (س)) = س + 2	[0، ∞)
(جـ) (د1 ○ د1)(س) = د1 (د1 (س)) = د1($\sqrt{س}$) $= \sqrt{\sqrt{س}}$	[0، ∞)
(ء) (د2 ○ د2)(س) = د2 (د2 (س)) = د2 (س + 2) = (س + 2) + 2 = س + 4	(-∞، -∞)

مثال 15:

إذا كانت د1 (س) = 4 س − 5 ، د2 (س) = جا $س^2$ أوجد:

$(د_1 ○ د_2)(\sqrt{\pi})$ ، (د2 ○ د1)(س)

الحل:

$(د_1 ○ د_2)$(س) = د1 (د2 (س))

= د1 (جا $س^2$)

= 4 جا $س^2$ − 5

(د1 ○ د2)$(\sqrt{\pi})$ = 4 جا π − 5

$\therefore$ $(د_1 ○ د_2)(\sqrt{\pi})$ = − 5

$(د_2 ○ د_1)$(س) = د2 (د1 (س))

= د2 (4 س − 5)

= جا $(4 س − 5)^2$

مثال 16:

إذا كانت $\text{د}_1(\text{س}) = \sqrt{\text{س} + 2}$ ، $\text{د}_2(\text{س}) = \text{س}^2 - 2$ أوجد: $(\text{د}_1 \circ \text{د}_2)(\text{س})$

الحل:

$$(\text{د}_1 \circ \text{د}_2)(\text{س}) = \text{د}_1(\text{د}_2(\text{س}))$$
$$= \text{د}_1(\text{س}^2 - 2)$$
$$= \sqrt{(\text{س}^2 - 2) + 2}$$
$$= \sqrt{\text{س}^2} = |\text{س}|$$

مثال 17:

إذا كانت $\text{د}_1(\text{س}) = \sqrt{\text{س} - 1}$ ، $\text{د}_2(\text{س}) = 10 - \text{س}^2$ أوجد نطاق $(\text{د}_1 \circ \text{د}_2)(\text{س})$

الحل:

$$(\text{د}_1 \circ \text{د}_2)(\text{س}) = \text{د}_1(\text{د}_2(\text{س}))$$
$$= \text{د}_1(10 - \text{س}^2)$$
$$= \sqrt{10 - \text{س}^2 - 1}$$
$$= \sqrt{9 - \text{س}^2}$$
$$(\text{د}_1 \circ \text{د}_2)(\text{س}) = \text{د}_1(\text{د}_2(\text{س}))$$
$$10 - \text{س}^2 \geqslant 1 \quad \therefore -\text{س}^2 \geqslant -9$$
$$\text{س}^2 \leqslant 9 \Leftarrow (\text{س} - 3)(\text{س} + 3) \leqslant 0$$
$$\therefore \text{س} \in [-3 ، 3]$$
$$\text{نط}(\text{د}_1 \circ \text{د}_2) = \{\text{س} : \text{س} \in \text{نط د}_2 ، \text{د}_2 \in \text{نط د}_1\} = \{\text{س} : \text{س} \in \text{ح} ، 10 - \text{س}^2 \in [1 ، \infty)\}$$

مثال 18:

دالة معرفة بالقاعدة:

$\text{د}_1 : \text{س} \leftarrow \text{س} - 3$ ، $\text{د}_2 \circ \text{د}_1 : \text{س} \leftarrow \text{س}$ ، $\text{د}(\text{س}) = \text{س}^2 - 6\text{س} + 11$ أوجد الدالة $\text{د}_2(\text{س})$

الحل:

$$\text{د}_1(\text{س}) = \text{س} - 3 \quad ، \quad (\text{د}_2 \circ \text{د}_1)(\text{س}) = \text{س}^2 - 6\text{س} + 11$$
$$\text{د}_2(\text{د}_1(\text{س})) = \text{س}^2 - 6\text{س} + 9 + 2$$
$$= (\text{س} - 3)^2 + 2$$
$$= (\text{د}_1(\text{س}))^2 + 2$$
$$\therefore \text{د}_2(\text{س}) = \text{س}^2 + 2$$

تمرين 3-د:

(1) أوجد $د_1 \circ د_2$ ، $د_2 \circ د_1$ ونطاق كل منها حيث :

(أ) $د_1(س) = \sqrt{س}$ ، $د_2(س) = 1 - س^2$

(ب) $د_1(س) = 2س$ ، $د_2(س) = جا س$

(جـ) $د_1(س) = \frac{1}{\sqrt{س - 1}}$ ، $د_2(س) = \frac{1}{س^2}$

(2) إذا كانت $د_1 : س \leftarrow \frac{6}{س - 2}$ ، $س \neq 2$

$د_2 : س \leftarrow ك س^2 - 1$ ، حيث ك ثابت.

(أ) اذا كان $(د_2 \circ د_1)(5) = 7$ فأوجد قيمة ك .

(ب) أوجد $(د_2 \circ د_1)(س)$

(3) ليكن $د_1(س) = س - 13$ ، $د_2(س) = س + 7$ بين أن:

(أ) $(د_1 \circ د_2)^{-1} = د_2^{-1} \circ د_1^{-1}$

(ب) $د_1(د_1^{-1}(س)) = س$

(4) إذا كانت: $د(س) = \frac{2س + 2}{س + 2}$ على النطاق $-1 \leqslant س \leqslant 3$ ، أوجد حلا للمعادلة $د(س) = د^{-1}(س)$

3-5 المشتقات العليا للدالة Upper derivatives of the function :

إذا كانت الدالة: $ص = 2س^3 + 5س + 2$

$\therefore \frac{ءص}{ءس} = 6س + 5$

نفرض أننا نريد أن نفاضل الناتج إلى ص مرة أخرى، كيف نكتب ذلك؟

في الطرف الأيمن لدينا $\frac{ءص}{ءس}$.

بمفاضلة هذا مرة أخرى يكون لدينا $\frac{ء}{ءس}\left(\frac{ءص}{ءس}\right)$ والذي يكتب بالصورة $\frac{ء^2ص}{ءس^2}$ أو $د^{//}(س)$ عندما نفاضل الطرف الأيسر مرة أخرى نجد أن: $\frac{ء}{ءس}\left(\frac{ءص}{ءس}\right) = (6س^2 + 5) = 12س$

بوضع الطرفين معاً يكون لدينا $\frac{ء}{ءس}\left(\frac{ءص}{ءس}\right) = \frac{ء}{ءس}(6س^2 + 5)$

أي أن: $\frac{ء^2ص}{ءس^2} = 12س$

هذه النتيجة تسمى المعامل التفاضلي الثاني أو المشتقة الثانية للدالة ، بالمثل وبالتفاضل مرة أخرى، يكون لدينا

$$\frac{ء}{ءس}\left(\frac{ء^2ص}{ءس^2}\right) = \frac{ء}{ءس}(12 س) \quad ، \quad أي \quad \frac{ء^3ص}{ءس^3} = 12$$

هذه هي المشتقة الثالثة للدالة المعطاة، هكذا يمكن أن نرى أن التفاضل التتابعي يعطى $\frac{ء}{ءس}$، $\frac{ء^2ص}{ءس^2}$ و $\frac{ء^3ص}{ءس^3}$ ...

(أو د ، د/، د//، ....) ومشتقات أعلى طالما كان ذلك ممكنا.

3-6 تفاضل حاصل الضرب :

نفرض ص = ز × ف حيث كل من ز ، ف دالة في س.

$\therefore$ ص = ز ف .... (1)

نفرض أن : س تتزايد بكميات صغيرة Δس ، وأن الكميات الصغيرة من ص ، ف ، ز هي: Δ ص، Δ ف ، Δ ز على الترتيب.

$$ص + \Delta ص = (ز + \Delta ز)\ (ف + \Delta\ ف) \quad .... (2)$$

اطرح (1) من (2) $\quad \Delta ص = (ز + \Delta ز)\ (ف + \Delta ف) - ز\ ف$

بالقسمة على Δس

$$\frac{\Delta ص}{\Delta س} = \frac{(ز + \Delta ز)\ (ف + \Delta ف) - ز\ ف}{\Delta س}$$

$$= \frac{زف + \Delta زف + ز\Delta ف + \Delta ز\ \Delta ف - ز\ ف}{\Delta س}$$

$$= ف\ \frac{\Delta ز}{\Delta س} + ز\ \frac{\Delta ف}{\Delta س} + \frac{\Delta ز\ \Delta ف}{\Delta س}$$

عندما Δس $\longleftarrow$ 0، فإن Δف $\longleftarrow$ 0 ، Δ ز $\longleftarrow$ 0،

بأخذ النهايات نجد أن.

$$\underset{\Delta س \leftarrow 0}{نهـــا} \left(\frac{\Delta ص}{\Delta س}\right) = \frac{ءص}{ءس}$$

$$\underset{\Delta س \leftarrow 0}{نهـــا} \left(\frac{\Delta ز}{\Delta س}\right) = \frac{ءز}{ءس}$$

$$\underset{\Delta س \leftarrow 0}{نهـــا} \left(\frac{\Delta ف}{\Delta س}\right) = \frac{ءف}{ءس}$$

الحد الثالث $\quad \frac{\Delta ز \Delta ف}{\Delta س} = (\Delta ز)\ \frac{\Delta ف}{\Delta س}$ أو $\frac{\Delta ز}{\Delta س}\ (\Delta ف)$

$$\underset{\Delta س \leftarrow 0}{نهـــا} \left(\frac{\Delta ز . \Delta ف}{\Delta س}\right) = 0 \times \frac{\Delta ف}{\Delta س} \text{ أو } \frac{\Delta ز}{\Delta س} \times 0$$

في أي الحالتين النهاية تساوي صفرًا.

$$\frac{ءص}{ءس} = ف\ \frac{ءز}{ءس} + ز\ \frac{ءف}{ءس}$$

عمومًا: $\boxed{\frac{ء}{ءس}(ز\ ف) = ف\ \frac{ءز}{ءس} + ز\ \frac{ءف}{ءس}}$ حيث ف ، ز دوال في س.

مشتقة حاصل ضرب دالتين = الثانية × مشتقة الأولى + الأولى × مشتقة الثانية

تسمى هذه قاعدة حاصل الضرب في التفاضل.

مثال 19:

إذا كان ص = $س^3(س + 1)^4$ ، فأوجد $\frac{ءص}{ءس}$

الحل:

نفرض ز = $س^3$ ، ف = $(س + 1)^4$

∴ $\frac{ءز}{ءس} = 3 س^2$ ، $\frac{ءف}{ءس} = 4 (س + 1)^3$

ص = ز ف

$\frac{ءص}{ءس} = ف \frac{ءز}{ءس} + ز \frac{ءف}{ءس}$ (قاعدة حاصل الضرب)

بالتعويض عن ف ، $\frac{ءز}{ءس}$ ، ز ، $\frac{ءف}{ءس}$

$$\frac{ءص}{ءس} = (س + 1)^4 \times (3س^2) + (س^3) \times 4(س + 1)^3$$

$$= س^2(س + 1)^3 [3(س + 1) + 4س]$$

$$= س^2(س + 1)^3 (7 س + 3)$$

$$\therefore \frac{ءص}{ءس} = س^2(س + 1)^3 (7س + 3)$$

تذكر :

إذا كانت ص = $[د(س)]^ن$ ، د(س)

قابلة للتفاضل في مجال تعريفها:

$\frac{ءص}{ءس} = ن [د(س)]^{ن-1} . د'(س)$

بمعنى:

$\frac{ءص}{ءس}$ = تفاضل القوس × تفاضل ما داخل القوس

مثال 20 :

فاضل $(5س + 3) (س^2 - 1)^3$ بالنسبة إلى س .

الحل:

باستخدام قاعدة حاصل الضرب، نجد أن:

$$\frac{ء}{ءس} (5س + 3) (س^2 - 1)^3 = (س^2 - 1)^3 \frac{ء}{ءس} (5س + 3) + (5س + 3) \frac{ء}{ءس} (س^2 - 1)^3$$

$$= (س^2 - 1)^3 \times (5) + (5س + 3) \times 3 (س^2 - 1)^2 (2س)$$

$$= (س^2 - 1)^2 [5(س^2 - 1) + (5س + 3) \times 3 (2س)]$$

$$= (س^2 - 1)^2 [5س^2 - 5 + 30س^2 + 18س]$$

$$= (س^2 - 1)^2 (35س^2 + 18س - 5)$$

$$= (س^2 - 1)^2 (7س + 5) (5س - 1)$$

$$\therefore \frac{ء}{ءس} (5س + 3) (س^2 - 1)^3 = (س^2 - 1)^2 (7س + 5)(5س - 1)$$

مثال 21:

إذا كان $\text{ص} = (\text{س}^2 + \text{س})(\text{س} + 2)^3$ ، فأوجد : $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$

الحل:

$\therefore \text{ص} = (\text{س}^2 + \text{س})(\text{س} + 2)^3$

$\therefore \frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = (\text{س} + 2)^3 \frac{\text{ء}}{\text{ءس}}(\text{س}^2 + \text{س}) + (\text{س}^2 + \text{س}) \frac{\text{ء}}{\text{ءس}}(\text{س} + 2)^3$

$= (\text{س} + 2)^3 \times (2\text{س} + 1) + (\text{س}^2 + \text{س}) \times 3(\text{س} + 2)^2$

$= (\text{س} + 2)^2 [(\text{س} + 2)(2\text{س} + 1) + 3(\text{س}^2 + \text{س})]$

$= (\text{س} + 2)^2 [2\text{س}^2 + 5\text{س} + 2 + 3\text{س}^2 + 3\text{س}]$

$= (\text{س} + 2)^2 (5\text{س}^2 + 8\text{س} + 2)$

$\therefore \frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = (\text{س} + 2)^2 (5\text{س}^2 + 8\text{س} + 2)$

تمرين 3 هـ

1- باستخدام قاعدة الضرب في التفاضل، أوجد المشتقة الأولى لكل مما يأتي:

(أ) $\text{س}^3 (2 + \text{س})^2$ (ب) $(1 - \text{س}^2)(\text{س} + 2)^3$

(جـ) $(\text{س} + 3)^2 (2\text{س} - 1)^3$ (د) $\text{س}^2 (1 - 2\text{س})^{-1}$

(هـ) $\frac{2}{(\text{س} - 1)^4}$ (و) $\sqrt{\text{س}}\,(3\text{س}^2 + 1)^2$

(ز) $(1 - 3\text{س})^2 (1 + \text{س})^{\frac{1}{2}}$

2- فاضل ما يأتي بالنسبة إلى س:

(أ) $(3\text{س}^3 - \frac{9}{2}\text{س})(\frac{3}{2}\text{س})^{-1}$

(ب) $(1 - \text{س})^2 (1 + \text{س} + \text{س}^2)$

(إرشاد: اختصر أولًا)

(جـ) $(3\text{س}^2 + 2\text{س} - 1)^2$ (د) $\frac{2}{\text{س}}(1 - 3\text{س})^3$

7-3 تفاضل خارج القسمة

مقدار مثل $\frac{3س^2 + 2س - 1}{5س - 6}$ هو خارج قسمة. إذا كانت القسمة سهلة وممكنة، يمكن إيجاد المشتقة بعد القسمة.
وإذا كان من غير الممكن أن نقسم بسهولة، توجد طريقة أخرى لإيجاد مشتقة خارج القسمة كما هو موضح فيما يلي:

نفرض ص $= \frac{ز}{ف}$ ◄............ (1)

حيث ز، ف دالتان في س

نفرض س تزيد بمقدار Δ س ، ولنفرض أن الكميات الصغيرة المناظرة من ص ، ز ، ف هي : Δ ص ، Δ ز ، Δ ف على الترتيب.

$\therefore$ ص + Δص $= \frac{ز + \Delta ز}{ف + \Delta ف}$ ◄............ (2)

بطرح (1) من (2) تعطي Δص $= \frac{ز + \Delta ز}{ف + \Delta ف} - \frac{ز}{ف}$

$\Leftarrow$ Δص $= \frac{ز ف + ف\Delta ز - ز ف - ز\Delta ف}{ف\,(ف + \Delta ف)}$

$\Leftarrow$ Δص $= \frac{ف\Delta ز - ز\Delta ف}{ف(ف + \Delta ف)}$ بالقسمة على Δس،

$$\frac{\Delta ص}{\Delta س} = \frac{ف\Delta ز - ز\Delta ف}{ف(ف + \Delta ف)\,\Delta س}$$

$$\frac{\Delta ص}{\Delta س} = \frac{\frac{ف\Delta ز}{\Delta س} - \frac{ز\Delta ف}{\Delta س}}{ف\,(\Delta ف + ف)}$$

عندما Δس ⟵ 0 ، فإن Δ ز ⟵ 0 ، Δ ف ⟵ 0،

$$\lim_{\Delta س \to 0} \left(\frac{\Delta ص}{\Delta س}\right) = \frac{ءص}{ءس}$$

$$\lim_{\Delta س \to 0} \left(\frac{\Delta ز}{\Delta س}\right) = \frac{ءز}{ءس}$$

$$\lim_{\Delta س \to 0} \left(\frac{\Delta ف}{\Delta س}\right) = \frac{ءف}{ءس}$$

$$\frac{ءص}{ءس} = \frac{ف\frac{ءز}{ءس} - ز\frac{ءف}{ءس}}{ف^2}$$

قاعدة خارج القسمة في التفاضل هي:

$$\frac{ء}{ءس}\left(\frac{ز}{ف}\right) = \frac{ف\frac{ءز}{ءس} - ز\frac{ءف}{ءس}}{ف^2}$$

مشتقة خارج قسمة دالتين = $\frac{\text{المقام} \times \text{مشتقة البسط} - \text{البسط} \times \text{مشتقة المقام}}{\text{مربع المقام}}$

مثال 22:

إذاكان $\text{ص} = \frac{\text{س} + 1}{2\text{س} - 1}$ ، فأوجد $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$

الحل:

نفرض: $\text{ز} = \text{س} + 1$، $\text{ف} = 2\text{س} - 1$، $\text{ص} = \frac{\text{ز}}{\text{ف}}$

ثم باستخدام قاعدة خارج القسمة

$$\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \frac{(2\text{س} - 1)\frac{\text{ء}}{\text{ءس}}(\text{س} + 1) - (\text{س} + 1)\frac{\text{ء}}{\text{ءس}}(2\text{س} - 1)}{(2\text{س} - 1)^2}$$

$$= \frac{(2\text{س} - 1)(1) - (\text{س} + 1)(2)}{(2\text{س} - 1)^2}$$

$$= \frac{2\text{س} - 1 - 2\text{س} - 2}{(2\text{س} - 1)^2} = \frac{-3}{(2\text{س} - 1)^2}$$

مثال 23:

فاضل $\frac{(\text{س} - 3)^2}{\text{س}^2 + 1}$، بالنسبة إلى س.

الحـل:

باستخدام قاعدة خارج القسمة،

$$\frac{\text{ء}}{\text{ءس}}\left[\frac{(\text{س} - 3)^2}{\text{س}^2 + 1}\right] = \frac{(\text{س}^2 + 1)\frac{\text{ء}}{\text{ءس}}(\text{س} - 3)^2 - (\text{س} - 3)^2\frac{\text{ء}}{\text{ءس}}(\text{س}^2 + 1)}{(\text{س}^2 + 1)^2}$$

$$= \frac{(\text{س}^2 + 1)(2)(\text{س} - 3)(-1) - (\text{س} - 3)^2(2\text{س})}{(\text{س}^2 + 1)^2}$$

$$= \frac{2(\text{س} - 3)\left[-1 - \text{س}^2 - \text{س}(\text{س} - 3)\right]}{(\text{س}^2 + 1)^2}$$

$$= \frac{2(\text{س} - 3)(-1 - 3\text{س})}{(\text{س}^2 + 1)^2}$$

$$= \frac{2(\text{س} - 3)(1 + 3\text{س})}{(\text{س}^2 + 1)^2}$$

ملحوظة

لكي تفاضل $\frac{4\text{س}^3 + 6\text{س}^2}{2\text{س}}$،
اقسم على 2س. $\text{س} \neq 0$

لذلك $\frac{4\text{س}^3 + 6\text{س}^2}{2\text{س}} = 2\text{س}^2 + 3\text{س}$ ثم فاضل مباشرة لتحصل على $4\text{س} + 3$.

إذن، لا توجد حاجة إلى استخدام قاعدة خارج القسمة في هذه الحالة، الإختصار أولاً أفضل لإيجاد الدالة المشتقة.

تمرين 3-و

1- أوجد المعامل التفاضلي لكل مما يأتي، اختصر وحلل الإجابات كلما كان ذلك ممكنا:

(أ) $\frac{4س + 1}{س - 1}$

(ب) $\frac{3س + 2}{1 - س}$

(جـ) $\frac{1 + س}{1 + س^2}$

(د) $\frac{3س^2}{1 + 2س}$

(هـ) $\frac{1 + 2س}{2 + س^3}$

(و) $\frac{س}{(1 + س)^2}$

2- فاضل كلا مما يأتي إلى س :

(أ) $\frac{\sqrt{س}}{1 + 2س}$

(ب) $\frac{\sqrt{س}}{1 + \sqrt{س}}$

(جـ) $\frac{3س + 2}{\sqrt{س + 1}}$

(د) $\frac{(1 - س)^2}{1 - س^2}$

(هـ) $\frac{\frac{1}{س}}{(1 - س)^2}$

8-3 تفاضل الدوال الضمنية

منذ فترة عندما استخدمنا التفاضل، كان لدينا مقدار في متغير واحد، فمثلاً، مقدار جبري أو معادلة يحوي س، ص ويمكن منها الحصول على ص مباشرة بدلالة س، مثل

ص^2 - س^2 = 1 ومنها ص = ± ($\sqrt{1+\text{س}^2}$)

في مثل هذه الحالات نقول إنه يمكن التعبير عن ص صراحة بدلالة المتغير س.

على كل حال، إذا كان لدينا مثلاً،

س^2 + ص^2 ـ 2 س ص + س ـ 7 ص + 1 = 0

فليس من السهل أن نحصل على ص مباشرة بدلالة س. في هذه الحالة يقال إن ص مقدار ضمني في س.

لكي توجد المعامل التفاضلي $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ ، في هذه الحالة ، نفرض حدًا أو جزءًا من حد في ص كدالة دالة أي دالة في ص التي هي دالة في س. حينئذٍ استخدم قاعدة دالة الدالة في التفاضل، كما هو موضح في الجدول والأمثلة الآتية:

الدالة	تفاضلها
ص	1 × $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$
ص^2	2ص $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$
ص^3	3ص^2 $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$
⋮	⋮
ص^ن	نص$^{ن-1}$ × $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$

مثال 24:

أوجد $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ إذا علم أن: ص^2 - 2 س^2 = 1

الحل:

∵ ص^2 - 2 س^2 = 1

نفاضل كل حد بالنسبة إلى س.

$\frac{\text{ء}}{\text{ءس}}$ (ص^2) ـ 4س = 0

∵ $\frac{\text{ء}}{\text{ءس}}$ (ص^2) = 2ص $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ (باستخدام قاعدة دالة الدالة)

⇐ 2ص $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ ـ 4س = 0

⇐ 2ص $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ = 4س

⇐ $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ = $\frac{\text{4س}}{\text{2ص}}$ = $\frac{\text{2س}}{\text{ص}}$

الطريقة السابقة للتفاضل تعرف بالتفاضل الضمني. الأمثلة الآتية توضح أكثر هذه الطريقة.

مثال 25:

أوجد $\frac{ءص}{ءس}$ ، إذا كان 2 س^2 - 3 ص = ص^2 .

الحـل:

في هذه الحالة، من الأسهل استخدام الطريقة السابقة، أي التفاضل الضمني رغم أن $\frac{ءص}{ءس}$ يمكن الحصول عليها بالتفاضل بعد التعبير عن ص مباشرة بدلالة س.

∵ 2 س^2 - 3 ص = ص^2

بالتفاضل الضمني بالنسبة إلى س

$\frac{ء}{ءس}$(2 س^2) - $\frac{ء}{ءس}$ (3 ص) = $\frac{ء}{ءس}$ (ص^2)

4س - 3 $\frac{ءص}{ءس}$ = 2ص $\frac{ءص}{ءس}$

⟸ 4س = (3 + 2ص) $\frac{ءص}{ءس}$

⟸ $\frac{ءص}{ءس}$ = $\frac{4س}{3 + 2ص}$

مثال 26:

أوجد $\frac{ءص}{ءس}$ إذا كان 2 س ص - ص^3 = س^2

الحـل:

∵ 2 س ص - ص^3 = س^2

نفاضل ضمنيًّا بالنسبة إلى س.

$\frac{ءص}{ءس}$(2 س ص) - $\frac{ء}{ءس}$ (ص^3) = $\frac{ء}{ءس}$ (س^2) .... (1)

بتفاضل حاصل الضرب 2س ص

$\frac{ء}{ءس}$(2 س ص) = ص $\frac{ء}{ءس}$(2 س) + (2 س)$\frac{ءص}{ءس}$ = 2ص + 2س $\frac{ءص}{ءس}$ .... (2)

من (1) ، (2)

2ص + 2س $\frac{ءص}{ءس}$ - 3ص^2 $\frac{ءص}{ءس}$ = 2 س

(2س - 3ص^2) $\frac{ءص}{ءس}$ = 2 س - 2 ص

$\frac{ءص}{ءس}$ = $\frac{2(س - ص)}{2س - 3ص^2}$

مثال 27:

إذا كان $\text{س}^2 - \text{ص}^2 - \text{ص} + 2 = 0$، فأوجد قيمة $\text{ص}''$ عندما $\text{ص}' = 0$.

الحـل:

$\because \text{س}^2 - \text{ص}^2 - \text{ص} + 2 = 0 \Leftarrow$ بالتفاضل ضمنيًّا بالنسبة إلى س.

$\Leftarrow 2\,\text{س} - 2\,\text{ص}\,\text{ص}' - \text{ص}' = 0 \cdots\cdots\cdots\cdots \quad (1)$

فاضل (1) ضمنيًّا بالنسبة إلى س

$\Leftarrow 2 - 2\,(\text{ص}' \times \text{ص}')\,(2\,\text{ص}) + 2\,\text{ص}\,\text{ص}'')\, - \text{ص}'' = 0$

$2 - (\,2\,\text{ص}\,(\text{ص}')^2 + 2\,\text{ص}\,\text{ص}''\,) - \text{ص}'' = 0 \cdots\cdots\cdots\cdots \quad (2)$

$\Leftarrow$ عندما $\text{ص}' = 0$ تصبح المعادلة (2) لأتي:

$2 - 2\,\text{ص}\,\text{ص}'' - \text{ص}'' = 0$

$2 = (1 + 2\text{ص})\,\text{ص}''$

$\text{ص}'' = \dfrac{2}{1 + 2\text{ص}} \cdots\cdots\cdots\cdots \quad (3)$

$\Leftarrow$ عندما $\text{ص}' = 0$ ، في (2) إذن $\text{س} = 0$

عوض عن $\text{س} = 0$ في $\text{س}^2 - \text{ص}^2 - \text{ص} + 2 = 0$

$\text{ص}^2 - \text{ص} + 2 = 0$

$(\text{ص} + 2)\,(\text{ص} - 1) = 0$

$\text{ص} = -2$ أو 1

إذن عندما $\text{ص}' = 0$ ، $\text{س} = -2$ أو 1

من المعادلة: $\text{ص}'' = -\dfrac{2}{3}$ ، $\dfrac{2}{3}$

مثال 28:

إذا كانت $\text{س}^2 + \text{ص}^2 = 25$،

فأثبت أن: $1 + \text{ص}\,\text{ص}'' + (\text{ص}')^2 = 0$ ومن ذلك أثبت أن: $\text{ص}'' = \dfrac{-25}{\text{ص}^3}$.

الحـل:

$2\,\text{س} + 2\,\text{ص}\text{ص}' = 0 \Leftarrow \text{س} + \text{ص}\text{ص}' = 0$

$\dfrac{\text{ءص}}{\text{ءس}}(\text{س} + \text{ص}\text{ص}') = 0 \Leftarrow 1 + \text{ص}\,\text{ص}'' + (\text{ص}')^2 = 0$

$\text{ص}'\text{ص}'' = -(1 + \dfrac{\text{س}^2}{\text{ص}^2}) \Leftarrow \text{ص}'\text{ص}'' = -(\dfrac{\text{س}^2 + \text{ص}^2}{\text{ص}^2})$

نصل إلى أن: $\text{ص}'' = -\dfrac{1}{\text{ص}^3}\,(\text{س}^2 + \text{ص}^2) \therefore \text{ص}'' = \dfrac{-25}{\text{ص}^3}$

مثال 29:

إذا كانت : $ص^{م} = (1 + س)^{ن}$ أثبت ان : $(1 + س) \frac{ءص}{ءس} = \frac{ن}{م}$ ص

الحل:

$م\, ص^{م-1}\, ص' = ن\,(1 + س)^{ن-1}$ ⇐

$$\frac{م\, ص^{م}\, ص'}{ص} = \frac{ن\,(1+س)^{ن}}{(1+س)}$$

$$\therefore \frac{م\, ص'}{ص} = \frac{ن}{(1+س)}$$

$$\therefore (1 + س)\, ص' = \frac{ن}{م}\, ص$$

مثال 30:

إذا كان $س^{2} ص^{3} = (س+ص)^{5}$ ، $س \neq 1$ أثبت أن:

(أ) $\frac{ءص}{ءس} = \frac{ص}{س}$ (ب) $\frac{ء^{2}ص}{ءس^{2}} = 0$ ، حيث س، ص > 0

الحل:

(أ) $س^{2} \times 3\, ص^{2}\, ص' + ص^{3} \times 2\, س = 5\,(س+ص)^{4}\,(1+ص')$

بضرب الطرفين في (س+ص)

$3\, س^{2}\, ص^{2}\,(س+ص)\, ص' + 2\, س\, ص^{3}\,(س+ص) = 5\,(س+ص)^{5}\,(1+ص')$

بقسمة على $س\, ص^{2}$

$3\, س^{2}\, ص' + 3\, س\, ص\, ص' + 2\, س\, ص + 2\, ص^{2} = 5\, س\, ص + 5\, س\, ص\, ص'$

$3\, س^{2}\, ص' - 5\, س\, ص\, ص' + 3\, س\, ص\, ص' = 5\, س\, ص - 2\, س\, ص - 2\, ص^{2}$

$س\, ص'\,(3\, س - 2\, ص) = ص\,(3\, س - 2\, ص)$

$س\, ص' = ص$ ، $\therefore ص' = \frac{ص}{س}$

(ب) $ص'' = \frac{س\, ص' - ص\,(1)}{س^{2}}$ $\therefore ص'' = \frac{1}{س^{2}} \left(س \times \frac{ص}{س} - ص\right)$

$ص'' = \frac{1}{س^{2}}\,(ص - ص)$ $\therefore ص'' = \frac{1}{س^{2}}\,(0)$

$ص'' = 0$

مثال 31:

إذا كان س ص = 1 ، س $\neq$ 1 فأوجد: $\frac{\text{ءص}^2}{\text{ءس}^2} \times \frac{\text{ءس}^2}{\text{ءص}^2}$

بالتفاضل بالنسبة لـ س $\Leftarrow$ س $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ + ص = 0

$\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \frac{-\text{ص}}{\text{س}}$ ، $\therefore$ $\frac{\text{ءص}^2}{\text{ءس}^2} = \frac{2\text{ص}}{\text{س}^2}$

بالتفاضل بالنسبة لـ ص $\Leftarrow$ س + ص $\frac{\text{ءس}}{\text{ءص}}$ = 0 ، $\therefore$ $\frac{\text{ءس}}{\text{ءص}} = \frac{-\text{س}}{\text{ص}}$

$\therefore$ $\frac{\text{ءس}^2}{\text{ءص}^2} = \frac{2\text{س}}{\text{ص}^2}$

من (1) (2) نجد أن: $\frac{\text{ءص}^2}{\text{ءس}^2} \times \frac{\text{ءس}^2}{\text{ءص}^2} = \frac{2\text{ص}}{\text{س}^2} \times \frac{2\text{س}}{\text{ص}^2} = \frac{1}{\text{س ص}} = 4$

تمرين 3-3

(1) أوجد $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ لكل مما يأتي:

(أ) $\text{س}^2 - \text{ص}^2 = 2$

(ب) $\text{ص}^2 = \text{س}^2 - 2\text{س}$

(جـ) $\frac{1}{\text{س}} - \frac{1}{\text{ص}} = 1$

(د) $\sqrt{\text{س}} - \sqrt{\text{ص}} = 1$

(هـ) $2\text{س}^2 - \text{س ص} + \text{ص}^2 + 3\text{ص} - 2 = 0$

(2) إذا كان $\text{س}^2 - \text{ص}^2 + 10\text{س} - 5\text{ص} + 19 = 0$ ، فأوجد $\frac{\text{ءص}^2}{\text{ءس}^2}$ عندما $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = 0$.

3-5 ميل المنحنى:

ميل منحنى عند نقطة معلومة عليه، هو ميل المماس عند تلك النقطة.

إذا كان ص = د(س) يمثل معادلة منحنى، إذن $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ هو دالة ميل المنحنى. الميل عند نقطة معينة يمكن إيجاده بالتعويض عن قيمة س المناسبة في دالة الميل.

نفرض ميل المنحنى عند النقطة (س، ص) يساوي م، إذن ميل المماس عند هذه النقطة يساوي م.

مثال 32:

أوجد معادلتي المماس والعمودي للمنحنى ص = $4\text{س}^2 + 2\text{س} - 1$ عند النقطة حيث س = $\frac{1}{2}$.

الحل:

عندما س = $\frac{1}{2}$ ، ص = $4(\frac{1}{2})^2 + 2(\frac{1}{2}) - 1$

= 1

النقطة على المنحنى حيث س = $\frac{1}{2}$ هي $(\frac{1}{2} ، 1)$

$\therefore$ ص = $4\text{س}^2 + 2\text{س} - 1$

$\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = 8\text{س} + 2$

عند $(\frac{1}{2} ، 1)$، $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = 8\,(\frac{1}{2}) + 2 = 6$

أي أن ميل المماس عند $(\frac{1}{2} ، 1)$ يساوي 6.

باستخدام الصيغة الرياضية لمعادلة مستقيم بمعلومية ميله ونقطة عليه:

$$ص - ص_1 = م\,(س - س_1)$$

معادلة المماس المطلوبة هي $ص - 1 = 6\,(س - \frac{1}{2})$.

$\Leftarrow$ $ص - 1 = 6\,س - 3$

$\Leftarrow$ $6\,س - ص - 2 = 0$

ميل العمودي يساوي $- \frac{1}{6}$.

$\therefore$ معادلة العمودي هي: $ص - 1 = -\frac{1}{6}\,(س - \frac{1}{2})$

$ص - 1 = -\frac{1}{6}س + \frac{1}{2}$

$12ص - 12 = -2س + 1$

$2س + 12ص - 13 = 0$

مثال 33:

المنحنى $ص = س^2 - 3س + 3$ ميله -1 عند نقطة معينة عليه. أوجد إحداثيات هذه النقطة.

الحل:

$\because$ $ص = س^2 - 3س + 3$ .... (1)

$\frac{ءص}{ءس} = 2س - 3$

نفرض $2س - 3 = -1$ عند النقطة (س ، ص)

$\Leftarrow$ $2س = 2$

$\Leftarrow$ $س = 1$

بالتعويض عن $س = 1$ في المعادلة (1)

نجد أن $ص = 1 - 3\,(1) + 3$

$\Leftarrow$ $= 1$

$\therefore$ النقطة المطلوبة (1، 1)

مثال 34:

النقطتان أ (1 ، 2)، ب (7 ، 14) تقعان على منحنى معادلته ص = س^2 - 6س + 7،

ق نقطة على المنحنى بحيث المماس عند ق يوازي أ ب. أوجد:

(أ) إحداثيا ق **(ب) معادلة العمودي عند ق**

العمودي عند ق يقطع المنحنى مرة أخرى عند ط. أوجد إحداثيات ط.

الحل:

(أ) ميل المنحنى عند ق = ميل أ ب

$$= \frac{14-2}{7-1} = \frac{12}{6} = 2$$

ص = س^2 - 6س + 7

$\frac{ءص}{ءس} = $ 2س - 6،

عندما: $\frac{ءص}{ءس} = 2$،

2س − 6 = 2 حيث أن س = 4

ص = 4^2 − 6 (4) + 7

= −1

$\therefore$ ق = (4، −1)

(ب) العمودي عند ق ميله $-\frac{1}{2}$

$\therefore$ معادلته: ص = $-\frac{1}{2}$ س + جـ

المستقيم يمر بالنقطة ق = (4 ، −1)

−1 = $-\frac{1}{2}$ (4) + جـ

جـ = −1 + 2 = 1

$\therefore$ معادلة العمودي عند ق هي: ص = $-\frac{1}{2}$ س + 1

لإيجاد إحداثيات ط، نحل المعادلتين ص = س^2 - 6 س + 7 ، ص = $-\frac{1}{2}$س + 1 معًا.

س^2 - 6 س + 7 = $-\frac{1}{2}$ س + 1

$\Leftarrow$ 2س^2 - 12 س + س + 14 - 2 = 0

$\Leftarrow$ 2س^2 - 11س + 12 = 0

$\Leftarrow$ (2س - 3) (س - 4) = 0

س = $\frac{3}{2}$ أو 4 (هي نفسها عند ق)

$\therefore$ ص = $-\frac{1}{2}$ ($\frac{3}{2}$) + 1 = $\frac{1}{4}$

$\therefore$ ط = ($1\frac{1}{2}$، $\frac{1}{4}$)

مثال 35:

إذا كان المستقيم 3س – 2ص = ك يمس المنحنى $ص^2 = 4$ س أوجد نقطة التماس، ثم أوجد قيمة ك ؟

∵ $ص^2 = 4$ س ∴ $ص^/ = \frac{ءص}{ءس} = \frac{2}{ص}$

ميل المماس للمنحنى $ص^2 = 4$ س عند النقطة (س، ص) $= \frac{2}{ص}$

∵ ميل المستقيم 3س – 2ص = ك يساوي $\frac{3}{2}$ طالما المستقيم يمس المنحنى.

∴ $\frac{2}{ص} = \frac{3}{2}$ ومنها ص $= \frac{4}{3}$ وعليه قيمة س $= \frac{4}{9}$

∵ $(\frac{4}{9} ، \frac{4}{3}) \in$ 3س – 2ص = ك ، فهي تحقق المعادلة

$3 \times \frac{4}{9} - 2 \times \frac{4}{3} =$ ك ، ∴ قيمة ك $= -\frac{4}{3}$

مثال 36:

أوجد معادلة العمود على المنحنى $(س + ص)^2$ + س ص = 5 ، عند النقطة (1 ، 1) الواقعة عليه، أثبت أن يمر بنقطة الأصل.

2(س + ص) . (1 + $ص^/$) + س $ص^/$ + ص = 5 ومنها،

$\frac{ءص}{ءس} = \frac{-2س - 3ص}{3س + 2ص}$ ∴ م $= (\frac{ءص}{ءس}) = -1$ ، $م_{العمودية} = 1$

بالتعويض في معادلة العمود: ص – $ص_1 = -\frac{1}{م}$(س – $س_1$)

حيث ($س_1$ ، $ص_1$) = (1 ، 1)،

ص – 1 = (س – 1) ، ∴ ص = س معادلة تمر بنقطة الأصل

تمرين 3-ي

(1) أوجد ميل ومعادلة المماس لكل من المنحنيات الآتية عند النقطة المعطاة:

(أ) ص = $س^2$ - س - 1 ، س = 1 (ب) ص = $\frac{3}{2}$ $س^2$ - 4س + 3 ، س = 2

(جـ) ص = 3س + $\frac{4}{س}$، س = -2

(2) أوجد إحداثيات النقط على المنحنى ص ^{3} - $\frac{9}{2}$ س ^{2} + 6 س - 2 حيث يوازي المماس محور السينات.

(3) إذا كان ميل المنحنى ص= 4س ^{3} -س ^{2}+س عند النقطة (أ ، ب) يساوي 3، فأوجد قيمة كل من أ ، ب.

(4) أوجد ميل المنحنى ص = س (س - 2)^2 + 3 عند النقطة (3، 2). أوجد أيضًا إحداثيات النقط على المنحنى التي الميل عندها يساوي -1.

(5) المنحنى ص = س (س - 1) (س - 2) يقطع محور السينات في ثلاث نقط. أوجد إحداثيات هذه النقط. واثبت أن الميل عند نقطتين من هذه النقط متساوٍ . أوجد معادلة المماس لهذا المنحنى عند النقطة حيث س = 0.

(6) المنحنى ص = أ س ^{3} + ب س ^{2} + جـ يمر بالنقط (-1، 0)، (0، 5) والمماس للمنحنى يوازي المحور س عند النقط التي لها س = 0 ، س = 1. احسب قيمة كل من أ ، ب ، جـ وارسم شكلًا تخطيطيًا للمنحنى.

(7) ق هي النقطة (4، 7) على المنحنى ص = س ^{2} - 6 س + 15.

أوجد ميل المنحنى عند ق، معادلة المماس عند هذه النقطة. المماس عند نقطة أخرى ط عمودي على المماس عند ق. احسب الإحداثي السيني للنقطة ط.

(8) أوجد ميل المنحنى = (3 - س ^{2})^5 ص عند النقطة التي عندها س = 2. من ثم أوجد معادلة المماس للمنحنى عند هذه النقطة.

(9) إذا كان ص = 4س + $\frac{1}{س}$، فأوجد النقط على المنحنى حيث المماسات توازي محور السينات.

(10) النقطة (ق، ط) على المنحنى ص ^{2} = 4س + 5 فوق محور السينات بحيث يكون الميل عند (ق، ط) يساوي $\frac{2}{3}$. أوجد:

(أ) قيمة كل من ق، ط (ب) معادلة المماس للمنحنى عند (ق، ط)

(جـ) نقطة تقاطع هذا المماس مع محور الصادات.

أسئلة للمراجعة:

1- اذكر الصواب أو الخطأ مع ذكر سبب الإجابة:

(أ) الدالة ص = د ذ(س)، هي نفسها الدالة ص = د(س) ذ(س).

(ب) لا يمكن استخدام قاعدة حاصل الضرب إذا كان العامل في حاصل ضرب الدوال مقدارًا ثابتًا.

(جـ) يمكن دائمًا استخدام قاعدة حاصل الضرب في جميع الحالات التي تستخدم فيها قاعدة خارج القسمة.

(د) تدلنا المشتقة الثانية للدالة على الشكل البياني لمنحنيات الدوال.

(هـ) ءص/ءس و $(\text{ءص}/\text{ءس})^2$ لهما نفس المعنى.

2- نفرض المعادلة س^2 + ص^2 + 4 = 0

بالتفاضل الضمني بالنسبة إلى س،

2س + 2ص ءص/ءس = 0

أو ءص/ءس = − س/ص

هل يوجد هنا خطأ؟

3- إذا كان ف(س) = د(س) ذ(س) هـ(س) ، حيث د ، ذ ، هـ ، دوال قابلة للتفاضل،

فاثبت أن ف′ = د′.ذ.هـ + د .ذ′.هـ + د.ذ.هـ′ .

تعتمد النتيجة على عدة عوامل.

4- أوجد مشتقة $\frac{\text{د(س)ذ(س)}}{\text{د(س) + ذ(س)}}$ حيث د، ذ دوال قابلة للتفاضل.

5- أوجد مقدارًا جبريًّا مشتقته مبينة فيما يلي:

(مثال، إذا ظهر د′.ذ + د.ذ′ ، فإن د.ذ تكون الإجابة)

(أ) (____)′ = د′ − 2ذ.ذ′

(ب) (____)′ = د′ + ذ′

(جـ) (____)′ = (د′.ذ − د.ذ′) / ذ^2

(د) (____)′ = د′/ذ − د.ذ′/ذ^2

(هـ) (____)′ = 10د^4. د′

6- أعطِ مثالًا لـ: د(س) ذ (س) تثبت عدم صحة العلاقة (د.ذ)′ = د′ .ذ′

ملحوظة:
الرموز السابقة تدل على حاصل ضرب وليس تركيب دوال. مثلا:
د^2 = د(س) د(س)، د ذ(س) = د(س) ذ(س).

تمرين 3-ح

(1) إذا كان $ص = \frac{1}{س}$، فاثبت أن:

$$ص + \frac{ء^2ص}{ءس^2} = ص^3(س^2+2)$$

(2) إذا كان $ص = \frac{س}{س+1}$، فأوجد:

(أ) $\frac{ءص}{ءس}$ (ب) $\frac{ء^2ص}{ءس^2}$

ومن ثم اثبت أن:

$$ص + \frac{ءص}{ءس} = -\frac{1}{2}(س^2+س+1)(1+س)$$

(3) أوجد $\frac{ءص}{ءس}$ في الآتي:

(أ) $2س^2ص^3 + 2س + 3 = 0$

(ب) $ص^3 = 3(س - 2)$

(4) إذا كان $س^2 - 2ص^2 + 6س - 3ص + 18 = 0$

فأوجد قيم $\frac{ء^2ص}{ءس^2}$ عندما $\frac{ءص}{ءس} = 0$

(5) أوجد معادلة المماس للمنحني:

$$ص = س^2\sqrt{8 - 2س}$$

عند النقطة $(2 ، 8)$

(6) (أ) فاضل بالنسبة إلى س:

(1) $\sqrt{1+س^2}$ (2) $س(1+3س)^5$

(ب) اثبت أن مماسات المنحنى

$$ص^2 = 2ص + 8س - 17$$

عند النقط التي فيها $س = 4$ متعامدة.

(7) (أ) إذا كان $س ص^3 + ص = س^3$، فأوجد $\frac{ءص}{ءس}$ بدلالة س، ص.

(ب) إذا كان $ص = \frac{\sqrt{س}}{س-2}$، فاثبت أن:

$$\frac{ءص}{ءس} = \frac{س+2}{2\sqrt{س}(س-2)^2}$$

ومن ثم أوجد معادلة العمودي للمنحنى

$ص = \frac{\sqrt{س}}{س-2}$، عند نقطة على المنحنى حيث: $س = 4$.

(8) (أ) فاضل المقادير الآتية بالنسبة إلى س

(1) $\frac{2س+3}{س-4}$ (2) $\sqrt{12 - 3س^2}$

(ب) أوجد ميل المنحنى

$$(س-2)^2 = 3ص^2 + 2ص$$

عند النقطة $(6 ، 2)$.

(9) النقطة ق $(2، 6)$ تقع على المنحنى

$س ص - ص^2 + 12س = 0$. أوجد:

(أ) ميل المنحنى عند ق،

(ب) قياس زاوية ميل المماس للمنحنى مع محور السينات عند ق.

4 تطبيقات على التفاضل
Application of Differentiation

تطبيقات على التفاضل

Application of Differentiation

4-1 معدل التغير

$\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ هو معدل تغير ص بالنسبة إلى س. لذلك، $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = 3$ يعني تزايد ص بمقدار 3 وحدات لكل زيادة مقدارها 1 وحدة من س. بالمثل، إذا كان أ مترًا مربعًا تمثل مساحة ، ن ثانية تمثل فترة زمنية بعد زمن معين معلوم، إذن $\frac{\text{ءأ}}{\text{ءن}} = 2$ يعني أن المساحة تتزايد بمعدل 2م²/ث.

إذا كان $\frac{\text{ءأ}}{\text{ءن}}$ سالبًا ، مثل $\frac{\text{ءأ}}{\text{ءن}} = -1.5$ م^2/ث فهذا يشير إلى معدل تناقص المساحة هـذا المعنى لـ $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ جنبًا إلى جنب مع قاعدة دالة الدالة: $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \frac{\text{ءص}}{\text{ءن}} \times \frac{\text{ءن}}{\text{ءس}}$ يعطي طريقة لربط معدلات التغير.

مثال 1:

يزداد طول نصف قطر بالون كروي بمعدل 1 سم / ث. أوجد معدل تغير:

(أ) الحجم (ب) مساحة السطح.

البالون عندما يكون طول نصف القطر 5 سم.

الحـل:

(أ) نفرض طول نصف قطر البالون نق سم بعد زمن قدره ن ثانية، إذن الحجم ح سم^3 بعد زمن ت ثانية يعطى بالعلاقة $\text{ح} = \frac{4}{3}\pi\,\text{نق}^3$ ويرمز لمساحة سطحه م سم^2 بعد زمن ثانية يعطى بالعلاقة، $\text{م} = 4\pi\,\text{نق}^2$ ، طول نصف القطر يتزايد بمقدار 1 سم/ث وهو معدل تغير طول نصف القطر، $\frac{\text{ءنق}}{\text{ءن}} = 1$ سم/ث.

$$\text{ح} = \frac{4}{3}\pi\,\text{نق}^3$$

فإن $$\frac{\text{ءح}}{\text{ءنق}} = 4\pi\,\text{نق}^2$$

$$\frac{\text{ءح}}{\text{ءن}} = \frac{\text{ءح}}{\text{ءنق}} \times \frac{\text{ءنق}}{\text{ءن}}$$ (قاعدة دالة الدالة)

عندما نق = 5، $\frac{\text{ءح}}{\text{ءن}} = 4\pi(5)^2(1) = 100\pi$ سم^3/ث

أي أن الحجم يتزايد بمقدار 100π سم^3/ث عندما يكون طول نصف قطر البالون 5 سم.

(ب) $\text{م} = 4\pi\,\text{نق}^2$

$$\frac{\text{ءم}}{\text{ءنق}} = 8\pi\,\text{نق}$$

باستخدام قاعدة دالة الدالة مرة أخرى...

$$\frac{\text{ءم}}{\text{ءن}} = \frac{\text{ءم}}{\text{ءنق}} \times \frac{\text{ءنق}}{\text{ءن}}$$

عندما نق = 5 $\quad \frac{\text{ءم}}{\text{ءن}} = 8\,(5)\,\pi\,(1) = 40 \times \pi$ سم^2/ث

تزداد مساحة سطح البالون بمعدل 40 π سم^2/ث عندما يكون طول نصف قطره 5 سم.

مثال 2:

صب ماء في مخروط دائري مقلوب طول نصف قطر قاعدته 5 سم وارتفاعه 15 سم بمعدل 10 سم^3 / ث احسب :

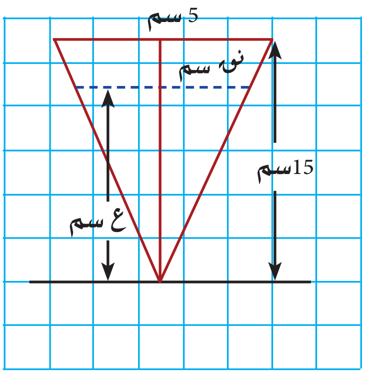
(أ) معدل زيادة ارتفاع سطح الماء، عندما يكون ارتفاع سطح الماء 4سم،

(ب) معدل زيادة مساحة سطح الماء، عندما يكون سطح الماء على ارتفاع 4سم.

(اترك الإجابات بدلالة π حيثما أمكن)

الحل:

(أ) نفرض ارتفاع سطح الماء ع سم بعد زمن قدره ن ثانية، وأن طول نصف قطر سطح الماء نق سم في هذه الفترة الزمنية في شكل 1-4 مقطع للمخروط.



شكل 1-4

بأخذ مثلثين متشابهين، $\quad \frac{\text{نق}}{\text{ع}} = \frac{5}{15}$

$$\text{نق} = \frac{\text{ع}}{3}$$

نفرض حجم الماء ح:

$$\text{ح} = \frac{1}{3}\,\pi\,\text{نق}^2\,\text{ع}$$

$$\text{ح} = \frac{1}{3}\,\pi\left(\frac{\text{ع}}{3}\right)^2 \text{ع}$$

ضع $\text{نق} = \frac{\text{ع}}{3}$

$$\text{ح} = \frac{\pi\,\text{ع}^3}{27}$$

$$\frac{\text{ءح}}{\text{ءع}} = \frac{\pi\,\text{ع}^2}{9}$$

$$\frac{\text{ءح}}{\text{ءن}} = \frac{\text{ءح}}{\text{ءع}} \times \frac{\text{ءع}}{\text{ءن}}$$

$\frac{\text{دع}}{\text{دن}} = 10$ سم^3/ ث ، ع = 4 ، $10 = \frac{\pi 4^2}{9} \times \frac{\text{دع}}{\text{دن}}$

$\frac{\text{دع}}{\text{دن}} = \frac{10}{1} \times \frac{9}{\pi 4^2} = \frac{45}{8\pi}$ سم/ث.

عند الارتفاع 4 سم يكون معدل تغير الارتفاع يساوي $\frac{45}{8\pi}$ سم/ث.

(ب) سطح الماء دائري، إذن مساحة السطح م = π نق^2 (في أية لحظة)

ضع نق = $\frac{\text{ع}}{3}$ ⟵ م = $\frac{\pi \text{ع}^2}{9}$

$\frac{\text{دم}}{\text{دع}} = \frac{2\pi \text{ ع}}{9}$

$\frac{\text{دم}}{\text{دن}} = \frac{\text{دم}}{\text{دع}} \times \frac{\text{دع}}{\text{دن}}$

عوض عن ع = 4 ، $\frac{\text{دع}}{\text{دن}} = \frac{45}{8\pi}$ ، نجد أن $\frac{\text{دم}}{\text{دن}} = \frac{2\pi \ (4)}{9} \times \frac{45}{8\pi}$

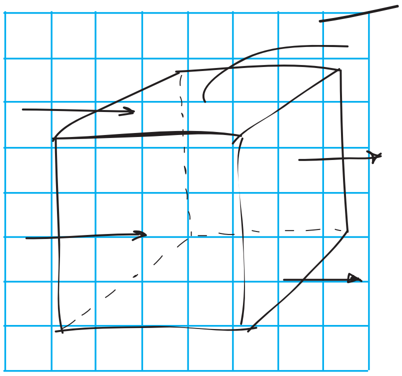
$\frac{\text{دم}}{\text{دع}} = 5$ سم^2 /ث

أي أن مساحة سطح الماء تتزايد بمعدل 5 سم^2/ث عندما يكون ارتفاع سطح الماء 4 سم.

مثال 3:

يتناقص طول ضلع مكعب طوله ل سم بمعدل 0.01 سم كل دقيقة.

أوجد معدل تغير الحجم، ح سم^3، عندما يكون طول كل ضلع 10 سم.



الحل:

معدل تغير ل يساوي − 0.01 سم/ق

أي أن $\frac{\text{دل}}{\text{دن}} = -0.01$ (القيمة السالبة ترمز للتناقص)

حجم المكعب ح:

ح = ل^3

⟸ $\frac{\text{دح}}{\text{دن}} = 3$ل^2

⟸ $\frac{\text{دح}}{\text{دن}} = \frac{\text{دح}}{\text{دل}} \times \frac{\text{دل}}{\text{دن}}$

عوض عن ل = 10 ، $\frac{\text{دل}}{\text{دن}} = -0.01$

نجد أن $\frac{\text{دح}}{\text{دن}} = 3(10)^2 \times (-0.01)$

= − 3 سم^3/ق

الحجم يتناقص بمعدل 3 سم^3/ق عندما يكون طول كل ضلع 10 سم.

تمرين 4-أ

(أترك الاجابات بدلالة π ما أمكن)

(1) يزداد طول ضلع مكعب بمعدل 2 سم/ث. أوجد معدل زيادة الحجم عندما يكون طول كل ضلع 8 سم.

(2) يتزايد طول نصف قطر دائرة بمعدل 2 سم/ث. أوجد معدل الزيادة في

(أ) المحيط (ب) المساحة

عندما يكون طول نصف القطر 10 سم.

(3) يتزايد حجم بالون كروي بمعدل 100 سم^3/ث. أوجد معدل تغير طول نصف القطر عندما يكون طول نصف القطر 5 سم. (حجم الكرة ح حيث ح = $\frac{4}{3}$ π نق^3).

(4) تتناقص مساحة سطح كرة بمعدل 20 سم^2/ث عندما يكون طول نصف القطر 15 سم. احسب معدل تغير:

(أ) طول نصف القطر (ب) الحجم في هذه اللحظة

(مساحة سطح الكرة م حيث م = 4 π نق^2)

(5) طول مستطيل يساوي دائمًا 4 أمثال عرضه. إذا تزايد العرض بمعدل 0.5 سم/ث، فأوجد معدل زيادة المساحة عندما يكون العرض 10 سم.

(6) صب رمل على أرض أفقية بمعدل 4 سم^3/ث وكون كومة على شكل مخروط دائري قائم ارتفاعه ثلاثة أرباع طول نصف قطر دائرته. احسب معدل تغير طول نصف القطر عندما يكون طول نصف القطر 4 سم.

4-2 القيم التقريبية:

نعلم أن : $\lim\limits_{\Delta س \to 0} \left(\frac{\Delta ص}{\Delta س}\right) = \frac{ءص}{ءس}$

ويتبع ذلك أنه، عندما تكون Δص، Δس كميات متناهية في الصغر،

$$\frac{\Delta ص}{\Delta س} \approx \frac{ءص}{ءس}$$

تستخدم هذه النتيجة في إيجاد الزيادة الصغيرة Δص في ص، عندما تزداد س بكمية صغيرة، Δس (عندما $\frac{ءص}{ءس}$ يكون أيضًا معلومًا).

التقريب $\frac{\Delta ص}{\Delta س} \approx \frac{ءص}{ءس}$ يكون أكثر دقة كلما أصبحت Δس أكثر صغرًا. أيضًا من الممكن إيجاد الزيادة الصغيرة Δس في س عندما Δص تكون معلومة.

مثال 4:

إذا كان ص = $\sqrt{س}$ ، فأوجد الزيادة التقريبية في ص إذا زادت س من 4.0 إلى 4.01

الحل:

الزيادة في س، Δس = 0.01 عندما س = 0.4

ص = $\sqrt{س}$ = س$^{\frac{1}{2}}$

$\Leftarrow$ $\frac{ءص}{ءس} = \frac{1}{2}$ س$^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{س}}$ لقيم Δس الصغيرة، $\frac{\Delta ص}{\Delta س} \approx \frac{ءص}{ءس}$

عوض عن س = 4، Δس = 0.01، Δص $\approx \frac{ءص}{ءس} \times \Delta$س

Δص $\approx \frac{1}{2\sqrt{4}} \times 0.01 = 0.0025$

$\therefore$ الزيادة التقريبية في ص هي 0.0025.

مثال 5:

إذا زاد طول نصف قطر دائرة من 5 سم إلى 5.01 سم، فأوجد الزيادة التقريبية في المساحة.

الحل:

الزيادة في طول نصف القطر، Δنق $= 0.01$ عندما نق $= 5$

مساحة الدائرة ⇦ م = π نق^2

$$\frac{\text{ءم}}{\text{ءنق}} = \pi\ 2\ \text{نق}$$

لقيمة Δنق الصغيرة ⇦ $\frac{\Delta \text{م}}{\Delta \text{نق}} \approx \frac{\text{ءم}}{\text{ءنق}}$

$$\Delta \text{م} \approx \frac{\text{ءم}}{\text{ءنق}} \times \Delta \text{نق}$$

عوض عن نق = 5 ، Δنق $=0.01$، Δم $= 2\ (0.01) \times (5)\ \pi)$

$$\approx 0.1\ \pi$$

∴ الزيادة التقريبية في المساحة تساوي $0.1\ \pi$ سم^2.

مثال 6:

أوجد التغير التقريبي في ص، حيث ص $= \frac{2}{3}$ س^3 + 1، عندما تتناقص س من 5 إلى 4.99

الحل:

الزيادة في س، Δس $= -0.01$ عندما س = 5 (زيادة سالبة تساوي تناقص)

$$\text{ص} = \frac{2}{3}\ \text{س}^3 + 1$$

⇦ $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = 2\text{س}^2$

لقيم Δس الصغيرة $\frac{\Delta \text{ص}}{\Delta \text{س}} \approx \frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$

⇦ $\Delta \text{ص} \approx \frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} \times \Delta \text{س}$

عوض عن س = 5 ، Δس $= -0.01$، Δص $\approx 2(5)^2 \times (-0.01)$

⇦ Δس ≈ -0.5

التغير التقريبي في ص يساوي -0.5 (أي أن ص تتناقص تقريبًا بمقدار 0.5).

مثال 7:

مساحة سطح كرة، م = 4 π نق^2 وحجمها ع = $\frac{4}{3}$ π نق^3 حيث نق سم طول نصف القطر.

عندما كان طول نصف القطر 5 سم، زاد بمقدار 2 %

أوجد النسبة المئوية التقريبية للزيادة في:

(أ) مساحة السطح. (ب) الحجم.

الحل:

النسبة المئوية للزيادة في طول نصف القطر 2 %

$\because$ الزيادة الحقيقية لطول نصف القطر هي $\frac{2\text{نق}}{100}$ سم

(أ) الزيادة في طول نصف القطر Δنق = $\frac{2\text{نق}}{100}$ ، عندما يكون طول نصف القطر، نق = 5 سم.

نفرض المساحة م = 4π نق^2

$\frac{\text{ءم}}{\text{ءنق}} = \pi 8$ نق

لجميع القيم Δنق الصغيرة $\frac{\Delta\text{م}}{\Delta\text{نق}} \approx \frac{\text{ءم}}{\text{ءنق}}$

Δم $\approx \frac{\text{ءم}}{\text{ءنق}} \times \Delta$نق

عوض عن نق = 5 ، Δنق = $\frac{2\text{نق}}{100}$، Δم $\approx$ 8 π (5) $\times$ $(\frac{2\times 5}{100})$

$\approx$ 4 π

النسبة المئوية للزيادة في م = $\frac{\Delta\text{م}}{\text{م}} \times 100$ %

= $\frac{4\,\pi}{4\pi\,(5)^2} \times 100$ %

= 4 %

النسبة المئوية التقريبية للزيادة في مساحة السطح تساوي 4 %.

(ب) ع = $\frac{4}{3}$ π نق^3

$\Leftarrow$ $\frac{\text{ءع}}{\text{ءنق}}$ = 4 π نق^2

لجميع القيم Δنق الصغيرة $\frac{\Delta\text{ع}}{\Delta\text{نق}} \approx \frac{\text{ءع}}{\text{ءنق}}$

Δع $\approx \frac{\Delta\text{ع}}{\Delta\text{نق}} \times \Delta$نق

عوض عن نق = 5 ، Δنق = $\frac{2\text{نق}}{100}$، Δع $\approx$ 4 π $(5)^2$ $\times$ $(\frac{5 \times 2}{100})$

$\approx$ 10 π

النسبة المئوية التقريبية للزيادة في ع = $\frac{\Delta\text{ع}}{\text{ع}} \times 100$ %

= $\frac{10\pi}{\frac{4}{3}\,\pi\,(5)^3} \times 100$ %

= 6 %

النسبة المئوية التقريبية للزيادة في الحجم تساوي 6 %.

مثال 8:

إذا كان ص = س$^{\frac{1}{2}}$ ، أوجد القيمة التقريبية للمقدار $\sqrt{4.01}$

الحل:

نفرض س تزداد من 4 إلى 4.01. إذن الزيادة في س ، Δس = 0.01 عندما س = 4.

ص = س$^{\frac{1}{2}}$

$$\frac{ءص}{ءس} = \frac{1}{2س^{\frac{1}{2}}} \longleftarrow$$

لجميع القيم Δس الصغيرة $\frac{ءص}{ءس} \approx \frac{\Delta ص}{\Delta س}$

$$\Delta ص \approx \frac{ءص}{ءس} \times \Delta س$$

عوض عن س = 4، Δس = 4.01، $\Delta ص \approx \frac{1}{2(4)^{\frac{1}{2}}} \times (0.01)$

Δص $\approx$ 0.0025

عندما س = 4 $\Leftarrow$ ص = 2

عندما تزداد س من 4 إلى 4.01 ، فإن الزيادة في ص تساوي 0.0025

$\therefore\ (4.01)^{\frac{1}{2}} \approx 2.0025$

تمرين 4-ب

(1) إذا كان ص = $\frac{4}{س}$ أوجد التغير التقريبي في ص عندما تزداد س من 5 إلى 5.02 (أعط الإجابة مقربة لثلاثة أرقام معنوية).

(2) حدث خطأ قدره 2 % في قياس طول ضلع مربع. أوجد النسبة المئوية للخطأ في حساب المساحة من هذه النتيجة.

(3) ارتفاع مجسم على شكل أسطوانة مصمتة هو 10 سم وطول قطرها 8سم. أوجد الزيادة التقريبية في الحجم عندما يزداد القطر بمقدار0.02 سم، ويبقى الارتفاع ثابتًا (اترك الإجابة بدلالة π).

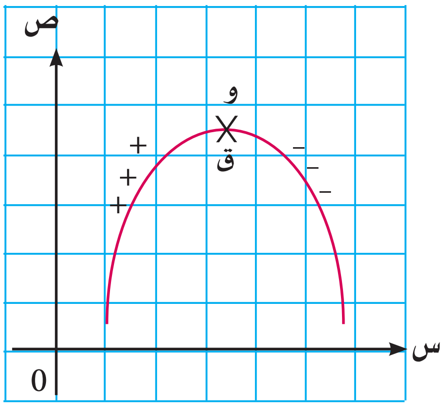
(4) ذا كان ع=$\sqrt{1+س^2}$ ، فأوجد التغير التقريبي في ع إذا تناقصت س من 2 إلى 1.99 (مقربًا الجواب إلى 3 أرقام معنوية).

(5) أسطوانة دائرية مغلقة ارتفاعها 16 سم وطول نصف قطرها نق سم. المساحة السطحية الكلية م سم^2. أثبت أن: $\frac{ءم}{ءنق}$= 4 π (نق + 8). استخدم هذه النتيجة في حساب تقريبي للزيادة في مساحة السطح عندما يزيد طول نصف القطر من 4 إلى 4.02 سم والارتفاع يبقى ثابتًا (اترك الإجابة بدلالة π).

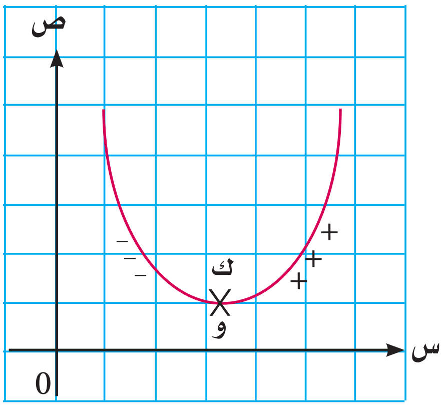
(6) الدالة ص معرفة بالقاعدة ص = س^8 – 2س^4 + 5. عبر بدلالة ق ، عن الزيادة التقريبية أو التناقص التقريبي في قيمة ص، عندما تزداد س من 2 إلى 2 + ق، حيث ق كمية صغيرة.

4-3 النقط المحلية (الحرجة)

النقطة المحلية على منحنى تعرّف كنقطة على المنحنى حيث الميل يساوي صفرًا. إذا كان ص = د(س) تمثل معادلة منحنى، ق نقطة على المنحنى بحيث $\frac{ءص}{ءس} = 0$ عند ق، حينئذ تسمى ق نقطة محلية.



شكل 4-2

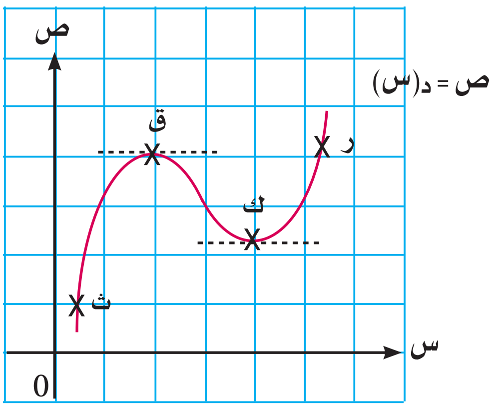


شكل 4-3

نقط الرجوع

في شكل 4-2 ق نقطة محلية على المنحنى المرسوم. يتغر ميل المنحنى من موجب إلى صفر إلى سالب كلما تتزايد س خلال النقطة ق، ينعطف المنحنى حول ق، لذلك تسمى ق نقطة رجوع لقيم المنحنى بجوار النقطة ق القيمة الأكبر موجودة عند ق، لذلك تسمى ق النقطة العظمى.

ك نقطة محلية على المنحنى الموضح في شكل 4-3 ميل المنحنى يتغير من سالب إلى صفر إلى موجب كلما تزداد س خلال النقطة ك.
كذلك ك أيضًا نقطة رجوع. لكن لقيمة المنحنى بجوار ك، أصغر قيمة توجد عند ك. كذلك تسمى ك نقطة صغرى.



شكل 4-4

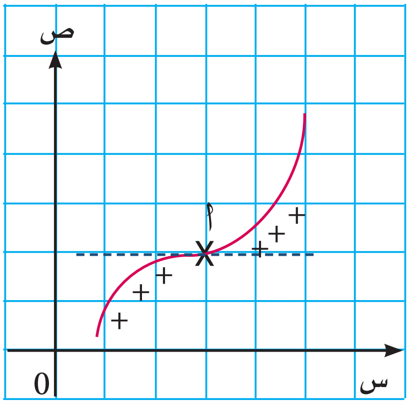
ق، ك نقطتان محليتان على المنحنى ص = د(س) كما هو موضح في شكل 4-4 ، ق نقطة عظمى. على كل حال هذا لايعنى بالضرورة أن قيمة الإحداثي الصادي عند ق عظمى على الإطلاق، حيث نرى أن قيمة الإحداثي الصادي عند ر، مثلا أكبر منه عند ق. إذن ق نقطة عظمى فقط لأجزاء المنحنى بجوار ق. بالمثل ك نقطة صغرى فقط لأجزاء المنحنى القريبة من ك. مرة أخرى، هذا ليس بالضرورة يعنى أن قيمة الإحداثي الصادي عند ك قيمة صغرى على الإطلاق، حيث ترى، مثلا أن قيمة الإحداثي الصادي عند ث أصغر منها عند النقطة ك.

باختصار، النقط العظمى أو الصغرى فقط ترتبط بالنقط بجوار نقط الرجوع المعينة. ما لم يذكر غير ذلك. فإن النقط العظمى و الصغرى شرحت بحيث تكون نقطًا عظمى وصغرى مرتبطة أو كلية وليست بالضرورة نقطًا عظمى وصغرى على إطلاقها على المنحنى.

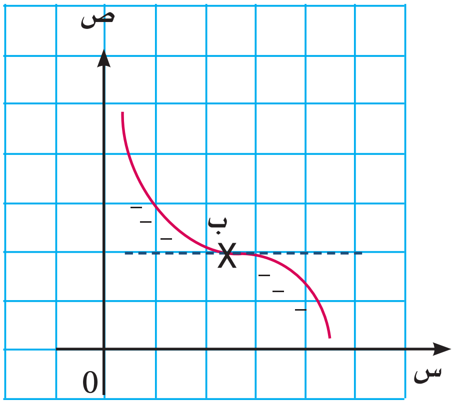
4-4 نقطة الإنقلاب:

النقطة أ نقطة محلية على المنحنى في شكل 4-5 يتغير الميل من موجب إلى صفر إلى موجب مرة أخرى حيث تزداد س حول أ.

النقطة ب نقطة محلية على المنحنى في شكل 4-6 يتغير الميل من سالب إلى صفر ثم إلى سالب مرة أخرى حيث تزداد س حول النقطة ب في كلتا الحالتين، بعد أن زادت س حول النقطة المحلية، فإن إشارة الميل تبقى من دون تغيير، لذلك فإن أ ، ب ليستا نقط رجوع، لكن يسميان نقطتي انقلاب. النمط الذي يتغير به ميل المنحنى كلما تزداد س حول نقطة معلومة محلية تحدد نوع النقطة المحلية فهي إما عظمى أو صغرى، أو نقطة انقلاب.



شكل 4-5



شكل 4-6

مثال 9:

إذا كان: $ص = س^3 - 2س^2 + س + 2$ ، فأوجد:

(أ) النقط المحلية على المنحنى. (ب) حدد إن كانت نقطًا عظمى أو صغرى.

الحل:

(أ)

$$ص = س^3 - 2س^2 + س + 2$$

$$\frac{ءص}{ءس} = 3س^2 - 4س + 1$$

عند النقطة المحلية ⇦ $\frac{ءص}{ءس} = 0$ المماس يوازي محور السينات

⇦ $3س^2 - 4س + 1 = 0$

⇦ $(3س - 1)(س - 1) = 0$ ومنها .... ◄ $س = \frac{1}{3}$ أو 1

بالتعويض بهذه القيم عن س في: $ص = س^3 - 2س^2 + س + 2$

عندما $س = \frac{1}{3}$ ، $ص = 2\frac{4}{27}$

عندما س = 1 ، ص = 2

النقط المحلية هي : $(\frac{1}{3}، 2\frac{4}{27})$، (1، 2).

(ب) لتحديد نوع النقط المحلية ($\frac{1}{3}$، $2\frac{4}{27}$)، (1، 2). قم باستقصاء إشارات الميل عند كل نقطة قبل هذه النقطة مباشرة وبعدها.

عندما تساوي س قيمة أقل بقليل من $\frac{1}{3}$ (تكتب $<\frac{1}{3}$ قيمة أقل بقليل)، يكون 3 س − 1 سالبًا.

عندما تساوي س قيمة أقل قليلًا من $\frac{1}{3}$، فإن س − 1 يكون سالبًا.

∴ حاصل الضرب (3 س − 1) (س − 1) موجب.

عند $س = \frac{1}{3}$، 3 س − 1 = 0، (3 س − 1) (س − 1) = 0

عندما تكون س أكبر قليلًا من $\frac{1}{3}$ (تكتب $>\frac{1}{3}$ قليلًا من س)، فإن 3 س − 1 يكون موجبًا.

عندما تكون س أكبر قليلاً من $\frac{1}{3}$، فإن س − 1 يكون سالبًا.

∴ حاصل الضرب (3 س − 1) (س − 1) يكون سالبًا.

بإعادة هذا بالنسبة للنقطة (1 ، 2)، ووضع النتائج في جدول، نجد أن:

س	قليلا $<\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	قليلا $>\frac{1}{3}$	قليلا <1	1	قليلا >1
$\frac{ءص}{ءس}$	+	0	−	−	0	+
شكل تخطيطي						
شكل تخطيطي						

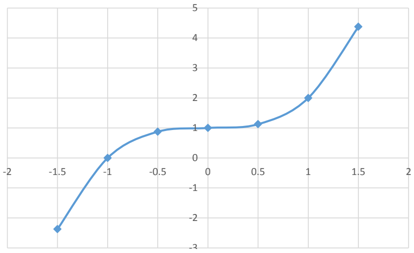
يتغير الميل عند النقطة $(\frac{1}{3}، 2\frac{4}{27})$ من موجب إلى صفر إلى سالب.

هذا يوضح أن $(\frac{1}{3}، 2\frac{4}{27})$ نقطة عظمى والرسم في الجدول السابق يعطي صورة واضحة عن النقطة العظمى.

يتغير الميل عند النقطة (1، 2) من سالب إلى صفر ثم إلى موجب. هذا يوضح أن (1، 2) نقطة صغرى، الرسم في الجدول السابق يوضح ذلك. إذن، النقطة $(\frac{1}{3}، 2\frac{4}{27})$ نقطة عظمى وأن (1، 2) نقطة صغرى على المنحنى.

مثال 10:

إذا علم أن المنحنى: $ص = س^3 + 1$ ، فأوجد النقطة المحلية عليه وحدد نوعها.



شكل 4-7

الحـل:

$\because$ $ص = س^3 + 1$

$\frac{ءص}{ءس} = 3س^2$

• عند النقطة المحلية $\frac{ءص}{ءس} = 0$

• عند النقطة المحلية $3س^2 = 0 \Leftarrow س = 0$ ومنها $ص = 1$

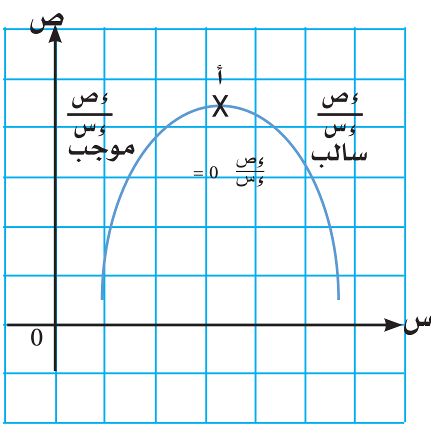
بوضع النتائج في جدول وتجميع أشكال المماسات والشكل البياني ، نجد أن :

س	قليلا > 0	0	قليلا > 0
$\frac{ءص}{ءس}$	+	0	+
شكل تخطيطي			
شكل تخطيطي			

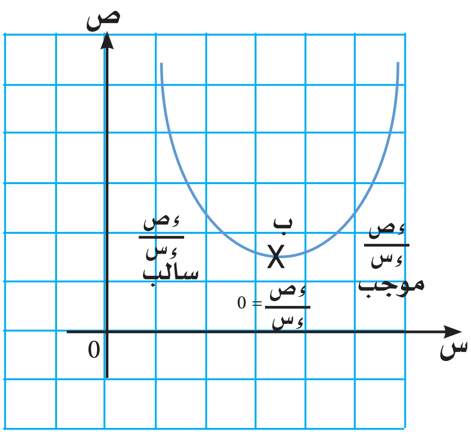
عند النقطة (0 ، 1) ، يتغير ميل المنحنى من موجب إلى صفر ثم إلى موجب مرة أخرى. يوضح هذا أن النقطة (0 ، 1) نقطة انقلاب. (ليس للدالة نهاية عظمى ونهاية صغرى).

استخدم $\frac{ء^2ص}{ءس^2}$ في تمييز النقط العظمى والصغرى

في شكل (4-8)، أ نقطة محلية على المنحنى الموضح. حيث إن س تزداد حول أ ، والميل يتغير من موجب إلى صفر ثم إلى سالب. هذا معناه، أن $\frac{ءص}{ءس}$ يتناقص من موجب إلى صفر إلى سالب. بعبارة أخرى معدل تغير $\frac{ءص}{ءس}$ بالنسبة إلى س سالب.



شكل 4-8



شكل 4-9

بالرموز $\frac{\text{ء}}{\text{ءس}}\left(\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}\right)=\frac{\text{ء}^2\text{ص}}{\text{ءس}^2}$ سالبًا

إذن النقطة حيث $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = 0$ ، $\frac{\text{ء}^2\text{ص}}{\text{ءس}^2}$ سالب تكون نقطة عظمى
بمعنى $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$= – عند القيمة التى تنعدم عندها $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$

بالمثل في شكل 4-9 ، عند ب الميل يساوي صفرًا أي أن: $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = 0$ ، $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ يزداد من سالب إلى صفر ثم إلى موجب كلما تزداد س حول النقطة.

هنا معدل تغير $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ موجب أو $\frac{\text{ء}^2\text{ص}}{\text{ءس}^2}$ موجب. إذن النقطة التي عندها $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = 0$، $\frac{\text{ء}^2\text{ص}}{\text{ءس}^2}$ موجب هي نقطة صغرى.

على كل، الطريقة السابقة لتحديد النقط العظمى والصغرى تكون غير قاطعة عندما $\frac{\text{ء}^2\text{ص}}{\text{ءس}^2} = 0$. في هذه الحالة، يمكن أن تكون النقطة نقطة انقلاب أو نقطة عظمى أو صغرى، لذلك يجب تحديد نوع النقطة بدراسة الميل كما أوضحنا في الأمثلة 9 و 10.

استخدام الميل لتحديد نوع النقط المحلية يسمى اختبار المشتقة الأولى.

استخدام $\frac{\text{ء}^2\text{ص}}{\text{ءس}^2}$ يسمى اختبار المشتقة الثانية .

مثال 11:

أوجد القيمة المحلية في الدالة ص = 2س^3 + 3س^2 - 12س - 12 وحدد إن كانت قيمًا عظمى أو صغرى.

الحل:

∵ ص = 2س^3 + 3س^2 - 12 س - 12

⇐ $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ = 6 س^2 + 6 س - 12

عند النقطة المحلية: $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ = 0

لإيجاد القيمة المحلية: 6 س^2 + 6 س - 12 = 0

⇐ س^2 + س - 2 = 0

⇐ (س - 1) (س + 2) = 0

∴ س = 1 أو س = - 2

بالتعويض عن س = 1 في ص = 2س^3 + 3س^2 - 12س - 12، نجد أن ص = - 19

بالتعويض عن س = - 2 في ص = 2س^3 + 3س^2 - 12 س - 12، نجد أن ص = 8

أيضًا $\frac{\text{ء}^2\text{ص}}{\text{ءس}^2}$ = 12س + 6

عندما س = 1 ، ∴ $\frac{\text{ء}^2\text{ص}}{\text{ءس}^2}$

عند س = - 2 ، ∴ $\frac{\text{ء}^2\text{ص}}{\text{ءس}^2}$ سالب

عندما $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ = 0 ، س = 1 نجد أن $\frac{\text{ء}^2\text{ص}}{\text{ءس}^2}$ موجب يعني أن:

س = 1 تعطي قيمة صغرى لـ: ص أي يساوي - 19

عندما $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ =0، س= –2، $\frac{\text{ء}^2\text{ص}}{\text{ءس}^2}$ سالب يعني أن س= –2

تعطي قيمة عظمى لـ : ص هي 8.

ملحوظة

في المنحني، عندنا نقط عظمى وصغرى. ولكن عند التعامل مع الدوال، نهتم بالقيمة المحلية والقيم العظمى والصغرى للدالة، هذا لأن شكل الدلة البياني لا نضمنه في الحل وبشكل عام تسمى القيم العظمى والصغرى أيضًا بالقيم المتطرفة.

مثال 12:

اثبت أن المنحنى $\text{ص} = (\text{س} - 2)^4$ لها نقطة عظمى عند $\text{س} = 2$. حدد إن كانت هذه النقطة المحلية نقطة عظمى أو نقطة صغرى أو نقطة انقلاب.

الحل:

$$\because \text{ص} = (\text{س} - 2)^4$$

$$\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = 4\,(\text{س} - 2)^3$$

عندما $\text{س} = 2 \quad \therefore \quad \frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = 0$

$\text{س} = 2$ على المنحنى تعطي نقطة محلية

باكتشاف الميول عند النقطة حيث $\text{س} = 2$ ووضع النتائج في جدول نجد أن:

س	قليلا > 2	2	قليلا < 2
$\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = 4\,(\text{س} - 2)^3$	−	0	+
شكل المماس	\	—	/
الشكل البياني			

قيمة $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ تتغير من سالب إلى صفر ثم إلى موجب حيث تزداد س حول النقطة حيث $\text{س} = 2$. هذا يوضح أن المنحنى له نقطة صغرى عند $\text{س} = 2$.

$\frac{\text{ء}^2\text{ص}}{\text{ءس}^2} = 12\,(\text{س} - 2)^2$ عندما $\text{س} = 2$، فإن:

لا نستطيع الحكم ندرس الميل عند $\text{س} = 2$

$\frac{\text{ء}^2\text{ص}}{\text{ءس}^2} = 0$،

(i) $\text{س} < 2 \quad \therefore \quad \frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \boxed{-}$

(ii) $\text{س} > 2 \quad \therefore \quad \frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \boxed{+}$

$\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ تغيرت من $\boxed{-}$ إلى $\boxed{+}$ تقعيرة المنحنى لأعلى

للدالة نهاية صغرى عند $(2 ، 0)$

تمرين 4 جـ

(1) في المنحنيات الآتية :

(1) أوجد النقط المحلية

(2) حدد إذ كانت نقطًا عظمى أو نقطًا صغرى أو نقط انقلاب.

(أ) ص = س^{2} + 1 (ب) ص = 2 – س^{2}

(جـ) ص = س^{3} (د) ص = س^{3} – 2 س^{2} + س

(هـ) ص = 1 + 24 $\frac{1}{\text{س}}$ - 2س^{3} (و) ص = 2 س (1 – س)^{4}

(ز) ص = س^{2} +

(2) أوجد النقط المحلية وحدد إن كانت نقطًا عظمى أو نقطًا صغرى أو نقط انقلاب:

(أ) ص = س^{4} – 1 (ب) ص = س – 2 $\sqrt{\text{س}}$

(جـ) ص = س^{3} – 6س + 2 (د) ص = (س – $\frac{1}{2}$) (س – 2) (س + 2)

(3) أوجد نقط الرجوع على المنحنى ص = س^{2} – س^{3}، مع ذكر نوع هذه النقط.

(4) بين أن الدالة لها نهاية صغرى وليس لها نقطة انقلاب: ص = س^{4} .

(5) إذا كانت ص = س^{3} – 3س^{2} - 9س + 1 فأوجد:

(i) النهايات العظمى والصغرى .

(ii) الفترات التزايدية والفترات التناقصية .

(iii) نقط انقلاب إن وجدت.

(iv) ارسم رسما تخطيطيا لمنحنى الدالة.

4 - 5 مسائل على القيم العظمى والصغرى

الطرق التي استخدمت في إيجاد النقط العظمى والصغرى يمكن استخدامها في حل مسائل عندما يطلب إيجاد قيمة عظمى أو صغرى لدالة.

نفرض مجموع العددين س، ص يساوي 25. والمطلوب إيجاد س، ص يكون حاصل ضربها، س ص، قيمة عظمى. أولاً عرف الكمية المطلوبة، أي أن تضع حاصل الضرب س ص في معادلة. نفرض حاصل الضرب ق = س ص، بعد ذلك نحتاج أن نعوض عن س أو ص بحيث يتكون الطرف الأيسر للمعادلة من متغير واحد فقط.

ق = س + ص

∵ س + ص = 25 (مجموع العددين يساوي 25)

⇦ ص = 25 - س

بالتعويض عن ص ⇦ ق = س (25 - س)

⇦ ق = 25 س - س^2

لإيجاد قيمة عظمى أو صغرى أوجد $\frac{ءق}{ءس}$.

⇦ ق = 25 س - س^2

⇦ $\frac{ءق}{ءس}$ = 25 - 2 س

عند قيمة عظمى أو صغرى $\frac{ءق}{ءس}$ = 0

لإيجاد قيمة ق العظمى أو الصغرى 25 - 2 س = 0

⇦ س = $12\frac{1}{2}$

لكي تحدد نوع النقطة عظمى أو صغرى نجد أن : $\frac{ء^2ص}{ءس^2}$ = − 2 أي سالب

⇦ س = $12\frac{1}{2}$ تعطي قيمة عظمى لـ ق

ص = 25 - س

∴ عند س = $12\frac{1}{2}$ فإن ص = 25 − $12\frac{1}{2}$

ص = $12\frac{1}{2}$

∴ لأكبر حاصل ضرب يكون العددان $12\frac{1}{2}$ و $12\frac{1}{2}$

في هذه المسألة مطلوب فقط العددان. أما إذا كان المطلوب هو أكبر حاصل للضرب فإن

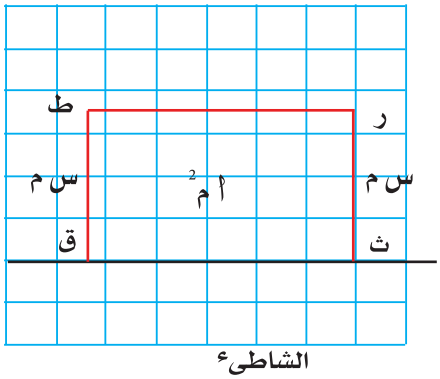
∴ الإجابة يجب أن تكون : $12\frac{1}{2} \times 12\frac{1}{2} = 156\frac{1}{4}$

عمومًا، لإيجاد قيمة عظمى أو صغرى.

مثال 13:

قطعة أرض على شكل مستطيل مطلوب إحاطتها بسور من السلك طوله 1000م. يستخدم السلك في ثلاثة أضلاع من المستطيل. الضلع الرابع شاطئ البحر. ما هي أبعاد المستطيل لكي تكون المساحة أكبر ما يمكن؟ بيّن أن هذه المساحة أكبر ما يمكن.

الحل:



شكل 4-10

في شكل 4-10 يوضح ق ط ر ث قطعة الأرض المستطيلة

نفرض ق ط = ر ث = س م. إذن، ط ر = (1000 - 2س) م

ق ث يمثل الشاطئ. نفرض مساحة ق ط ر ث تساوي أ م^2

∴ أ = س (1000 - 2 س)

أ = 1000 س - 2 س^2

$\frac{\text{ء أ}}{\text{ء س}}$ = 1000 - 4 س

عند نقطة الرجوع $\frac{\text{ء أ}}{\text{ء س}}$ = 0

∴ 1000 - 4 س = 0

س = 250

أيضًا: $\frac{\text{ء}^2\text{أ}}{\text{ء س}^2}$ = − 4 أي أن: $\frac{\text{ء}^2\text{أ}}{\text{ء س}^2}$ سالبة

∴ س = 250 تعطي قيمة عظمى للمساحة أ

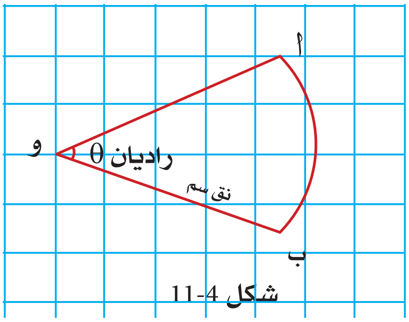
عندما س = 250، الضلع ط ر = 1000 − 2 (250)

= 500 م

بعدا المستطيل المطلوب هما 250 م، 500 م

مثال 14:

سلك طوله 100 سم، ثني ليكوّن قطاعًا من دائرة و أ ب و، حيث و مركز الدائرة، نق سم طول نصف القطر. وقياس زاوية القطاع هي θ بالتقدير الدائري.



شكل 4-11

(أ) أوجد طول القوس أب بدلالة نق فقط. ثم اثبت أن $\theta = \frac{100}{\text{نق}} - 2$

(ب) اثبت أن مساحة القطاع الدائري م سم^2 تعطى بالعلاقة م = نق (50 - نق)

(جـ) احسب قيمة θ عندما تكون م قيمة عظمى.

الحل:

(أ) طول القوس أ ب يساوي 100 - 2نق سم

$$\theta = \frac{\text{أب}}{\text{نق}}$$

$$= \frac{100 - 2\text{نق}}{\text{نق}}$$

$$= \frac{100}{\text{نق}} - 2 \ \text{راديان}$$

(ب) نفرض مساحة القطاع م

$$\text{م} = \frac{1}{2}\text{نق}^2\,\theta$$

$$= \frac{1}{2}\text{نق}^2\left(\frac{100}{\text{نق}} - 2\right)$$

$$= 50\,\text{نق} - \text{نق}^2$$

$$= \text{نق}\,(50 - \text{نق})\ \text{سم}^2$$

(جـ) $\because \text{م} = 50\,\text{نق} - \text{نق}^2$

$$\frac{\text{ءم}}{\text{ءنق}} = 50 - 2\,\text{نق}$$

عند القيمة المحلية $\frac{\text{ءم}}{\text{ءنو}} = 0$

50 – 2نو = 0

⇐ 50 = 2نو

⇐ نو = 25

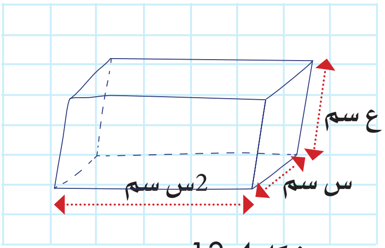
⇐ $\frac{\text{ء}^2\text{م}}{\text{ءنو}^2} = -2$ ، نو = 25 تعطي قيمة عظمى للمساحة م.

بالتعويض عن نو = 25

θ راديان = $\frac{100}{25} - 2 = 2$ راديان

المساحة م سم^2 عظمى عندما $\theta = 2$

مثال 15:



شكل 4-12

يوضح الشكل هيكلًا لمتوازي مستطيلات من السلك. طول القاعدة 2س سم والعرض س سم. الارتفاع ع سم. إذا كان الطول الكلي للسلك 720 سم، فاثبت أن حجم متوازي المستطيلات ح سم^3 يعطى بالعلاقة: ح = 360 س^2 – 6 س^3 حدد القيمة المحلية للحجم ح كمتغير في س واثبت أنها قيمة عظمى.

الحل:

الطول الكلي للسلك = 720 سم

12 س + 4 ع = 720

⇐ 4 ع = 720 – 12 س

⇐ ع = 180 – 3 س

⇐ ح = 2س^2 ع

= 2س^2 (180 – 3 س)

ح = 360 س^2 – 6 س^3

$\frac{\text{ءح}}{\text{ءس}}$ = 720 س – 18 س^2

عند القيمة المحلية لـ ح $\frac{\text{ءح}}{\text{ءس}} = 0$

720 س – 18س^2 = 0

⇐ س (720 – 18 س) = 0

⇐ س = 0 (مرفوض) أو 720 – 18 س = 0

18 س = 720

⇐ س = 40

$$\frac{وع}{وس} = 720\ س - 18\ س^2$$

$$\frac{و^2ع}{وس^2} = 720 - 36\ س$$

عندما $\frac{وع}{وس} = 0$ ، فإن س = 40 ،

$$\frac{و^2ع}{وس^2} = -\ 720\ \ (\text{سالب})$$

هذا معناه أن ح قيمة عظمى

عندما س = 40 فإن:

ع = 360 $(40)^2$ – 6 $(40)^3$

= 192000 (بالآلة الحاسبة)

القيمة العظمى تساوي 192000 سم^3

تمرين 4 د :

(1) مجموع عددين 16 ما هما العددان إذا كان حاصل ضربهما أكبر ما يمكن؟

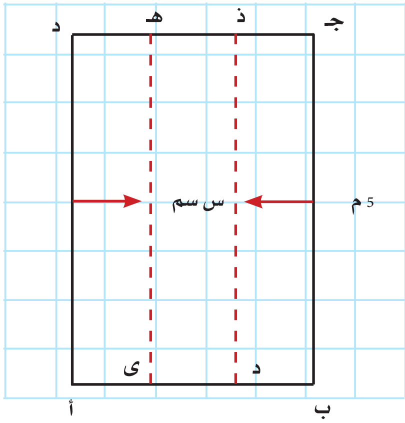
(2) محيط قطعة أرض مستطيلة 60 م. ما بعدا هذه القطعة إذا كانت المساحة أكبر ما يمكن؟

(3) حقل على شكل مستطيل محيطه 100 م. أوجد أكبر مساحة ممكنة وبعدا الحقل في هذه الحالة.

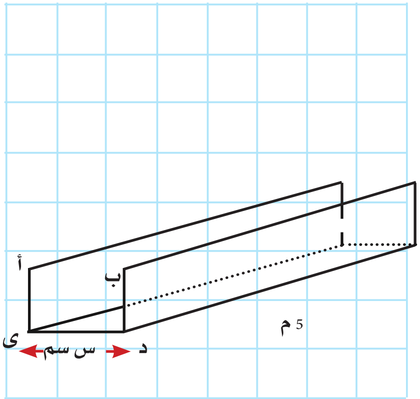
(4) طول صندوق مغلق ثلاثة أمثال عرضه، حجمه 288 سم^3. احسب أبعاده التي تجعل مساحة سطحه أصغر ما يمكن. (اهمل سمك المادة المستخدمة)

(5) كميتان ز ، ف، متغيرتان بحيث ز + ف = 8. كمية أخرى ع معرفة بالعلاقة ع = ز^2 ف، أوجد قيمتي ز، ف اللتين تجعلان ع عظمى.

(6) لوح معدني على شكل مستطيل موضح في شكل 4–13 (أ) يراد طيه عند الخطوط المنقطة لعمل مصرف للماء مقطعه مستطيل كما في شكل 4–13 (ب).



شكل 4–13 (أ)



شكل 4–13 (ب)

أوجد أكبر مساحة ممكنة للمقطع العرضي حيث أ ب = 30 سم، ب جـ = 5 م، ى د = هـ ذ = س سم،
أ ى = د ب

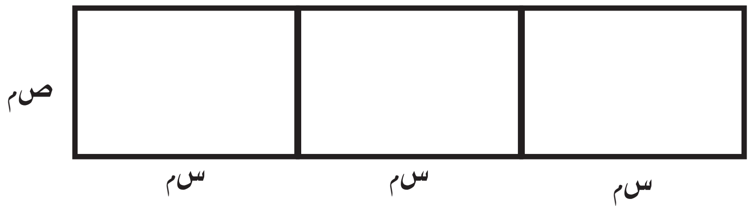
(7) أوجد النقط المحلية على المنحنى ص = س (س – 1)^2، حدد أيها نقطة عظمى وأيها نقطة صغرى،
مع ذكر إحداثيات هذه النقط.

(8) خزان مياه بدون غطاء قاعدته مربع طول ضلعه س متر وجوانبه متعامدة فإذ كانت المساحة الكلية للوح المعدني الذي صنع منه الخزان 3 م^2.
فاثبت أن الحجم الداخلي للخزان ح حيث

$$ع = (\frac{3س}{4} - \frac{س^3}{4}) م^3$$

ومن ثم احسب أبعاد الخزان التي تجعل حجمه أكبر ما يمكن.
(اهمل تداخلات المعدن عن لحام الخزان).

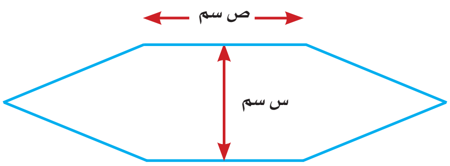
(9) عند فلاح 600 م من أسلاك التسوير ويرغب في إحاطة حظيرة تتكون من 3 مستطيلات متطابقة كما في شكل 4-14. عبر عن ص والمساحة الكلية ك م^2، بدلالة س، وأوجد قيمة س التي تجعل ك أكبر ما يمكن.



شكل 4-14

(12) مجسم على شكل أسطوانة مساحة سطحه الكلية 150سم^2. إذا كان طول نصف قطر القاعدة نق سم،
فاثبت أن الارتفاع، ع سم، للأسطوانة
يعطى بالعلاقة ع = $\frac{75}{\pi نق}$ – نق
عبر عن حجم الأسطوانة ع سم^3 بدلالة نق، وباعتبار أن نق متغير، فأوجد القيمة العظمى لحجم الأسطوانة.

(11) الشكل 4-15 يتكون من مستطيل بُعداه س سم، ص سم ومثلث متساوي الأضلاع عند كل ضلع طوله س سم.

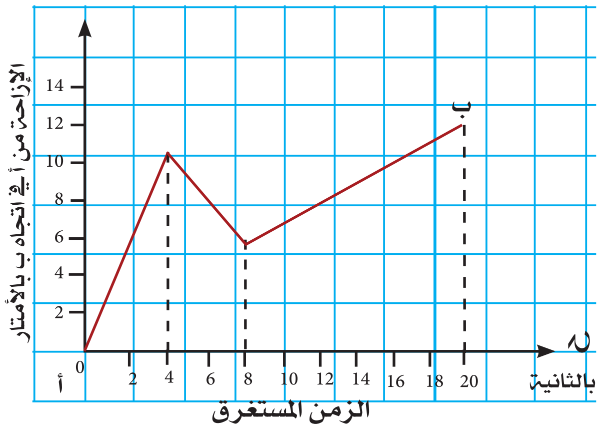


شكل 4-15

إذا كان المحيط 26 سم، فاثبت أن المساحة تكون أكبر ما يمكن عندما س = 4 + $\sqrt{3}$.

4-5 السرعة والعجلة:

يوضح شكل 4-61 تمثيلًا بيانيًّا للعلاقة بين الإزاحة والزمن لحركة جسم. عندما ن = 0 يكون الجسم عند أ. ثم يتحرك بعيدًا عن أ في اتجاه النقطة ب. عندما ن = 4، يكون الجسم على بعد 10م من أ. بين النقطة ن = 4 ، ن = 8 يتحرك الجسم للخلف اتجاه أ، ثم من ن = 8 إلى ن = 20 يتحرك مبتعدًا عن أ حتى يصل ب. التي تبعد 12 م، عندما ن = 20. من الشكل نستطيع استنتاج أن:



شكل 4-16

المسافة الكلية المقطوعة = م20(10 + 4 + 6) م =

الزمن الكلي المستغرق = 20 ثانية

$$\text{السرعة المتوسطة} = \frac{\text{المسافة الكلية المقطوعة}}{\text{الزمن الكلي المستغرق}}$$

$$= \frac{20}{20} \text{ م/ث}$$

$$= 1 \text{ م/ث}$$

لاحظ أنه عند قياس المسافة لا نهتم بالاتجاه، بعكس الحالة في الإزاحة.

بعد الجسم عن أ في اتجاه ب يساوي إزاحة الجسم عن أ في اتجاه أ ب، فإذ اعتبرنا أن الإزاحة في الاتجاه أ ب موجبة، إذن بعد 20 ث تكون الإزاحة 12 م من أ في الاتجاه إلى ب.

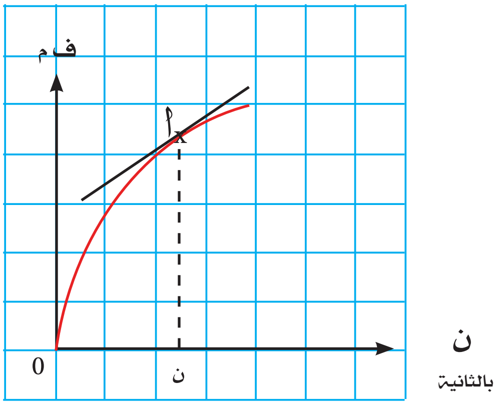
$$\text{السرعة المتوسطة} = \frac{\text{الإزاحة من نقطة معلومة}}{\text{الزمن الكلي}}$$

$$= \frac{12}{20} \text{ م/ث}$$

$$= \frac{6}{10} \text{ م/ث} \qquad \text{(في الاتجاة أ ب)}$$

لاحظ اختلاف الأجوبة.

تتضمن السرعة المتجهة مقدارًا واتجاهًا، بينما السرعة لها مقدار فقط.

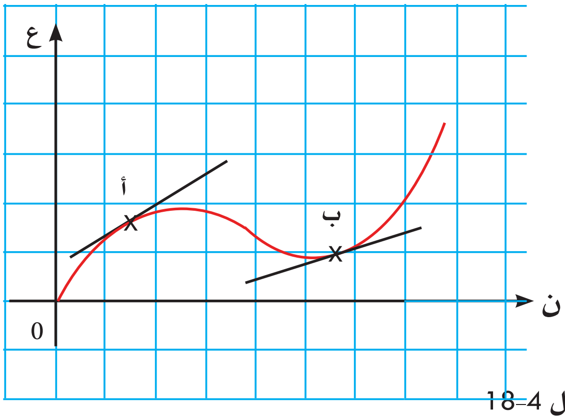


شكل 4-17

يوضح شكل 4-17 الشكل البياني للعلاقة بين الإزاحة ف والزمن ن لجسم. ميل المنحنى عند أية نقطة يعطي السرعة اللحظية للجسم. ذلك، عند أ، ميل المماس يعطي سرعة الجسم عند الزمن ن ث. إذا علمت أن الإزاحة.

ف = د(ن) فإن السرعة ع تتعين بالعلاقة :

$$ع = \frac{ءف}{ءن}$$



شكل 4-18

يوضح شكل 4-18 العلاقة بين السرعة والزمن في شكل بياني. السرعة المتغيرة موضحة بمنحنى ارتفاع متغير. يشير الميل عند أية نقطة إلى معدل تغير السرعة. هذه الكمية هي العجلة.

العجلة عند أية لحظة تعطى بميل المماس عند تلك اللحظة

ع = ذ (ن)

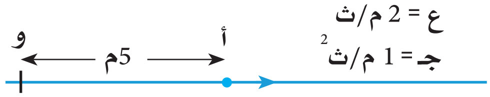
$\frac{ءع}{ءن}$ = العجلة (يرمز لها بالرمز جـ)

المسائل بالعجلة المتغيرة يجب حلها بالتفاضل وليس باستخدام قاعدة تعتمد على العجلة الثابتة. السرعة والعجلة كميتان لهما مقدار واتجاه، أي كميات متجهة. إذن، سواء كان اتجاههما الموجب أو السالب مهمًا.

أربع حالات لدلالة إشارات الإزاحة، السرعة، العجلة موضحه فيما يلي:
(كل المسافات مقاسة من و إلى اليمين اعتبرت موجبة، والمسافات المقاسة من و على اليسار تعتبر سالبة)

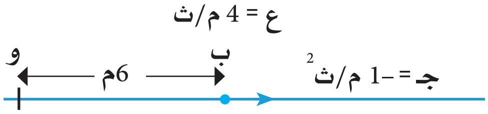
الجسم	الإزاحة عن و	السرعة	العجلة
أ	+ 5 م	+ 2 م/ث	+ 1 م/ث^2
ب	+ 6 م	+ 4 م/ث	– 1 م/ث^2
جـ	– 5 م	– 2 م/ث	– 1 م/ث^2
د	+ 5 م	– 2 م/ث	+ 1 م/ث^2

(الإشارة الموجبة + استخدمت لتؤكد حقيقة أن القيمة موجبة. يمكن حذفها في الحل العادي) وصف حركة الجسيمات



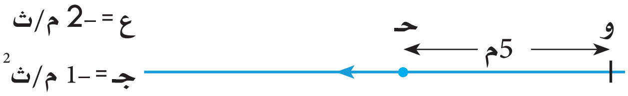
شكل 19-4

الجسيم أ على بعد 5 م يمين و، ويتحرك مبتعدًا عن و إلى اليمين. بسرعة 2 م/ث. تزداد سرعته بمقدار 1 م/ث كل ثانية، أي أن العجلة 1 م/ث^2.



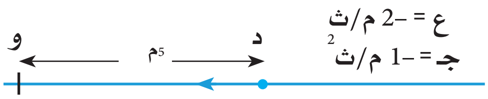
شكل 20-4

الجسيم ب على بعد 6 م يمين و، متحركًا يمينًا بسرعة 4 م/ث.
العجلة تساوي -1م/ث^2. إشارة العجلة سالبة وإشارة السرعة موجبة.
هذا يوضح أن السرعة والعجلة يؤثران في اتجاهين مختلفين ويدل ذلك على أن العجلة تقصيرية أو أن الجسم يتباطأ.



شكل 21-4

الجسيم جـ على بعد 5 م يسار النقطة و، متحركًا يسارًا بسرعة 2 م/ث (سرعة سالبة) بعجلة مقدارها -1 م/ث^2.
(العجلة السالبة في نفس اتجاه السرعة السالبة تدل على زيادة السرعة)



شكل 22-4

الجسيم د على بعد 5 م يمين و، متحركًا تجاه و بسرعة 2 م/ث. إنه يتحرك بعجلة تقصرية 1 م/ث^2.

مثال 16:

بدأ جسيم حركته من النقطة و على خط مستقيم و أ بحيث إنه بعد ن ثانية، يتعين بعده عن و بمسافة ف مترا بالعلاقة : $ف = ن^3 - 6ن^2 + 9ن$

(أ) أوجد صيغة، بدلالة ن، لسرعته وعجلته بعد ن ثانية.
(ب) بالتعويض عن ن = 0، 1 ، 2 ، 3 ، 4 في إجاباتك، كون جدولا يوضح المسافة، والسرعة، والعجلة لكل قيمة من قيم ن.
(جـ) ثم صف في إيجاز حركة الجسيم في الـ 4 ثوان الأولى
اعتبر المسافة من و في اتجاه و أ موجبة

الحـل:

(أ) نعلم أن: $ف = ن^3 - 6ن^2 + 9ن$

$$\frac{دف}{دن} = ع = 3ن^2 - 12ن + 9$$

$$\frac{دع}{دن} = جـ = 6ن - 12$$

السرعة : $ع = 3ن^2 - 12ن + 9$

العجلة : $جـ = 6ن - 12$

(ب) بالتعويض عن قيم ن من 0 إلى 4 وجدولة الناتج في جدول، نجد أن:

ن	0	1	2	3	4
ف	0	4	2	0	4
ع	6	0	3 -	0	9
جـ	12 -	6 -	0	6	12

(جـ) عندما ن = 0، يكون الجسيم عند و، بسرعة مقدارها 9 م/ث، العجلة مقدارها -12 م/ث^2. لتعبر عن سرعة تباطؤ سرعته. عندما ن = 1، يكون الجسيم على بعد 4 م من و (أي 4 م جهة اليمين كما هو موضح بمسافة موجبة) إنها في حالة سكون لحظي. تعمل العجلة في اتجاه أ و بمقدار 6 م/ث^2.

شكل 4-23

عندما ن = 2، يكون الجسيم على بعد 2 م من و ومتحركًا في اتجاه أ و بسرعة 3 م/ث، والعجلة تساوي صفرًا.

عندما ن = 3، الجسيم يكون ساكنًا لحظيًّا عند و، عجلته 6 م/ث^2 في اتجاه و أ

شكل 4-24

عندما ن = 4، يكون الجسيم على بعد 4 م من و متحركًا في اتجاه و أ بسرعة 9 م/ث، وتكون العجلة 12 م/ث^2

شكل 4-25

تمرين 4هـ:

(1) تعطى العلاقة بين الإزاحة ف متر لجسيم في زمن ن ثانية كالآتي:

ف = ن^2 − 5 ن

أوجد إزاحة الجسيم عندما يسكن لحظيًّا

(2) حركة جسم تعطى بالعلاقة ف = ن (3 − ن) حيث ف بالأمتار هي الإزاحة عن و، ن الزمن بالثواني بعد مروره بالنقطة و. إذا كانت سرعته ع متر كل ثانية، انقل وأكمل الجدول

ن	0	1	2	3	4
ف					
ع					

أجب عن الآتي:

(أ) في أي وقت يكون الجسم عند و؟

(ب) متى يكون الجسم في حالة سكون لحظيًّا؟

(جـ) ما المسافة المقطوعة في الـ3 ثوان الأولى؟

(د) ما بعد الجسم عن و بعد 4 ثوان؟

(3) قذف جسم رأسيا إلى أعلى. ارتفاعه ف متر بعد ن ثانية يعطى بالعلاقة

ف = 30 ݩ – 10 ݩ^2. أوجد.

(أ) سرعته بدلالة ن م/ث.

(ب) ارتفاع الجسم وسرعته بعد $\frac{1}{2}$ ثانية.

(جـ) الزمن عندما يسكن الجسم لحظيًا.

(د) أقصى ارتفاع يصل إليه.

(هـ) الزمن الكلي للحركة.

(4) بدأ جسيم حركته من و في اتجاه و أ على خط مستقيم. مسافته، ف مترًا من و بعد زمن ݩ ثانية

تعطى بالعلاقة ف = ݩ (ݩ – 3)^2. أوجد:

(أ) متى يكون الجسيم عند و مرة أخرى؟

(ب) الأوقات التي يقف عندها الجسيم لحظيًا.

(جـ) المسافة المقطوعة في الـ3 ثوان الأولى.

(د) المسافة المقطوعة في الثانية الثالثة.

(هـ) الوقت عندما تساوي العجلة صفرًا.

(و) الفترة الزمنية التي تتناقص خلالها السرعة.

ملخص ...

(1) الميل :

إذا كان ص = د (س) معادلة منحنى، فإن $\frac{ءص}{ءس}$ يعطي دالة الميل للمنحنى.

أي نحصل على ميل المنحنى بالتعويض عند أية نقطة عليه بالتعويض عن قيمة إحداثيات هذه النقطة في دالة الميل.

(2) معدل التغير:

إذا كان $\frac{ءس}{ءݩ}$ معدل تغير س بالنسبة إلى الزمن ن، وأن ص = د (س)، فإن معدل تغير ص بالنسبة إلى ن يعطى بالعلاقة:

$$\frac{ءص}{ءݩ} = \frac{ءص}{ءس} \times \frac{ءس}{ءݩ}$$

إذا علم $\frac{ءص}{ءݩ}$ ، معدل تغير ص بالنسبة إلى الزمن ݩ ، $\frac{ءس}{ءݩ}$ يمكن إيجاده كما سبق.

معدل التغير السالب هو نقصان في مقدار الكمية المتضمنة كلما يتزايد الزمن.

(3) التقريب

عندما تكون Δس صغيرة ، فإن $\frac{\Delta ص}{\Delta س} \approx \frac{ءص}{ءس}$

$$\Delta ص \approx \frac{ءص}{ءس} \times \Delta س$$

تستخدم هذه العلاقة في إيجاد الزيادة التقريبية في ص، إذا كان ص = د (س) ،
مقابل زيادة صغيرة في س أي Δس.

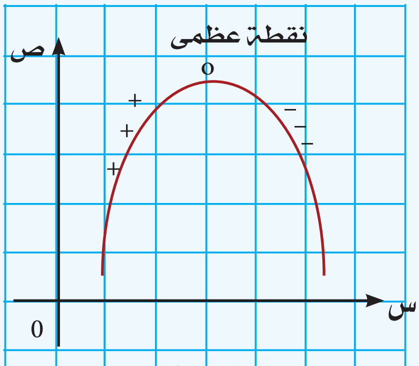
(4) النقط المحلية

إذا كان ص = د (س) معادلة منحنى، وكان $\frac{ءص}{ءس} = 0$ عند نقطة على المنحنى.
فإن هذه النقطة تسمى نقطة محلية. الميل عند النقطة المحلية يساوي صفرًا.

اختبار المشتقة الأولى

(أ) النقطة العظمى

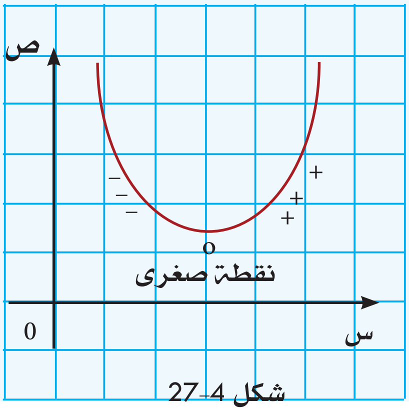
إذا كان الميل يتغير من موجب إلى صفر إلى سالب كلما تتزايد س حول النقطة المحلية، تكون النقطة نقطة عظمى شكل 4–26



شكل 4-26

(ب) النقطة الصغرى

إذا تغير الميل من سالب إلى صفر إلى موجب كلما تتزايد س حول نقطةالمحلية، تكون النقطة نقطة صغرى.

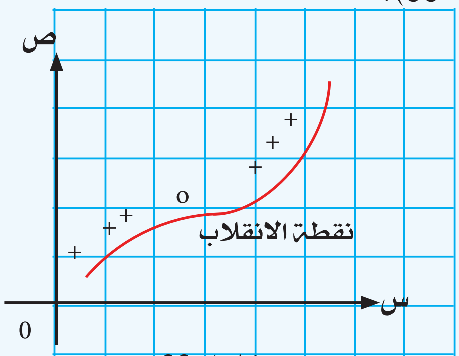


شكل 4-27

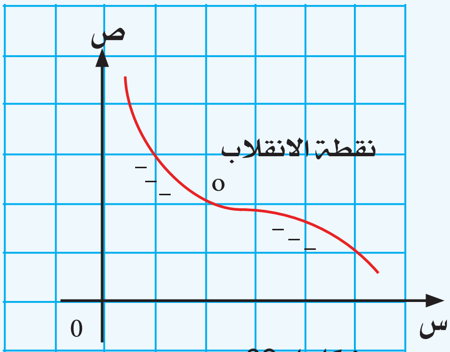
النقط العظمى والصغرى تسمى نقط رجوع

(جـ) نقط الانقلاب:

إذا تغير ميل المنحنى من موجب إلى صفر ثم إلى موجب مرة أخرى أو من سالب إلى صفر ثم سالب مرة أخرى كلما تتزايد س حول النقطة المحلية، فإن النقطة تسمى نقطة انقلاب (انظر شكل 4 – 35، 4–36).



شكل 4–28



شكل 4–29

اختبار المشتقة الثانية

للتمييز بين النقطة العظمى والنقطة الصغرى ونقطة الانقلاب

(أ) إذا كان $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = 0$، $\frac{\text{ء}^2\text{ص}}{\text{ءس}^2}$ سالبًا عند نقطة على منحنى، تكون النقطة نقطة عظمى.

(ب) إذا كان $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = 0$، $\frac{\text{ء}^2\text{ص}}{\text{ءس}^2}$ موجبًا عند نقطة على المنحنى، فإن النقطة تكون نقطة صغرى.

(جـ) إذا كان $\frac{\text{ء}^2\text{ص}}{\text{ءس}^2} = 0$ عند نقطة على المنحنى فلا يوجد استنتاج محدد يمكن تكوينه في هذه الحالة، النقطة قد تكون نقطة صغرى أو نقطة عظمى أو نقطة انقلاب.لكي تحدد نوع النقطة المحلية، نهتم بنمط تغير الميل كلما تتزايد س حول النقطة المحلية .

(5) مسائل على القيم العظمى والصغرى

(أ) أوجد العلاقة بين الكمية التي تكون عظمى أو صغرى والمتغير المتضمن،

فمثلا، ص = د (س) حيث ص تكون عظمى أو صغرى، س هو المتغير.

(ب) أوجد قيمة س عندما $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = 0$

(جـ) إذا كان هناك أكثر من قيمة محلية ، تخير الطريقة المناسبة مستخدمًا اختبار المشتقة الأولى أو اختبار المشتقة الثانية

(د) عوض بالقيمة المناسبة للمتغير س في ص = د (س) ثم أوجد القيمة العظمى أو الصغرى للمتغير ص.

(6) السرعة والعجلة

إذا كان ف = د (ن) حيث ف بالأمتار ترمز للإزاحة، ن بالثانية ترمز للزمن، للجسيم، فإن $\frac{\text{ءف}}{\text{ءن}}$ يساوي سرعة الجسيم بالمتر/ث. فإذا رمز نا للسرعة بالرمزع، بحيث، ع = ت (ن) فإن $\frac{\text{ءع}}{\text{ءن}}$ يساوي العجلة جـ بوحدة م/ث^2.

استقصاء رياضي

1- اثبت أنه لجميع المثلثات بقاعدة معلومة ومساحة معلومة، فإن أصغرها في المحيط يكون متساوي الساقين.

2- اثبت أنه لجميع المثلثات متساوية الساقين والتي لها محيط ثابت ، فإن المثلث الذي له أكبر مساحة يكون متساوي الأضلاع.

3- اثبت أن المستطيل الذي له أكبر مساحة ومحيط معلوم، ق، يكون مربعًا.

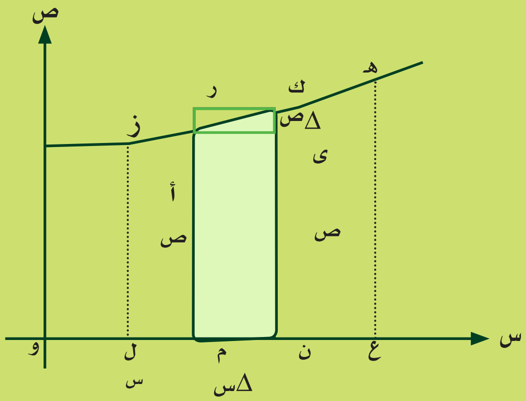
5 تطبيقات على التكامل
Applications of Integration

تطبيقات على التكامل
Applications of Integration

1-5 المساحة بين منحنى ومحور السينات

يُوضح شكل 5-1 (أ) جزءًا من منحنى ص = د(س). مطلوب إيجاد المساحة المحاطة بالمنحنى ز هـ، المحور س والمستقيمين ل ز ، ع هـ. نفرض أن ق (س،ص) نقطة متغيرة تقع على المنحنى بين ز، هـ، وأن مساحة ل م ق ز تساوي أ.

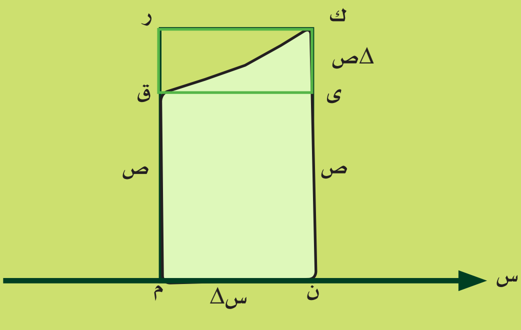
إذا تحركت نقطة ق على المنحنى إلى نقطة ك هي (س+ ∆س، ص + ∆ص)، وأن ∆س ،∆ص كميات صغيرة للمتغيرين س ، ص على الترتيب. ق ى، ر ك يوازيان المحور س .



شكل 5 -1 (أ)

أثناء الحركة من ق إلى ك فإن المستقيم ق م يمسح المساحة ق ك ن م.

انظر شكل 5-1(ب). نفرض هذه المساحة ∆ أ.



شكل 5 -1 (ب)

المستطيل ق ى ن م < ∆ أ،

∆ أ < المستطيل ر ك ن م

لذلك، المستطيل ق ى ن م < ∆ أ < المستطيل ر ك ن م .

⇐ $ص \Delta س < \Delta أ < (ص + \Delta ص) \Delta س$

بالقسمة على Δ س :

$$ص < \frac{\Delta أ}{\Delta س} < ص + \Delta ص$$

نفرض Δ س ← 0، إذن، Δ ص ← 0، ص + Δ ص ← ص

الآن $\frac{\Delta أ}{\Delta س}$ تقع بين ص، ص + Δ ص

$\therefore$ نهــا $\frac{\Delta أ}{\Delta س} = \frac{ءأ}{ءس} =$ ص

$$\frac{ءأ}{ءس} = ص$$

تكامل بالنسبة إلى س

$$أ = \int ص\ ءس$$

ص = د(س)، $\therefore$ أ = $\int$ د(س) ءس

نفرض :

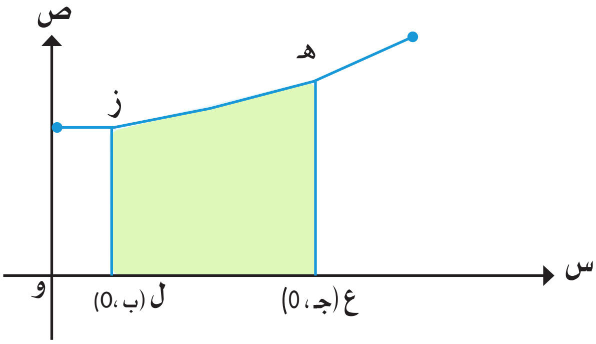
$\int$ د(س) ء س = ذ(س) + ث (حيث ث ثابت)

أ = ذ(س) + ث .... ◄ (1)

الآن عبرنا عن المساحة أ كدالة لـ س في (1)

نفرض الإحداثي س لكل من النقطتين ز، هـ هي ب، جـ على الترتيب لاحظ شكل 5-1 (جـ).

لكي توجد مساحة ل ع هـ ز، نفرض م ق يمسح من ل ز إلى ع هـ .



شكل 5 - 1 (جـ)

عندما تكون ق عند ز ، س = ب ، المساحة أ = 0

باستخدام (1) نجد أن 0 = ذ(ب) + ث ⇐ ث = − ذ(ب)

بالتعويض عن هذا في (1).

أ = ذ(س) − ذ(ب) .... ◄ (2)

هذا يعطي مساحة ل م ق ز ، أي أن المساحة الممسوحة عندما يتحرك م ق من ل ز إلى م ق. لاحظ شكل 5-1 (أ).

للحصول على مساحة ل ع هـ ز ، نفرض م ق يتحرك من ل ز إلى ع هـ .

بالتعويض عن س بالقيمة جـ في (2)،

نجد أن : أ = ذ(جـ) – ذ(ب)

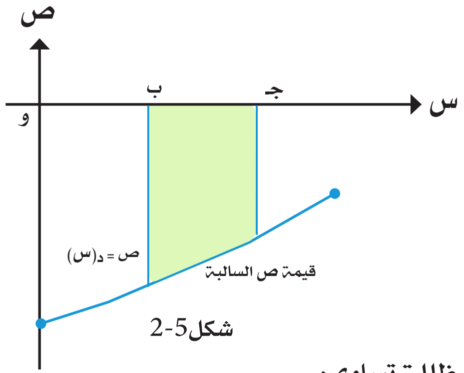
هذا يمكن أن يُعبَّر عنه كتكامل محدود

$$أ = \int_{ب}^{جـ} د(س) \, ء س = [ذ(س)]_{ب}^{جـ}$$

$$= ذ(جـ) - ذ(ب)$$

على هذا فالتكامل المحدد يعطي المساحة تحت المنحنى بين الحدين المعلومين

يوضح شكل 5-2 المنطقة المظللة بين منحنى ص= د (س) محور س والمستقيمين س = ب، س = جـ



شكل 5-2

مساحة المنطقة المظللة تساوي:

$$\int_{ب}^{جـ} د(س) \, ء س$$

ولكن د(س) سالبة في جزء المنحنى الموضح، حيث إن هذا الجزء تحت محور س حيث الإحداثي الصادى سالب.

$$\therefore \int_{ب}^{جـ} د(س) \, ء(س)$$ سوف يتحول إلى سالب

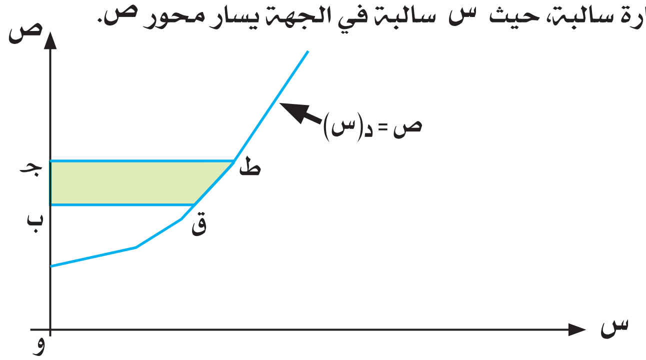
على كل حال هذه هي النتيجة الوحيدة لقيمة د(س) السالبة هنا. المساحات يجب أن تكون موجبة، أية إجابة لأية مساحة يجب أن تعطى كقيمة موجبة

5-2 المساحة بين منحنى ومحور الصادات:

مساحة المنطقة المظللة أ الموضحة في شكل 5-3 يمكن الحصول عليها بطريقة مماثلة للطريقة الموضحة في الجزء 5-1 . لكن المساحة أ هنا تحت مستقيم يوازي محور س. يمكن أن يتضح لنا أن :

$$أ = \int_{ب}^{جـ} س \, ء ص$$

لحساب المساحة أ ، يجب أن يُعبَّر عن س بدلالة ص ليمكن إجراء التكامل. إشارة المساحة هنا موجبة. إذا كانت المساحة جهة اليسار من محور ص، سوف تكون الإشارة سالبة، حيث س سالبة في الجهة يسار محور ص.



شكل 5-3

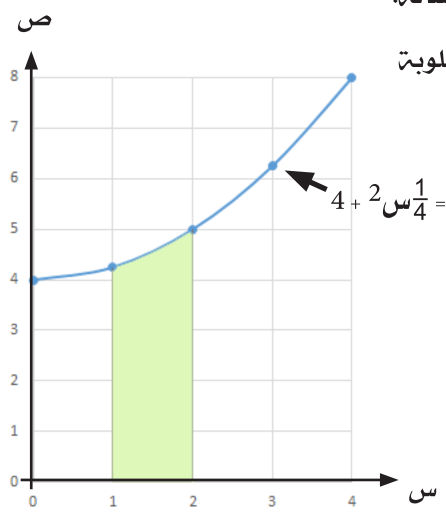
مثال 1:

أوجد مساحة المنطقة المحاطة بالمنحنى ص = $\frac{1}{4}$ س^2 + 4، محور س، المستقيمان س = 1، س = 2

الحل:

الشكل مفيد جدًّا، وفي معظم الحالات يساعد في حل المسألة.

يوضح شكل 5-4 المنحنى والجزء المظلل للمساحة المطلوبة



شكل 5-4

المساحة المطلوبة = $\int_1^2 \left(\frac{1}{4}\text{س}^2 + 4\right)$ ء س

$= \left[\frac{\text{س}^3}{12} + 4\,\text{س}\right]_1^2$

$= \left(\frac{8}{12} + 8\right) - \left(\frac{1}{12} + 4\right)$

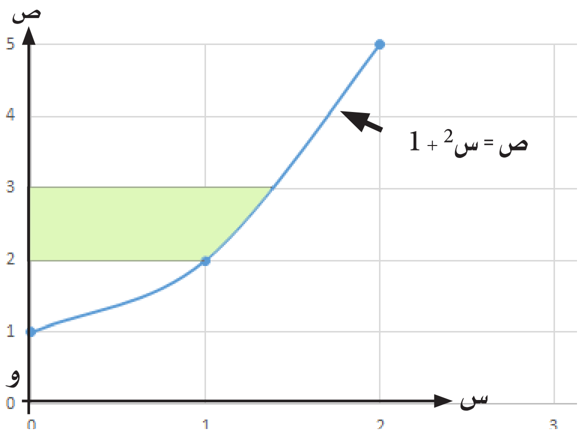
$= 4\frac{7}{12}$ وحدة مربعة.

مثال 2 :

احسب مساحة المنطقة المحاطة بالمنحنى $\text{ص} = \text{س}^2 + 1$، محور ص والمستقيمين $\text{ص} = 2$، $\text{ص} = 3$ للجزء في الربع الأول فقط.

الحل:

المنطقة المطلوبة هي المنطقة المظللة كما هو موضح في شكل 5-5.



شكل5 -5

$$\text{ص} = \text{س}^2 + 1$$

$$\text{س}^2 = (\text{ص} - 1)$$

$$\text{س} = (\text{ص} - 1)^{\frac{1}{2}}$$

المساحة المطلوبة تساوي $\int_2^3 \text{س}\ \text{ء ص}$

$$= \int_2^3 (\text{ص} - 1)^{\frac{1}{2}}\ \text{ء ص}$$

$$= \frac{2}{3} (\text{ص} - 1)^{\frac{3}{2}} \Big|_2^3$$

$$= \frac{2}{3} (2\sqrt{2} - 1)$$

المساحة المطلوبة تساوي $\frac{2}{3}(2\sqrt{2} - 1)$ وحدة مربعة.

مثال 3:

أوجد مساحة المنطقة المحاطة بالمنحنى: ص = س (س − 1) (س + 3) ومحور س.

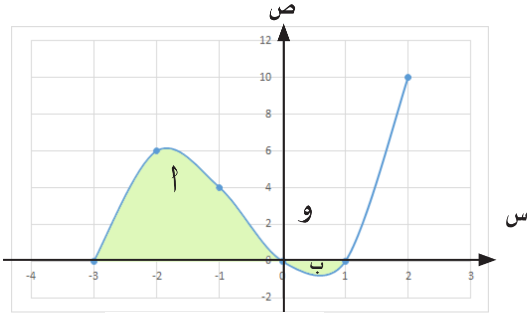
الحل:

المنطقة المطلوبة هي المنطقة المظللة في شكل 5-6

$$\text{ص} = \text{س}\,(\text{س}-1)\,(\text{س}+3)$$

$$= \text{س}\,(\text{س}^2 + 2\text{س} - 3)$$

$$= \text{س}^3 + 2\text{س}^2 - 3\text{س}$$



شكل 5 -6

ملحوظة

عند إيجاد مساحة المنطقة المحاطة بالمنحنى، محور س (أو محور ص) لأجزاء معينة من المنحنى، يجب أن تحدد أولاً أن هذا الجزء من منحنى يقطع المحور السيني (أو الصادي المعني). يجب حينئذٍ أن تقسم المنطقة المعينة إلى جزأين أو أكثر عند نقط تقاطع المنحنى مع المحور لإيجاد مساحات الأجزاء المنفصلة، ثم جمع القيم العددية لهذه المساحات. هذا المجموع سوف يمثل المساحة المحاطة بالمنحنى والمحور المعني.

المنحنى يقطع محور س عند نقطة الأصل. إذن نوجد المساحتان أ، ب كل على حدة

$$\text{أ} = \int_{-3}^{0} \text{ص}\ \text{ءس} = \int_{-3}^{0} (\text{س}^3 + 2\text{س}^2 - 3\text{س})\ \text{ءس}$$

$$= \left[\frac{\text{س}^4}{4} + \frac{2\text{س}^3}{3} - \frac{3\text{س}^2}{2}\right]_{-3}^{0}$$

$$= 0 - \left(\frac{81}{4} - 18 - \frac{27}{2}\right)$$

$$= 11\tfrac{1}{4}\ \text{وحدة مربعة}$$

$$\text{ب} = \int_{0}^{1} \text{ص}\ \text{ءس} = \int_{0}^{1} (\text{س}^3 + 2\text{س}^2 - 3\text{س})\ \text{ءس}$$

$$= \left[\frac{\text{س}^4}{4} + \frac{2\text{س}^3}{3} - \frac{3\text{س}^2}{2}\right]_{0}^{1}$$

$$= \left(\frac{1}{4} + \frac{2}{3} - \frac{3}{2}\right) - 0$$

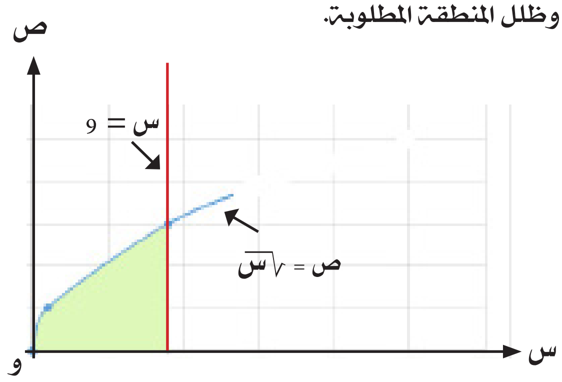
$$= \left|\frac{-7}{12}\right|$$

مساحة المنطقة ب $= \frac{7}{12}$ وحدة مربعة

المساحة الكلية تساوي $11\frac{1}{4} + \frac{7}{12} = 11\frac{5}{6}$ وحدة مربعة

مثال 4:

أوجد مساحة المنطقة المحاطة بالمنحنى $\text{ص} = \sqrt{\text{س}}$ ، ومحور السينات والمستقيم: $\text{س} = 9$ ، ارسم الشكل وظلل المنطقة المطلوبة.



شكل 5- 7

الحل:

$\text{ص} = \sqrt{\text{س}}$ ، $\text{س} = 9$

$\text{المساحة} = \int_{0}^{9} \text{ص ء س}$

المساحة المطلوبة =

$\int_{0}^{9} \sqrt{\text{س}}\ \text{ء س}$

$= \frac{2}{3}\,\text{س}^{\frac{3}{2}} \Big|_{0}^{9}$

$= \frac{2}{3}(\sqrt{9})^{3} - \frac{2}{3}(0)$

$= 18$ وحدة مربعة

مثال 5:

من الشكل 5–8 أوجد المساحة المظللة

الحل:

نرسم المساحة المظللة ثم نسقط عمود على محور السينات من النقطة $(2 ، 4)$

فنحصل على مساحتين لدينا

$\text{أ} = \int_{0}^{2} \text{ص}_1\ \text{ء س}$ ، $\text{ب} = \int_{2}^{4} \text{ص}_2\ \text{ء س}$

$\text{أ} = \int_{0}^{2} \text{س}^2\ \text{ء س}$ ، $\therefore\ \text{أ} = \frac{\text{س}^3}{3} = \frac{8}{3}$ وحدة مربعة

نوجد ص_2 بدلالة س من معادلة المستقيم المار بالنقطتين $(4 ، 0)$ ، $(2 ، 4)$

فيكون $\text{ص} = -2\text{س} + 8$

$\text{ب} = \int_{2}^{4} (-2\text{س} + 8)\ \text{ء س}$

$= (-\text{س}^2 + 8\text{س})$

$\text{ب} = (-16 + 32) - (-4 + 16)$

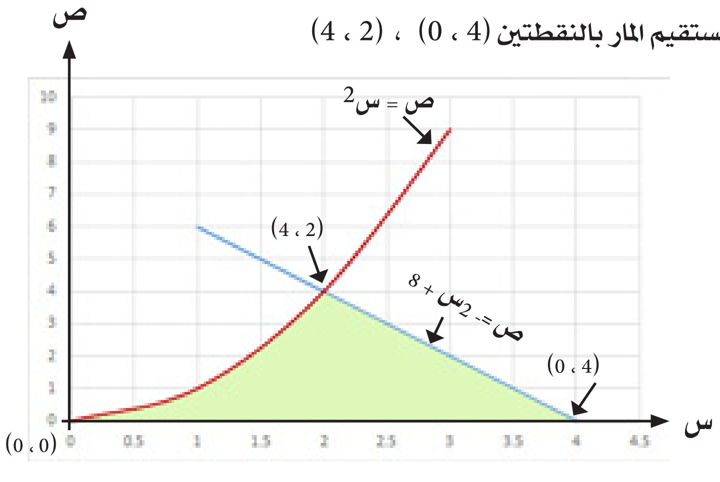
$= 16 - 12$

$\therefore\ \text{ب} = 4$ وحدة مربعة

$\therefore$ المساحة المطلوبة = أ + ب

$= \frac{8}{3} + 4$

$= \frac{20}{3}$ وحدة مربعة



شكل 5- 8

تمرين 5 - أ

(1) في كل مما يأتي أوجد مساحة المنطقة المحاطة بالمنحنى الخطوط المستقيمة: ارسم المنحنيات في كل حالة:

(أ) ص = $س^2$، ص = 4

(ب) ص = $س^3$، س = 0، ص = 1، ص = 8

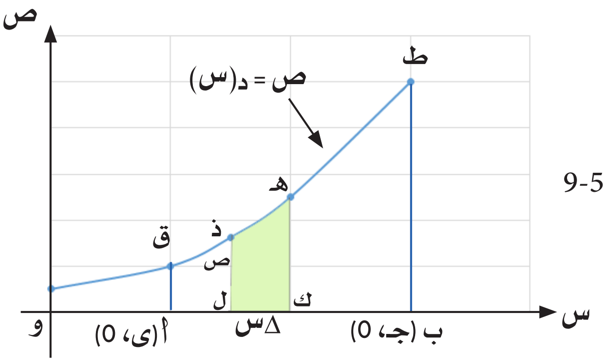
(جـ) ص = $س^2 + 1$، س = 0، ص = 5 في الربع الأول فقط.

(د) ص = $س^2 - 4$، س = 0، ص = 0 للمنطقة في الربع الثالث فقط.

(هـ) $ص^2$ = س ، س = 0، ص = 2

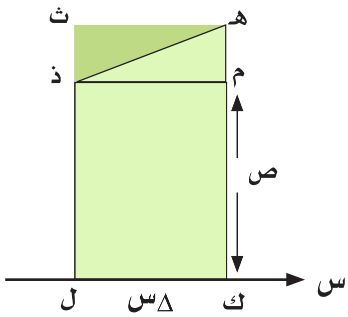
5-3 المساحة كمجموع :

يوضح شكل 5-9 جزءًا من المنحنى ص=د(س). ق،ط نقطتان على المنحنى. المطلوب إيجاد مساحة المنطقة المحدودة بالمنحنى، محور س، المستقيمين أق، ب ط، أي مساحة أ ب ط ق .



شكل 5-9

نفرض عنصرًا صغيرًا من المنطقة ذ هـ ك ل موضحة مكبرة في شكل 5-9 مساحة المستطيل ذ م ك ل تساوي ص × Δس حيث Δس كمية صغيرة من س.



شكل 5-10

الآن المنطقة أ ب ط ق مكونة من عنصرين يشابهان ذ هـ ك ل. عندما تصغر قيمة Δس، فإن مساحة ذ م ك ل ⟵ مساحة ذ هـ ك ل.

حينئذ يمكننا جمع كل هذه العناصر عندما Δس⟵0 لتعطى مساحة أ ب ط ق.

باستخدام الرمز $\sum$ (الحرف اليوناني سيجما) ليعني المجموع

$$\text{مساحة } \lim_{\Delta س \to 0} \sum_{س=ى}^{س=جـ} ص\,\Delta س = \text{مساحة أ ب ط ق}$$

وعلى ذلك تكون المساحة أب ط ق تحت المنحنى ص = د (س) من ق إلى ط يمكن الحصول عليها من مجموع أكبر عدد من العناصر التي تتكون منها المنطقة المطلوب إيجاد مساحتها.

$$\lim_{\Delta س \to 0} \sum_{س=ى}^{س=جـ} ص\,\Delta س \text{ يمكن برهنتها لكي تساوي } \int_{ى}^{جـ} ص \, ء س$$

حاليًا، سوف نفرض أن هذه النتيجة صواب.

إذن: المساحة تحت المنحنى تعطى بالتكامل المحدود. وهو $\int_{ى}^{جـ}$ ص ء س. هذه النتيجة تتفق مع تلك التي حصلنا عليها في الجزء 5-1. هذه الطريقة في أخذ شرائح من منطقة معلومة تعطى أسرع وأقصر طريقة للحصول على مساحة المنطقة المحاطة بالشكلين البيانيين.

مثال 6:

أوجد مساحة المنطقة المحددة بالمنحنى ص = س^2 + 1 والمستقيمين ص = 2 ، ص = 4، مقربًا الإجابة لرقمين عشريين.

الحل:

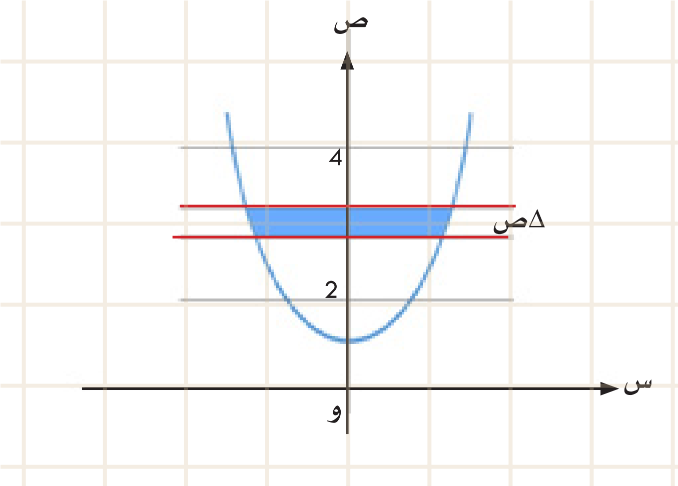
خذ شريحة من المنطقة كما هو موضح في شكل 5-11، الآن عرض الشريحة Δص، وطولها 2س فتكون مساحة الشريحة = ص Δ (2 س) حيث إن المساحة تساوي:

$$= \int_{2}^{4} 2\,\text{س}\ \text{ء ص}$$

$$\text{ص} = \text{س}^2 + 1$$

$$\text{س} = (\text{ص} - 1)^{\frac{1}{2}}$$

$$\int_{2}^{4} 2\,\text{س}\ \text{ء ص} = \int_{2}^{4} 2\,(\text{ص} - 1)^{\frac{1}{2}}\ \text{ء ص}$$



شكل 5-11

$$= 2\left[\frac{(\text{ص} - 1)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\right]_{2}^{4}$$

$$= 2\left[\frac{3^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\right] - 2\left[\frac{1}{\frac{3}{2}}\right]$$

$$= 2\left[\frac{2 \times 3\sqrt{3}}{3}\right] - 2\left[\frac{3}{2}\right]$$

$$= 2\left[2\sqrt{3} - \frac{2}{3}\right]$$

$$\approx 2\,(3.464 - 0.6667)$$

$$\approx 2\,(2.797)$$

$$\approx 5.59$$

المساحة تساوي 5.59 وحدة مربعة.

مثال 7:

أوجد مساحة المنطقة المحاطة بالمنحنى ص = $س^2$ والخط المستقيم ص = س

الحل:

نقطة تقاطع ص = س ، ص = $س^2$ نحصل عليها بحل المعادلتين.

$$س = س^2$$

$$س^2 - س = 0$$

$$س\,(س - 1) = 0$$

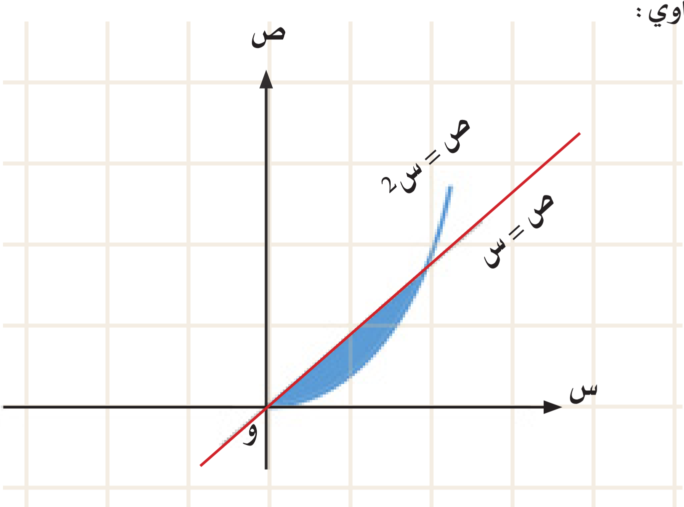
$$س = 0 \quad \text{أو} \quad س = 1$$

نفرض أن

$$ص_1 = س \text{ ، } ص_2 = س^2$$

نفرض عنصرًا صغيرًا من المنطقة موضحة كشريحة مظللة في شكل 5 -12 .

مساحة أي عنصر تساوي :



شكل5-12

المساحة المطلوبة تساوي:

$$= \int_0^1 (س - س^2)\, ءس$$

$$= \left. \frac{س^2}{2} - \frac{س^3}{3} \right|_0^1$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{1}{3}$$

$$= \frac{1}{6} \text{ وحدة مربعة}$$

المساحة المطلوبة تساوي $\frac{1}{6}$ وحدة مربعة.

مثال 8:

أوجد مساحة المنطقة المحاطة بالمنحنيين ص = س^2 ، ص^2= س

نوجد أولاً تقاطع هذين المنحنيين.

الحل:

ص = س^2 ⇐ ص^2 = س^4

عند نقط التقاطع ص^2= س

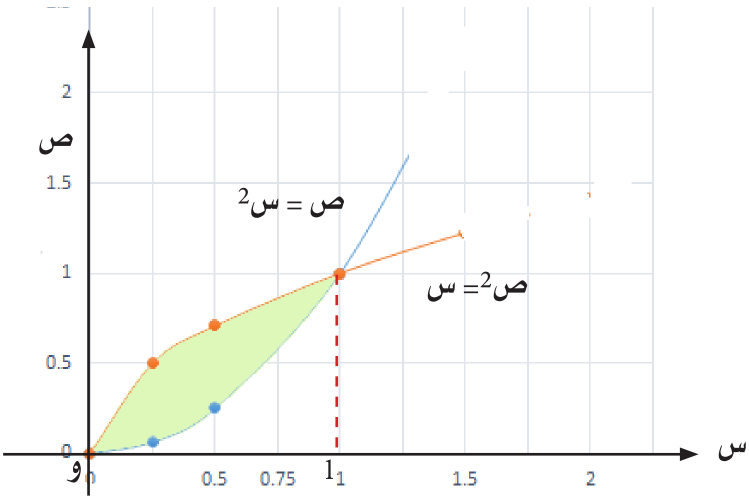
⇐ س^4 = س

⇐ س (س^3 − 1) = 0

⇐ س = 0 أو س = 1

خذ المنطقة المظللة كعنصر من المنطقة المطلوب إيجاد مساحتها. يعطى ارتفاعها بالعلاقة: ($\sqrt{\text{س}}$ - س^2)

مساحة العنصر تساوي($\sqrt{\text{س}}$ - س^2) Δس وحدة مربعة.



شكل 5-13

إذن المساحة المطلوبة تساوي :

$$\int_{0}^{1} (\text{ص}_1 - \text{ص}_2)\, \text{ءس}$$

$$= \int_{0}^{1} \left(\sqrt{\text{س}} - \text{س}^2\right) \text{ءس}$$

$$= 2\, \frac{\text{س}^{\frac{3}{2}}}{2} - \frac{\text{س}^3}{3} \Bigg|_{0}^{1}$$

$$= \frac{2}{3} - \frac{1}{3}$$

$= \frac{1}{3}$ وحدة مربعة

المساحة المطلوبة تساوي $\frac{1}{3}$ وحدة مربعة.

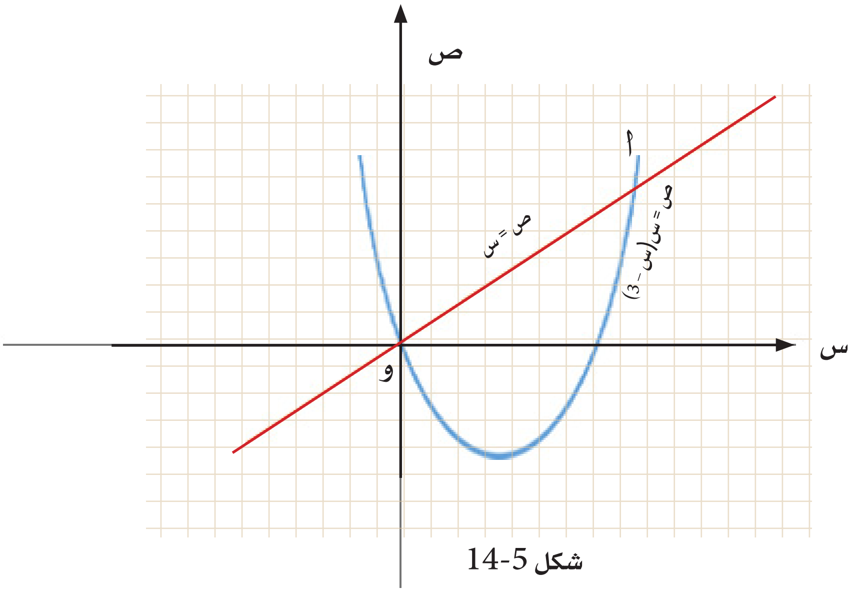
تمرين 5-ب

(1) أوجد مساحة المنطقة المحاطة بالمنحنى $ص^2$ = س والمستقيم س = 4

(2) يمر خط مستقيم بنقطة الأصل يقطع المنحنى $ص^2$ = س عند نقطة إحداثيها السيني هو ت. إذا علم أن المنطقة بين المنحنى والمستقيم تساوي $3\frac{1}{2}$ وحدة مربعة، فأوجد قيمة ت

(3) المنحنى ص = $س^3$ والمستقيم ص = 4س يتقاطعان عند النقطة ق $(\alpha،\beta)$، حيث $\alpha > 0$. احسب قيمة كل من $\alpha،\beta$. احسب مساحة المنطقة المحدودة بالمنحنى والقطعة المستقيمة و ق حيث و نقطة الأصل.

(4) يتقاطع المنحنى ص = س (س ـ 3) والخط المستقيم ص = س في نقطة الأصل (و) والنقطة أ كما هو موضح في شكل 5-14. أوجد إ

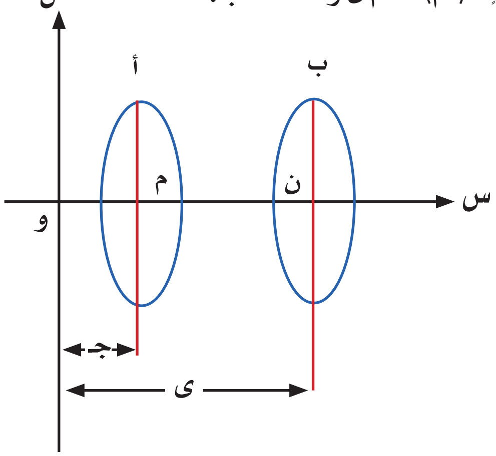


شكل 5-14

4-5 حجم المجسم الناشئ من الدوران:

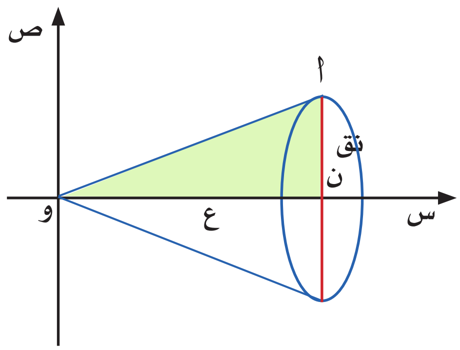
في شكل 5-14 ، أ ب ن م مستطيل حيث م، ن النقطتان (جـ ، 0) ، (ى، 0) على الترتيب. دار المستوى أ ب ن م حول محور س بزاوية قياسها 360° .

إذن أ ب ن م ينشئ مجسمًا دورانيًّا على شكل أسطوانة دائرية طول نصف قطرها أ م وطولها (جـ . ى) يكون حجم الأسطوانة حينئذٍ π (أ م)^2 X م ن وحدة مكعبة

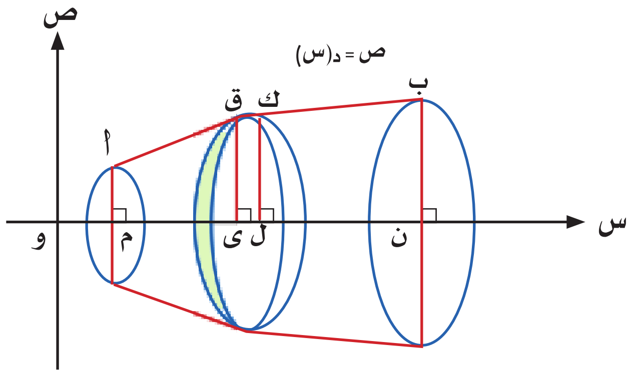


شكل 5-14

بالمثل في شكل 5-15، إذا كان و ن = ع، أ ن = نق، ودار المثلث و أ ن حول محور س بزاوية قياسها 360° ، فإن مجسم الدوران هو مخروط دائري قائم حجمه يساوي $\frac{1}{3}$ π نق^2 ع وحدة مكعبة

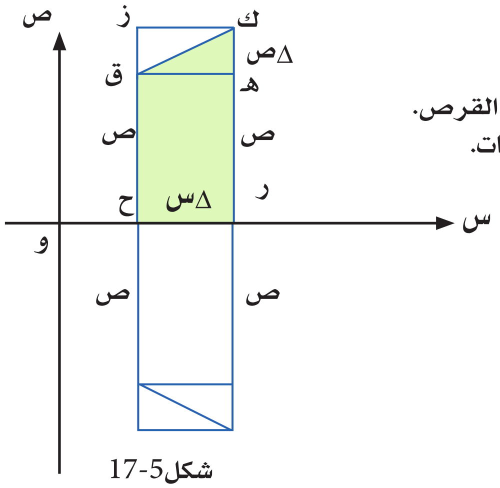


شكل 5-15



شكل 5-16

في شكل 5-17 أ ب جزء من المنحنى. ص = د(س) أ م ، ب ن خطان مستقيمان يوازيان محور الصادات، حيث م، ن هما النقطتان (أ ، 0)، (ب ، 0) علي الترتيب. وعند دوران أ ب ن م دورة كاملة حول محور السينات نحصل علي جسم دوراني. وبفرض أن حجم هذا الجسم ح وحدة مكعبة.
وإذا كان ق (س، ص) أية نقطة بين أ ، ب وأن نقطة ك (س + ∆س، ص + ∆ص) حيث ∆س زيادة صغيرة في س يتبعها تغير صغير في ∆ص. عند دوران الشريحة ق ك ل ى دورة كاملة حول محور السينات نحصل على قرص رقيق.
نفرض حجم هذا القرص ∆ح وحدة مكعبة.



شكل 5-17

يوضح شكل 5-17 تكبيرًا لهذا القرص.
ك ز، هـ ق يوازيان محور السينات.

لذلك حجم القرص الدوراني الناتج عن:

دوران المنطقة هـ ق ح ر = π ص^2 ∆س

دوران المنطقة ز ك ر ح = π (ص + ∆ص)^2 ∆س

إذن π ص^2 ∆س < ∆ح < π (ص + ∆ص)^2 ∆س

وبالقسمة على ∆س، π ص^2 < $\frac{\Delta \text{ح}}{\Delta \text{س}}$ < π (ص + ∆ص)^2

وعندما ∆س ← 0 ، فإن: ∆ص ← 0، $\frac{\Delta \text{ح}}{\Delta \text{س}}$ ← $\frac{\text{ءح}}{\text{ءس}}$

$$\underset{\Delta \text{س} \to 0}{\text{نهــا}} \frac{\Delta \text{ح}}{\Delta \text{س}} = \frac{\text{ءح}}{\text{ءس}} = \pi \, \text{ص}^2$$

$$\text{ح} = \int \left(\frac{\text{ءح}}{\text{ءس}}\right) \text{ءس}$$

$$= \int \pi \, \text{ص}^2 \, \text{ءس}$$

لدينا الآن حجم جسم دوراني كتكامل للدالة ص.

وعند تحرك نقطة ق من أ إلى ب فإن الحجم يعطى بتكامل محدود، لذلك حجم مجسم الدوارن يساوي:

$$ع = \int_{أ}^{ب} \frac{ءع}{ءس}\, ءس$$

$$ع = \int_{أ}^{ب} \pi\, ص^2\, \Delta س$$

$$ع = \int_{أ}^{ب} \pi\, ص^2\, ءس$$

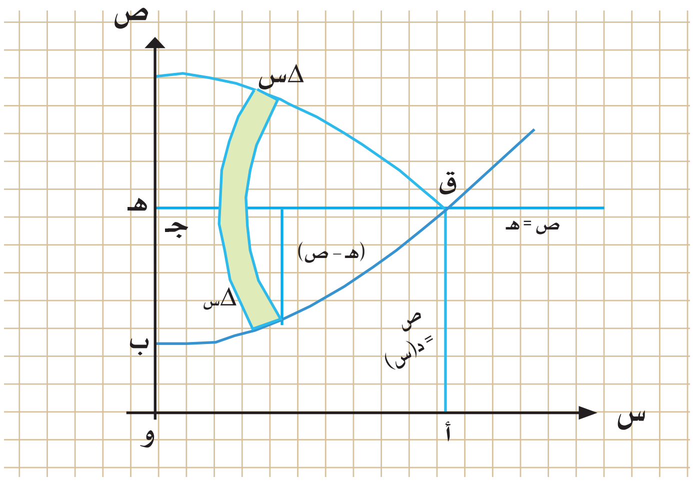
إذا دار المنحنى ص = د(س) حول محور ص دورة كاملة، فإن حجم الجسم الدوراني المتولد بين النقطتين اللتين إحداثياهما الصاديان هما أ، ب يعطيان بالعلاقة

$$ع = \int_{أ}^{ب} \pi\, س^2\, ء ص \quad \Leftarrow \quad ع = \pi \int_{أ}^{ب} [\,د(ص)\,]^2\, ء ص$$

تمرين :
أي خط مستقيم خلاف محور السينات ومحور الصادات يمكن استخدامه أيضًا كمحور دوران.

الطريقة السابقة لإجاد مجسم الدوران تعرف بطريقة القرص.

يوضح شكل 5-18 جزءًا من المنحنى ص = د(س) والخط المستقيم ص = هـ. نفرض أن نقطة تقاطع المنحني والمستقيم هي ق (أ، هـ)، فأوجد حجم الجسم الدوراني ق ب هـ، أي دوران المنطقة المحاطة بالمنحني والخط المستقيم ص = هـ ومحور ص حول المستقيم.



شكل 5-18

تأمل حجم العنصر المظلل في شكل 5-18 نفرض أن سمك هذه الشريحة الأسطوانية Δس، طول نصف قطر الأسطوانة الرقيقة يساوي (هـ - ص).

إذن: حجم الشريحة = π (هـ − ص)^2 Δس وإذا اعتبرناها شريحة للحجم من س = 0 إلى س = أ للمنحنى، فإن الحجم المطلوب يساوي:

$$\int_0^{\text{أ}} \pi\,(\text{هـ} - \text{ص})^2 \,\text{ءس}$$

بالمثل عند س = أ إلى س = ب، حيث أ > ب فإن:

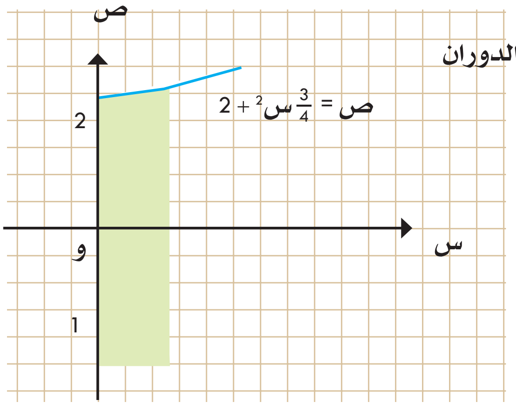
$$\text{حجم الجسم الدوراني} = \int_0^{\text{أ}} \pi\,(\text{هـ} - \text{ص})^2 \,\text{ءس}$$

مثال 9:

أوجد حجم الجسم الدوراني الناتج عن دوران المنطقة المحاطة بالمنحنى: ص = $\frac{3}{4}$ س^2 + 2، المحور س، المستقيمان س = 1، س = 0 عندما يدور دورة كاملة حول المحور س.

الحل:

يوضح شكل 5-19 جزءًا من مجسم الدوران



شكل 5-19

حجم الجسم الدوراني:

$$= \int_0^1 \pi\,\text{ص}^2\,\text{ءس}$$

$$= \int_0^1 \pi \left(\frac{3}{4}\text{س}^2 + 2\right)^2 \text{ءس}$$

$$= \int_0^1 \pi \left(\frac{9\text{س}^4}{16} + 3\text{س}^2 + 2\right) \text{ءس}$$

(يمكن إخراج π خارج علامة التكامل)

$$= \pi \left[\frac{9\text{س}^5}{16 \times 5} + \text{س}^3 + 4\text{س}\right]_0^1$$

$$= \pi \left(\frac{9}{5 \text{x} 16} + 1 + 4\right) - 0$$

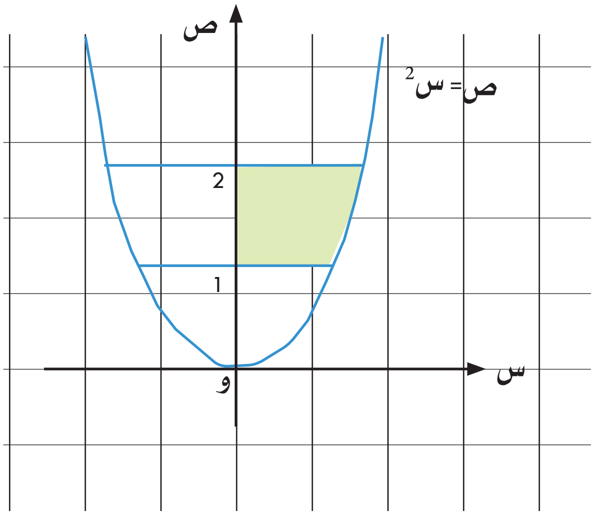
$$= \pi \left(5\frac{9}{80}\right)$$

$$= 5\frac{9}{80}\,\pi \text{ وحدة مكعبة}$$

الحجم المطوب $5\frac{9}{80}\,\pi$ وحدة مكعبة

مثال 10:

أوجد حجم الجسم الدوراني عندما تدور المنطقة المحاطة بالمنحنى ص = س^2، المستقيمات س = 0 ، ص = 1 ، ص = 2 في الربع الأول حول محور ص دورة كاملة.



شكل5-20

الحجم المطلوب

$$ع = \int_{1}^{2} \pi \text{ س}^2 \text{ ءص}$$

$$= \int_{1}^{2} \pi \text{ ص ءص}$$

$$= \pi \left[\frac{\text{ص}^2}{2}\right]_1^2$$

$$= 2\pi - \frac{1}{2}\pi$$

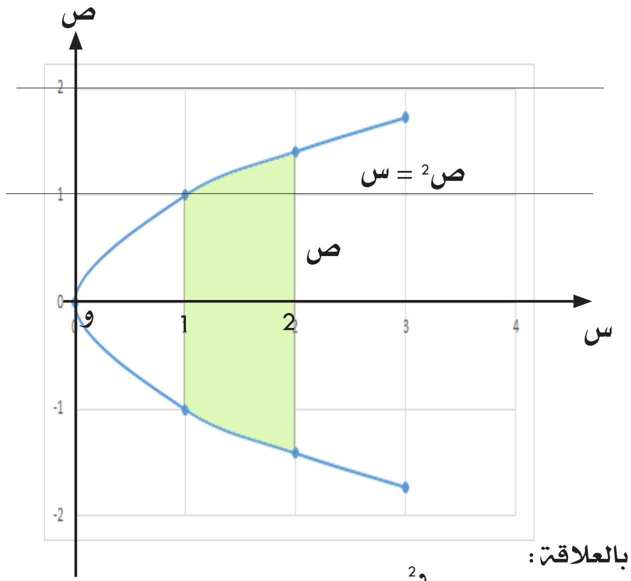
$$= \frac{1}{2}1\pi \text{ وحدة مكعبة.}$$

الحجم المطلوب يساوي $\frac{1}{2}1\pi$ وحدة مكعبة.

مثال 11:

دارت المنطقة المحاطة بالمنحنى ص^2 = س والمستقيمان س = 1 ، س = 2 حول محور س بزاويتين قائمتين، احسب حجم الجسم الناشئ عن الدوران

الحل:



شكل 5-21

يعطى الحجم بالعلاقة:

$= \int_{1}^{2} \pi$ ص^2 ءس

حيث المساحة المطلوبة تساوي $= \int_{1}^{2} \pi$ س ءس

$= \pi \left[\frac{\text{س}^2}{2} \right]_{1}^{2}$

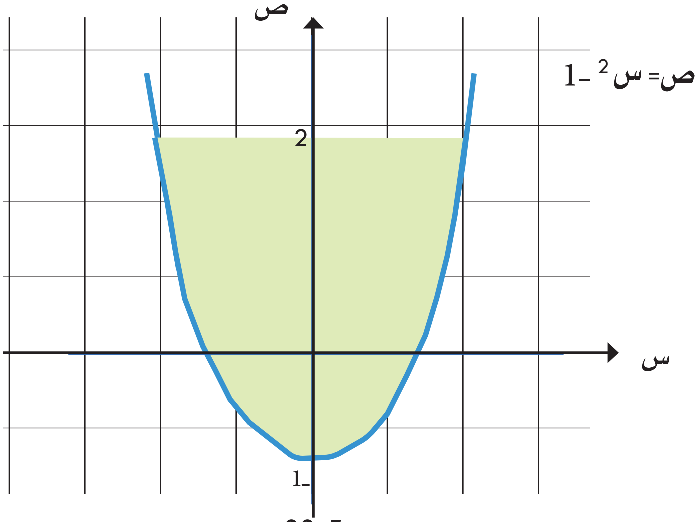
$= \pi \left(\frac{4}{2} - \frac{1}{2} \right)$

$= 1\frac{1}{2} \pi$

الحجم المطلوب $1\frac{1}{2} \pi$ وحدة مكعبة.

مثال 12:

احسب حجم الجسم الدوراني الناشئ عن دوران المنطقة المحاطة بالمنحنى والمستقيم ص=2 حول محور ص بزاويتين قائمتين.



شكل 5-22

ملحوظة

في هذا المثال كان الدوران بزاويتين قائمتين فقط حول محور الدوران. لاحظ أن محور الدوران هنا هو أيضًا محور تماثل للمنطقة المطلوب دورانها، في هذه الحالة، نحصل على جسم دوراني. عندما يكون محور الدوران ليس محور تماثل المنطقة، فإن الدورة الكاملة تلزم للحصول على جسم دوراني.

المنطقة المحاطة بالمنحنى ص = س^2−1 والمستقيم ص = 2 هي المنطقة المظللة في شكل 5 ـ 22. عندما تدور هذه المنطقة حول محور ص زاويتين قائمتين، فإن الحجم المولد من الدوران ح يعطى بالعلاقة:

$$\text{ع} = \pi\ \text{س}^2\ \text{ءص}$$

ولدينا $\text{ص} = \text{س}^2 - 1$

$$\Leftarrow \text{س}^2 = \text{ص} + 1$$

$$\therefore \text{ع} = \pi \int_{-1}^{2} (\text{ص} + 1)\ \text{ءص}$$

$$= \pi \left[\frac{\text{ص}^2}{2} + \text{ص}\right]_{-1}^{2}$$

$$= \pi\,(2 + 2) - \pi\left(\frac{1}{2} - 1\right)$$

$$= \pi\,(4) + \frac{1}{2}\pi$$

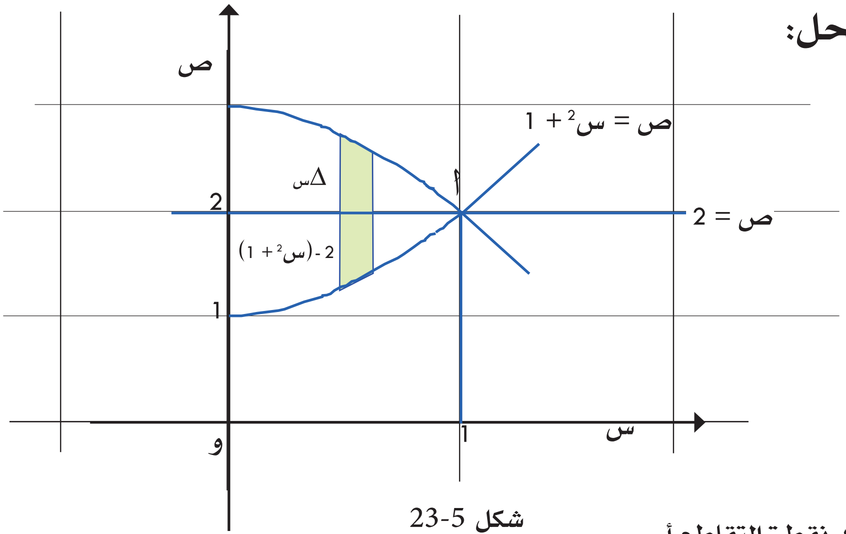
$$= 4\tfrac{1}{2}\pi \text{ وحدة مكعبة}$$

الحجم المطلوب يساوي $4\frac{1}{2}\pi$ وحدة مكعبة

مثال 13:

دارت المنطقة المحاطة بالمنحنى ص = $س^2 + 1$ والمستقيم ص = 2، محور ص 360 ° في الربع الأول دورة كاملة حول المستقيم ص = 2 . أوجد حجم المجسم الناشئ من الدوران.

الحل:



شكل 5-23

عند نقطة التقاطع أ

$$س^2 + 1 = 2$$

$$س^2 = 1$$

س = 1 (أخذنا القيمة الموجبة فقط)

حجم الشريحة يساوي $= \pi \left\{2 - (س^2 + 1)\right\}^2 \Delta س$

الحجم المطلوب يساوي $= \int_0^1 \pi \left\{2 - (س^2 + 1)\right\}^2 \, ءس$

$$= \pi \int_0^1 (2 - س^2 + 1)^2 \, ءس$$

$$= \pi \int_0^1 (1 - س^2)^2 \, ءس$$

$$= \pi \int_0^1 (1 - 2س^2 + س^4) \, ءس$$

$$= \pi \left[س - \frac{2س^3}{3} + \frac{س^5}{5} \right]_0^1$$

$$= \pi \left(1 - \frac{2}{3} + \frac{1}{5}\right) - 0$$

$= \frac{8}{15} \pi$ وحدة مكعبة

حجم الجسم المطلوب يساوي $\frac{8}{15} \pi$ وحدة مكعبة

تمرين 5-جـ

(1) في كل من الحالات الآتية، احسب الحجم المولَّد من دوران المنطقة المحاطة بالمنحنى المعلوم والمستقيم / المستقيمان، عندما تدور دورة كاملة حول محور س.

أعط الإجابة بدلالة π.

(أ) المنحنى ص = س^2 والمستقيمان ص = 0 ، س = 2

(ب) المنحنى ص = س^2 + 1 والمستقيمات ص = 0 ، س = 0 ، س = 2

(جـ) المنحنى ص = س^3 والمستقيمان ص = 0 ، س = 2

(د) المنحنى ص = $\frac{1}{س}$ والمستقيمان ص = 0 ، س = 1، س = 2

(2) المنطقة المحدودة بالمنحنى ص= س^2 - 1 والمستقيم ص= 1 دارت $180°$ حول محور السينات. احسب الحجم المولد بالدوران بدلالة π.

(3) المنطقة المحاطة بالمنحنى ص = $\sqrt{1 - س^2}$، محور السينات دارت دورة كاملة حول محور السينات. احسب الحجم المجسم الناشئ عن الدوران.

5-5 الحركة في خط مستقيم

تعلمنا أنه إذا تحرك جسيم في خط مستقيم بإزاحة ف من نقطة ثابتة في زمن ن،

إذن (حيث ع السرعة) $\text{ع} = \frac{\text{د ف}}{\text{د ن}}$

(حيث جـ العجلة) $\text{جـ} = \frac{\text{د ع}}{\text{د ن}}$

$$\text{جـ} = \frac{\text{د}}{\text{د ن}}\left(\frac{\text{د ف}}{\text{د ن}}\right) \quad \frac{\text{د}^2\text{ف}}{\text{د ن}^2}$$

$$\text{جـ} = \frac{\text{د ع}}{\text{د ن}} \quad \frac{\text{د}^2\text{ف}}{\text{د ن}^2}$$

على التتابع إذا علم $\frac{\text{د}^2\text{ف}}{\text{د ن}^2}$، نستطيع أن نوجد $\frac{\text{د ف}}{\text{د ن}}$، أي السرعة بالتكامل. بالمثل إذا علم $\frac{\text{د ف}}{\text{د ن}}$، نستطيع أن نوجد ف الإزاحة في كل حالة، إذ علمت القيم المناظرة لكل من (ع، ن أو ف، ن)، يمكن تحديد الثابت الاختياري،

إذا كان ف = د(ن) فإن الإزاحة بعد ب ثانية تعطى بالقيمة د(ب) والإزاحة بعد ى ثانية تكون د(ى). إذا لم يتغير اتجاه حركة الجسيم، فإن المسافة الكلية المقطوعة في ب ثانية تساوي د(ب) − د(0). في التكامل نعبر عن هذا بالصورة $\int_{0}^{\text{ب}} \text{ع د ن}$. للفترة الزمنية من ب ثانية إلى ى ثانية فإن المسافة المقطوعة تساوى $\int_{\text{ب}}^{\text{ى}} \text{ع د ن}$

مثال 14:

بدأ جسيم الحركة من نقطة ثابتة و، وتحرك في خط مستقيم. سرعته ع م/ث بعد ن ثانية تعطى بالعلاقة: ع = 4 ن + 1

(أ) أوجد معادلة الإزاحة ف بالأمتار، للجسيم من و بعد زمن ن.

(ب) ما هي إزاحته من و بعد 4 ثوان، بعد 5 ثوان.

(جـ) احسب المسافة المقطوعة في الثانية الخامسة.

الحل:

(أ) ع = 4 ن + 1

بالتكامل بالنسبة إلى ن، $\int \text{ع د ن} = \int (4\text{ن} + 1)\,\text{د ن}$

⇦ ف = 2 ن² + ن + ث (حيث ث ثابت)

حيث إن ف = 0 عند ن = 0، (حيث إن الجسيم بدأ من و حيث ف = 0).

∴ ف = 0 عندما ف = 0 ∴ ث = 0

ث = 0

ف = 2 ن² + ن

والإزاحة تعطى بالعلاقة ف = 2 ن² + ن

(ب) عندما ن = 4، فإن ف = 32 + 4 = 36

عندما ن = 5، فإن ف = 50 + 5 = 55

إزاحته من و بعد 4 ثوان، بعد 5 ثوان تساوي 36 مترًا و 55 مترًا على الترتيب.

(جـ) المسافة المقطوعة في الثانية الخامسة

= المسافة المقطوعة في 5 ثوان - المسافة المقطوعة في 4 ثوان)

= 55 - 36 = 19 مترًا

ملاحظة: هذه الإجابة يمكن أيضًا إيجادها من تعريف التكامل

$$\int_{4}^{5} (4\text{ن} + 1)\,\text{د ن} = [2\text{ن}^2 + \text{ن}]_{4}^{5}$$

= (50 + 5).(32 + 4) = 19

تأكد هنا أن المسافة المقطوعة، مثلا، في 5 ثوان الأولى تختلف عن المسافة المقطوعة في الثانية الخامسة فقط. المسافة المقطوعة في 5 ثوان الأولى هي المسافة التي قطعت من ن = 0 إلى ن = 5، بينما المسافة المقطوعة في الثانية الخامسة هي المسافة المقطوعة من ن = 4 إلى ن = 5.

مثال 15:

يتحرك جسيم في خط مستقيم بسرعة 4 م/ث مارًّا بنقطة ثابتة وعجلته جـ ^{2} م/ث تعطى بالعلاقة جـ = 2 ـ 12 ن^2، حيث ن بالثانية هو الزمن بعد المرور بالنقطة و .

احسب :

(أ) عجلة الجسيم عند النقطة و

(ب) سرعة الجسيم عندما ن = 2

(جـ) إزاحة الجسيم من و بعد ثانيتين

الحل:

(أ) عند النقطة و ، ن = 0

جـ = 2 ـ 0 = 2

عجلة الجسيم عند النقطة و = 2 م / ث^2

(ب) جـ = 2 - 12 ن ^{2}

(بالتكامل بالنسبة إلى ن)

∴ **السرعة** ع = 2 ن . 4 ن^3 + ث (حيث ث ثابت)

حيث إن سرعة الجسيم عند و تساوي 4 م/ث

∴ 4 = 2 (0) - 4 (0) + ث

⇦ ث = 4

ع = 2 ن - 4 ن^3 + 4

عندما ن = 2، فإن ع = 2(2) - 4(2)^3 + 4

= 4 ـ 32 + 4

= - 24 م/ث

سرعة الجسيم عندما ن = 2 تساوي – 24 م/ث

(جـ) ف = 2ن - 4ن^3 + 4

بالتكامل بالنسبة إلى ن :

الإزاحة ف تساوي

ف = ن^2 ـ ن^4 + 4 ن + ث$_1$ (حيث ث$_1$ ثابت)،

لكن ف = 0 عندما ن = 0

ث$_1$ = 0

ف = ن^2 - ن^4 + 4ن

ف = 4ن - ن^2 + ن^4

عندما ن = 2، ف = 4(2) + (2)^2 - (2)^4

= 8 + 4 - 16

= - 4 **أمتار**

إزاحة الجسيم بعد ثانيتين تساوي ـ 4 أمتار

مثال 16:

يتحرك جسيم في خط مستقيم بسرعة $ع = أ ن^2 + ب ن$، حيث أ ، ب ثوابت. وعندما مر الجسيم بنقطة ثابتة و كانت عجلة الجسيم 2 م/ث^2. ويقطع الجسيم 81 مترًا في الثانية الرابعة. أوجد قيمة كل من أ، ب حيث المسافة بالمتر والزمن بالثانية.

الحل:

$$ع = أ ن^2 + ب ن$$

$$\frac{دع}{دن} = 2 أ ن + ب$$

عندما ن = 0، فإن العجلة تساوي 2 م/ث^2.

$$2 = 0 + ب$$

$$ب = 2$$

$$\therefore\ ع = أ ن^2 + 2 ن$$

المسافة المقطوعة في الثانية الرابعة تساوي

$$\int_3^4 ع\, دن = \int_3^4 (أ ن^2 + 2 ن)\, دن$$

$$= \left[\frac{أ ن^3}{3} + ن^2\right]_3^4$$

$$= \left(\frac{64 أ}{3} + 16\right) - (9 أ + 9)$$

$$= 21\frac{1}{3} أ + 16 - 9 أ - 9$$

$$= 12\frac{1}{3} أ + 7$$

حيث إن المسافة المقطوعة في الثانية 81 مترًا

$$12\frac{1}{3} أ + 7 = 81$$

$$12\frac{1}{3} أ = 74$$

$$أ = \frac{74}{12\frac{1}{3}}$$

$$أ = 6$$

إذن $أ = 6$ ، $ب = 2$

تمرين 5-د

(1) إذا كان $\frac{ءف}{ءن} = 6ن$ ، فأوجد ف بدلالة ن بفرض أن ف = 1 عندما ن = 0.

(2) إذا كان $\frac{ء^2ف}{ءن^2} = 2ن^2$ ، ف = 2 عندما ن = 0 ، فأوجد ف بدلالة ن.

(3) إذا كان $\frac{ء^2ف}{ءن^2} = 24ن$ ، $\frac{ءف}{ءن} = 1$، ف = 0 عندما ن = 0 ، فأوجد ف بدلالة ن.

(4) يتحرك جسيم في خط مستقيم بحيث عجلته بعد ن ثانية تساوي جـ م/ ث^2، حيث جـ = ن^2 – 2ن إذا كانت السرعة الابتدائية للجسيم تساوي 8 م / ث، فأوجد سرعته بعد ثانيتين.

(5) يتحرك جسيم في خط مستقيم وبعد ن ثانية من مروره بنقطة ثابتة و على المستقيم، تعطى سرعته ع م / ث بالعلاقة ع = 3ن^2 – 2ن.

(أ) أوجد الزمن عندما يكون الجسيم ساكنًا لحظيًا.

(ب) أوجد إزاحات الجسيم في هذه اللحظات..

(6) يتحرك جسيم في خط مستقيم بسرعة ع م/ث ، ن ثانية بعد مروره بنقطة ثابتة و تعطى بالعلاقة
ع = 9 ن^2 . 2ن + 1. احسب:

(أ) إزاحته من و عندما ن = 2

(ب) المسافة التي قطعت أثناء الثانية الثانية.

(7) يمر جسيم بنقطة ثابتة و بسرعة 15 م / ث ، يتحرك على خط مستقيم بعجلة (10 . 4ن) م / ث^2 حيث ن الزمن بالثانية بعد مروره بالنقطة و. احسب :

(أ) قيمة ن عندما تساوي السرعة لحظيًا صفرًا.

(ب) المسافة التي قطعها الجسيم في الثانية الثانية.

(8) بدأ جسيم من النقطة و الحركة على خط مستقيم بحيث سرعته ع م/ث و بعد زمن ن ثانية تتعين بالعلاقة
ع = 3ن - ن^2.

احسب :

(أ) المسافة التي قطعها الجسيم قبل الوقوف لحظيًا.

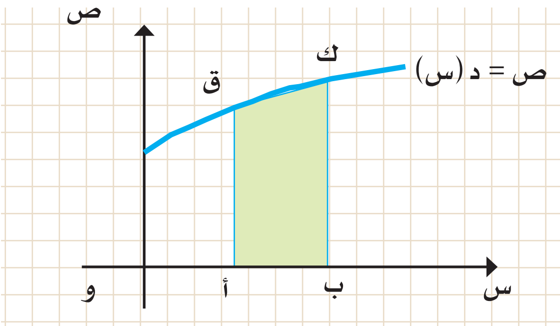
(ب) الزمن اللازم قبل عودة الجسيم إلى النقطة و .

⌖ الملخص

(1) المنطقة المظللة بين المنحنى ص = د (س)،

س = أ ، س = ب ، محور السينات كما هو

موضح في شكل 5-30 تعطى بـ $\int_{أ}^{ب}$ ص ءس

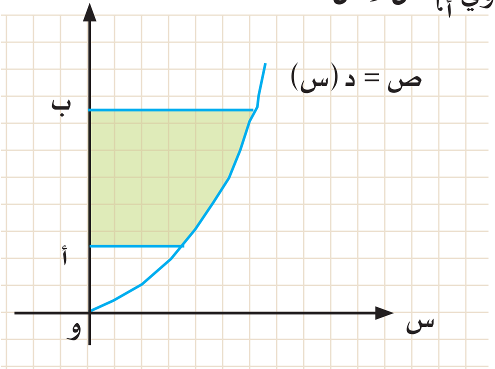


شكل 5-24

(2) المنطقة المظللة بين المنحنى

ص = د (س)، ص = أ، ص = ب، محور الصادات

في شكل 5-31 يساوي $\int_{أ}^{ب}$ س ءص



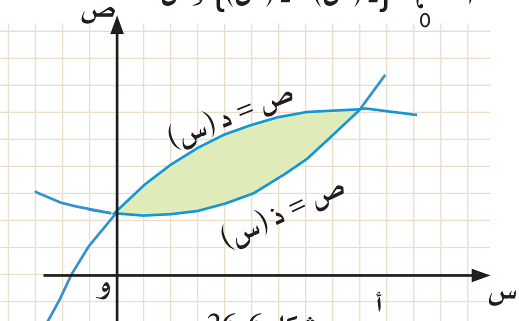
شكل 5-25

(3) المنطقة بين الشكلين البيانيين والموضحة كمنطقة مظللة في شكل 5-25 تساوي

$$م = \int_{0}^{أ} د(س)\,ءس - \int_{0}^{أ} ذ(س)\,ءس$$

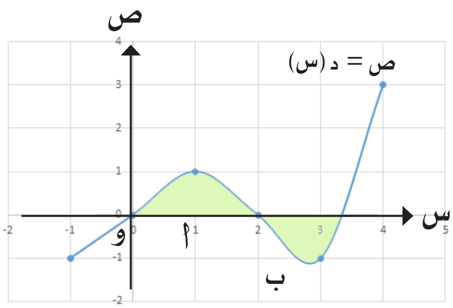
أو:

$$م = \int_{0}^{أ} \{د(س) - ذ(س)\}\,ءس$$



شكل 6-26

(4) مساحة المنطقة المحصورة بين المنحنى ص = د (س)، ومحور السينات، تمثلها المنطقة المظللة في شكل 5-27 هي أ + القيمة المطلقة للمساحة ب (بالتكامل نحصل على قيمة سالبة للمقدار ب لأن المنطقة تحت محور السينات. حيث نأخذ القيمة الموجبة للمساحة)

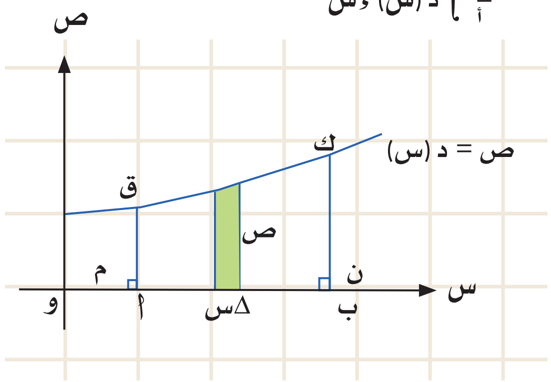


شكل 5-27

(5) المنطقة ق ك ن م في شكل 5-27 مكونة من شرائح مساحتها ص × Δس.
المساحة ق ك ن م تعطى كالآتي:

$$\text{المساحة} = \sum_{\text{س} = \text{أ}}^{\text{س} = \text{ب}} \text{ص} \, \Delta\text{ص}$$

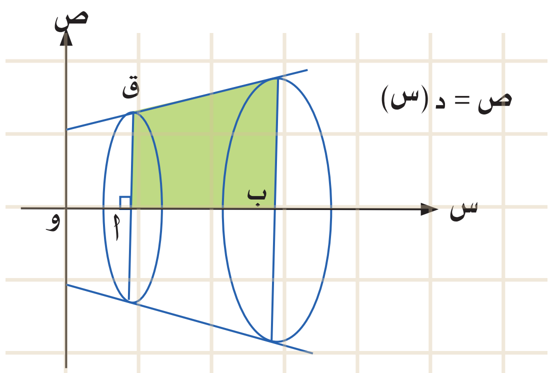
$$= \int_{\text{أ}}^{\text{ب}} \text{د (س) ءس}$$



شكل 5-28

(6) عندما تدور المنطقة المظللة في شكل 5-28 دورة كاملة حول محور السينات، فإن حجم المجسم الدوراني هو

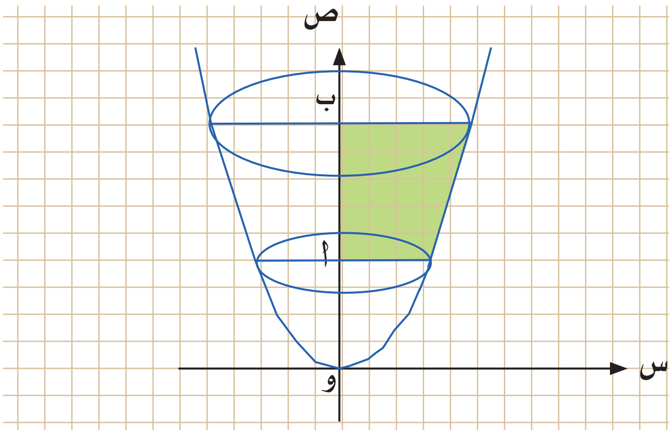
$$\text{ح} = \int_{\text{أ}}^{\text{ب}} \pi \, \text{ص}^2 \, \text{ءس}$$



شكل 5-29

(7) عندما تدور المنطقة المظللة في شكل 5-30 حول محور الصادات دورة كاملة، فإن حجم الجسم الدوراني المتولد يساوي

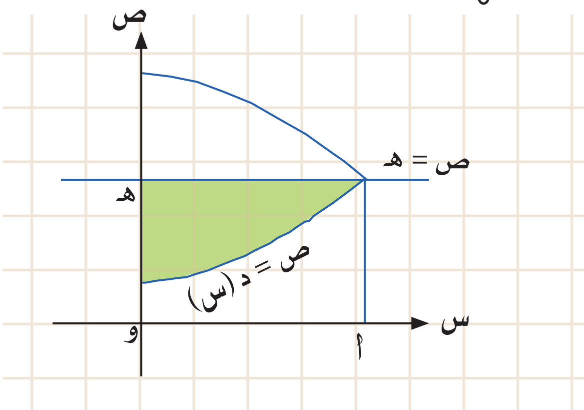
$$ح = \int_{أ}^{ب} \pi\, س^2\, ءص$$



شكل 5-30

(8) عندما تدور المنطقة المظللة في شكل 5-31 حول ص = هـ دورة كاملة، فإن حجم المجسم المولد من الدوران:

$$ح = \int_{0}^{أ} \pi\, (هـ - ص)^2\, ءس$$



شكل 5-32

(9) إذا كانت إزاحة جسيم متحرك في خط مستقيم من نقط ثابتة تساوي ف بعد زمن ن، فإن:

(أ) السرعة: $ع = \frac{ءف}{ءن}$

(ب) العجلة: $جـ = \frac{ءع}{ءن} = \frac{ء^2ف}{ءن^2}$

(جـ) الإزاحة بعد زمن ن،

$$\text{ف} = \int_{0}^{\text{ن}} \text{ع}\ \text{ءن}$$

(د) المسافة المقطوعة في الثانية ى تساوي $= \int_{\text{ى}-1}^{\text{ى}} \text{ع}\ \text{ءن}$

إذا كان $\text{جـ} = \dfrac{\text{ءع}}{\text{ءن}}$

$$\text{ع} = \int \text{جـ}\ \text{ءن} = \int \frac{\text{ءع}}{\text{ءن}}\ \text{ءن}$$

$$\text{ف} = \int \text{ع}\ \text{ءن}$$

توجيهات للمراجعة:

يمكن استخدام التكامل المحدود في الآتي:

1 المناطق المستوية بين منحنى ومحور
2 المناطق المستوية بين منحنيين (بين حدود معلومة)
3 الحجوم الناشئة عن الدوران
4 الإزاحة، السرعة، العجلة (حركة جسيم في خط مستقيم أو كينماتيكا)

عند تحديد الحجوم الناشئة عن الدوران ، لاحظ بدقة محاور الدوران وتذكر أن تربع الدالة قبل التكامل. ولاتنس الـ: π في التكامل.
في المسائل عن الكينماتيكا، من المهم أن تتصور الحركة خصوصًا عند النقط حيث يعكس الاتجاه.

أسئلة عصف ذهني:

(1) أعط توضيحًا هندسيًا لكل من النتائج الآتية التي تتضمن تكاملات محدودة

(أ) $\int_{\text{أ}}^{\text{ب}} \text{ك}\ \text{د(س)}\ \text{ءس} = \text{ك} \int_{\text{أ}}^{\text{ب}} \text{د(س)}\ \text{ءس}$

(ب) $- \int_{\text{أ}}^{\text{ب}} \text{د(س)}\ \text{ءس} = - \int_{\text{أ}}^{\text{ب}} \text{د(س)}\ \text{ءس}$

(جـ) $\int_{\text{أ}}^{\text{ب}} [\text{د(س)} - \text{هـ(س)}]\ \text{ءس} = \int_{\text{أ}}^{\text{ب}} \text{د(س)}\ \text{ءس} - \text{هـ(س)}\ \text{ءس}$

(د) إذا كان $\text{د(س)} \leq \text{هـ(س)}$، فإن $\int_{\text{أ}}^{\text{ب}} \text{د(س)}\ \text{ءس} \leq \text{هـ(س)}\ \text{ءس}$ حيث $\text{أ} \leq \text{س} \leq \text{ب}$

(هـ) $\int_{\text{أ}}^{\text{ب}} \text{د(س)}\ \text{ءس} + \int_{\text{أ}}^{\text{جـ}} \text{د(س)}\ \text{ءس} = \int_{\text{أ}}^{\text{جـ}} \text{د(س)}\ \text{ءس}$

(2) إذا كان $\int_{\text{أ}}^{\text{ب}} \text{د(س)}\ \text{ءس} = 0$، هل هذا يعني أن د دالة صفرية؟

(3) هل $\int_{\text{أ}}^{\text{ب}} \text{د(س)}\ \text{ءس} = \left| \int_{\text{أ}}^{\text{ب}} |\text{د(س)}|\ \text{دس} \right|$؟

إذا لم يكن كذلك، فأعط مثالًا مضادًّا (معاكسًا) وأعد كتابة ما سبق مع تصويب الخطأ.

(4) إذا كان $\int^{\text{أ}} \text{د(س)}\ \text{ءس} = \text{أ}$. فأوجد $\int^{\text{أ}+\text{ك}} \text{د(س} - \text{ك)}\ \text{ءس}$، $\int^{\text{أ}-\text{ك}} \text{د(س} + \text{ك)}\ \text{ءس}$؟

تمرين 5-هـ

المساحة بين منحنى والمحورين س ، ص

(أ) إذا كان د(س) ليس صفرًا دائمًا. فوضح المفهوم الهندسي للآتي:

$\int_{0}^{4} \text{د(س)} \, \text{ءس} = 0$

(ب) إذا كان $\int_{1}^{5} \text{هـ(س)} \, \text{ءس} = 4$، فاحسب:

(1) $\int_{1}^{5} 2 \, \text{هـ(س)} \, \text{ءس}$،

(2) $\int_{1}^{5} [\text{هـ(س)} + 3] \text{ءس}$،

(3) $\int_{1}^{5} \text{هـ(س)} \, \text{ءس}$،

أوجد قيمة ك التي تجعل

$\int_{1}^{5} [\text{هـ(س)} + \text{ك س}] \, \text{ءس} = 28$،

(2) إذا كان $\int_{0}^{2} \text{د(س)} \, \text{ءس} = \int_{2}^{3} \text{د(س)} \, \text{ءس} = 5$، فأوجد:

(أ) $\int_{0}^{3} \text{د(س)} \, \text{ءس}$،

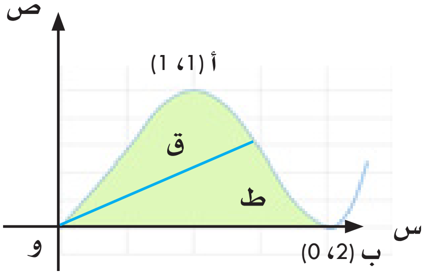
(ب) $\int_{0}^{2} \text{د(س)} \, \text{ءس} + \int_{3}^{2} \text{د(س)} \, \text{ءس}$،

(جـ) $\int \{4 \, \text{د(س)} + 2\} \, \text{ءس}$،

وأيضًا، بفرض أن د(- س) = د(س)،

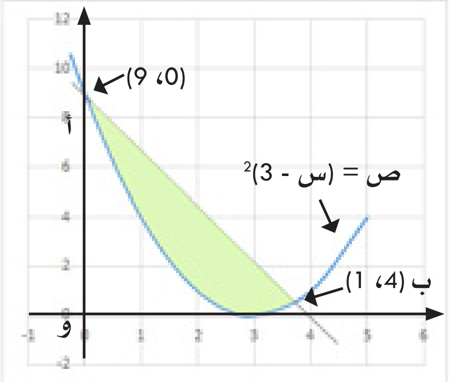
فأوجد قيمة $\int \text{د(س)} \, \text{ءس}$

(3) يوضح شكل5-33 جزءًا من المنحنى ص = س (س - 2)^2 المار بالنقطة أ (1، 1) ويمس محور س في النقطة ب (2، 0) اثبت أن مساحة المنطقة ق تساوي $\frac{5}{12}$ وحدة مربعة، أوجد نسبة مساحة ق إلى مساحة ط.



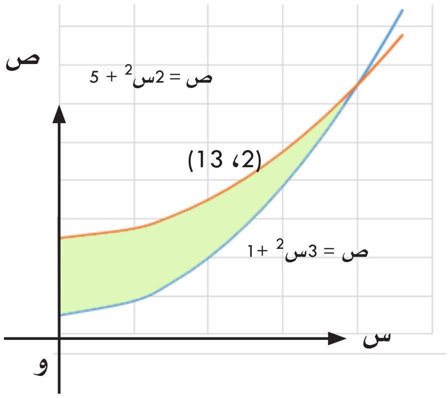
شكل 5-33

(4) يوضح شكل 5-34 جزءًا من المنحنى ص = (س − 3)^2 يقطعه مستقيم عند النقطتين أ (0، 9)، ب (4، 1). احسب مساحة المنطقة المظللة.

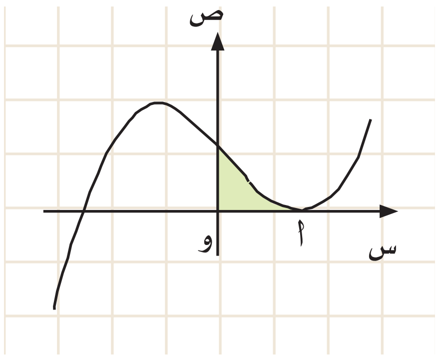


شكل 5-34

(5) يوضح شكل 5-35 جزءًا من المنحنيين ص=2 س^2 + 5، ص=3 س^2 +1 المتقاطعان في النقطة (2، 13). أوجد مساحة المنطقة المظللة.



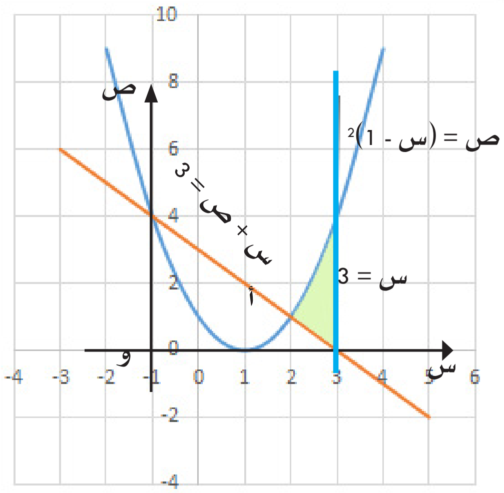
شكل 5-35



شكل 5-36

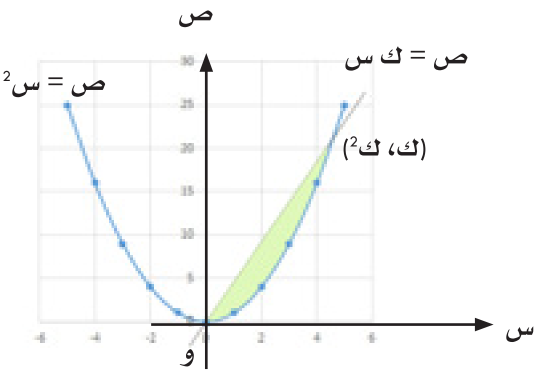
الشكل 5-36 يبين جزءًا من المنحنى ص = س^3 – 12س + ك.
فإذا كان لهذا المنحنى نقطة صغرى عند أ على المحور س،
فأوجد:
(أ) قيمة ك.
(ب) مساحة المنطقة المظللة.

(12) (أ) (1) أوجد مساحة المنطقة المحصورة بين المنحنى ص = $\frac{12}{\text{س}^2}$، محور س والمستقيمين س = 1، س = 3.
(2) مساحة المنطقة المحصورة بالمنحنى ص = $\frac{12}{\text{س}^2}$، المحور س، المستقيمين س=2، س = أ، حيث أ > 2، هي 3.6 وحدة مربعة. أوجد قيمة أ.



شكل 5-37

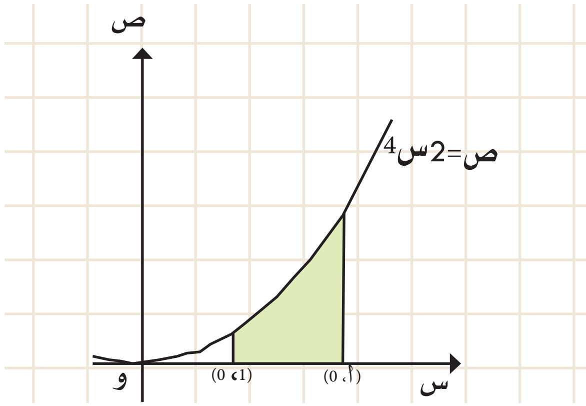
يبين الشكل 5-37 منطقة مظللة محصورة بين المنحنى ص = (س-1)^2 والمستقيمين س + ص = 3، س = 3.
أوجد:
(1) إحداثيا النقطة أ،
(2) مساحة المنطقة المظللة.



شكل 5-38

يبين الشكل 5-38 جزءًا من المنحنى ص=س^2 والمستقيم ص = ك س، حيث ك ثابت موجب. احسب: قيمة ك إذا كانت مساحة المنطقة المظللة 0.288 وحدة مربعة.

المنطقة المظللة في شكل 5-39 محصورة بين المنحنى ص= 2 س^4، والمحور س والمستقيمين س = 1، س = أ
فإذا علمت أن مساحة هذه المنطقة 12.4 وحدة مربعة، فاحسب قيمة أ.



شكل 5-39

استقصاء الرياضيات

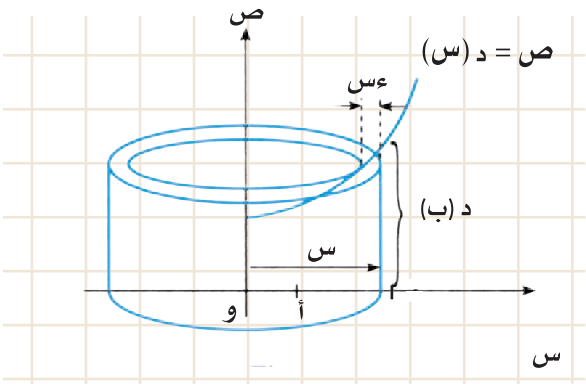
وجدنا الحجم الناشئ عن الدوران بعمل شرائح للحجم الدوراني للحصول على عناصر على شكل «أقراص» (أو «حلقات» معدنية)، إذا كانت هناك فجوة عند المركز) ثم نجري عملية التكامل. والقوانين هي:

$ع = \int_{أ}^{ب} ص^2 \, ءس$ إذا كان محور الدوران هو محور السينات.

$ع = \int_{أ}^{ب} س^2 \, ءص$ إذا كان محور الدوران هو محور الصادات.

هنا، أيضًا، طريقة أخرى لإيجاد الحجم الناشئ عن الدوران (والتي لاتحتاج أي تربيع)، وهي تعرف طريقة القشرة الأسطوانية. في هذه الطريقة، بدلا من إجراء تكامل للأقراص، فإننا نكامل قشرات اسطوانية.

نفرض دالة ص = د (س) على فترة أ $\leq$ س $\leq$ ب والتي لا تقطع محور الصادات.



شكل 5-40

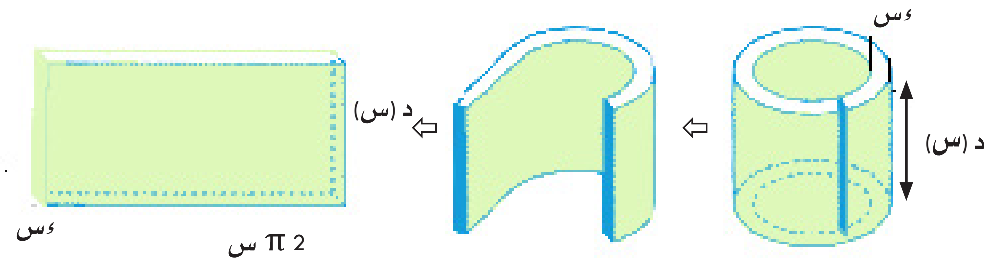
نفرض أننا نريد إيجاد الحجم المولَّد من دوران المنطقة المحاطة بالدالة ص= د (س) والمستقيمات، س = أ، س = ب، س = 0 حول محور ص.

نرسم أولاً، قشرة أسطوانة طول نصف قطرها س ، وارتفاعها د (س) وسمكها ءس.

إذا جمعنا (أجرينا التكامل) حجم هذه القشرة من س= أ إلى س= ب، نحصل على الحجم الذي نريده عن الدوران. أي أن الحجم ح يتعين من:

$$ح = \int_{أ}^{ب} 2\pi \, \underbrace{س}_{\text{نصف قطر الشريحة}} \, \underbrace{د(س)}_{\text{ارتفاع القشرة}} \, ءس$$

> **ملحوظة...**
> حجم القشرة حوالي:
> 2π س د (س) ءس كما يمكن أن نراه في الأشكال الآتية:



غالبا متوازي مستطيلات | إفراد | قطع

الحجم = 2 π س . د (س) . ءس

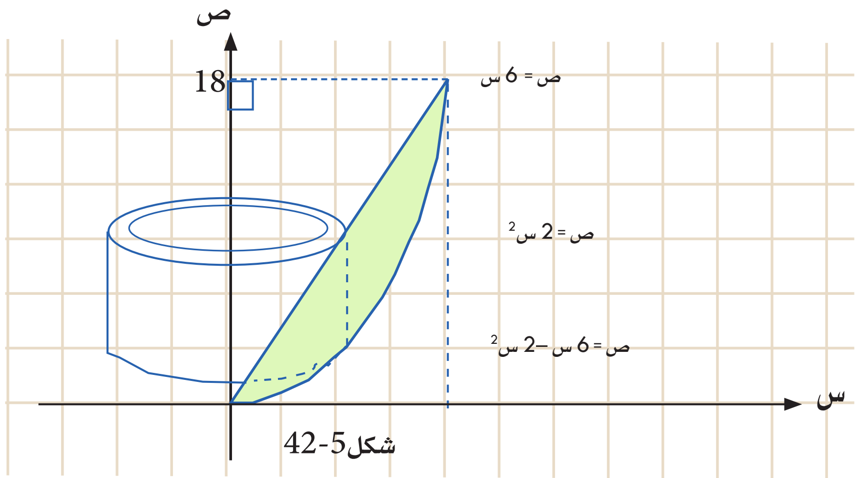
شكل 5-41

الارتفاع: د (س) المحيط الداخلي: 2 π س السُمك : ءس

الإجراءات المتبعة في الدوران حول المحور س مشابهة.

مثال 21:

احسب الحجم المولَّد عندما تدور المنطقة المظللة °360 حول محور الصادات



شكل 5-42

ارتفاع القشرة = $6\text{س} - 2\text{س}^2$

الحجم = $\int_0^3 2\pi\,\text{س}\,(6\text{س} - 2\text{س}^2)\,\text{ءس}$

$= 2\pi \int_0^3 (6\text{س}^2 - 2\text{س}^3)\,\text{ءس}$

$= 2\pi \left[\frac{6\text{س}^3}{3} - \frac{2\text{س}^4}{4}\right]_0^3$

$= 2\pi \left[2\text{س}^3 - \frac{\text{س}^4}{2}\right]_0^3$

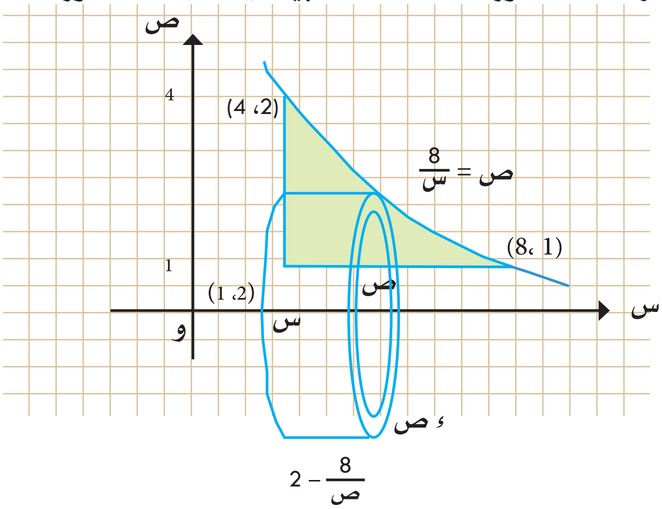
$= 27\pi$

الحجم المطلوب يساوي 27π وحدة مكعبة

ملحوظة
إذا كان محور الدوارن هو محور ص ، نكامل بالنسبة إلى س، وتتكون القشرة الأسطوانية مع محور ص كمحورها. بالنسبة للدوران حول محورس ، يستخدم العكس.

مثال22 :

احسب الحجم المتولد عندما تدور المنطقة المظللة المبينة في شكل 5-43، دورة كاملة حول المحور س.



شكل 5-43

الحل:

ارتفاع القشرة = $\frac{8}{\text{ص}} - 2$ بين ص = 4، ص = 1

الحجم = $\int_1^4 2\pi\,\text{ص}\,(\frac{8}{\text{ص}} - 2)\,\text{ءص}$

$= 2\pi \int_1^4 (8 - 2\text{ص})\,\text{ءص}$

$= 2\pi \left[8\text{ص} - \text{ص}^2\right]_1^4$

$= 18\pi$

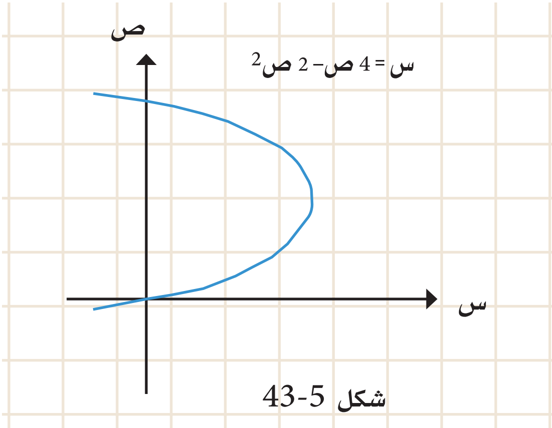
الحجم يساوي 18π وحدة مكعبة

أنشطة:

(1) قارن بين طريقة القشرة الأسطوانية وطريقة القرص، ولاحظ مميزات وعيوب كل طريقة.

(2) كيف تستخدم طريقة الدوران حول محور خلاف المحور س أو المحور ص؟ مثلًا، أوجد حجم المجسم المولد بالدوران حول المستقيم س = −1، للمنطقة المحدودة بالمنحنى = (س − 2)^2 ص والمستقيم س = ص .

(3) كيف تولد طريقة القشرة حجومًا من منحنيان مثل س = 4ص − 2ص^2 حول المحور ص؟



شكل 5-43

(4) حل بعض المسائل عن المجسمات المولدة بالدوران في تمرين 5-هـ متنوع مستخدمًا طريقة القشرة ثم خذ قرارك المفضل.

6 تفاضل وتكامل الدوال المثلثية

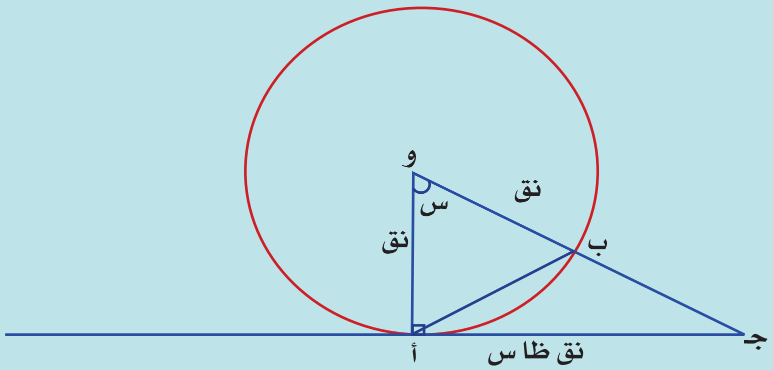
Differentiation and Integration of Trigonometric Functions

تفاضل وتكامل الدوال المثلثية

Differentiation and Integration of Trigonometric Functions

6-1 مفاهيم أساسية:

$\lim_{س \to 0} \frac{جاس}{س}$ ، حيث س بالراديان .



شكل 6-1

في شكل 6-1، و مركز الدائرة، نق طول نصف القطر ، أ جـ مماس للدائرة ، أ ب وتر.

ق $\measuredangle$ أ و ب = س حيث س بالراديان (زاوية نصف قطرية) في المثلث القائم و أ جـ،

$$ظا س = \frac{أ جـ}{نق}$$

أ جـ = نق ظا س

من الشكل، نجد أن متباينة المساحة هي

مساحة Δ أ و ب < مساحة القطاع الدائري أ و ب < مساحة Δ و أ جـ .

$$\therefore \frac{1}{2} نق^2 جا س < \frac{1}{2} نق^2 س < \frac{1}{2} نق^2 ظا س$$

بالقسمة على $\frac{1}{2}$ نق^2 جا س

$$1 < \frac{س}{جا س} < \frac{1}{جتا س}$$

الآن عندما س $\longrightarrow$ 0 ، فإن جتا س $\longrightarrow$ 1، $\frac{1}{جتا س} \longrightarrow 1$.

قيمة $\frac{س}{جا س}$ تقع بين 1، $\frac{1}{جتا س}$.

$\therefore$ عندما س $\longrightarrow$ 0 ، فإن $\frac{س}{جا س} \longrightarrow 1$.

$$\therefore \quad \underset{\text{س} \to 0}{\text{نهـا}} \frac{\text{س}}{\text{جا س}} = 1.$$

لدينا $\dfrac{\text{جا س}}{\text{س}} = \dfrac{1}{\dfrac{\text{س}}{\text{جا س}}}$

$$\therefore \quad \underset{\text{س} \to 0}{\text{نهـا}} \frac{\text{جا س}}{\text{س}} = \underset{\text{س} \to 0}{\text{نهـا}} \frac{1}{\dfrac{\text{س}}{\text{جا س}}}$$

$$= \frac{1}{1} = 1$$

أي أن $\underset{\text{س} \to 0}{\text{نهـا}} \dfrac{\text{جا س}}{\text{س}} = 1$

لاحظ أن هذه النتيجة صواب فقط عندما يكون قياس (س) بالراديان. في هذا الفصل جميع قياسات الزوايا قِيسَت بالراديان، مالم يذكر غير ذلك.

مفاهيم أساسية:

(1) $\underset{\text{س} \to 0}{\text{نهـا}} \dfrac{\text{جا س}}{\text{س}} = 1.$

(2) $\underset{\text{س} \to 0}{\text{نهـا}} \dfrac{\text{ظا س}}{\text{س}} = 1.$

(3) $\underset{\text{س} \to 0}{\text{نهـا}} \dfrac{\text{جا}^{\text{ن}} (\text{م س})}{(\text{م س})^{\text{ن}}} = 1$

(4) $\underset{\text{س} \to 0}{\text{نهـا}} \dfrac{\text{ظا}^{\text{ن}} (\text{م س})}{(\text{م س})^{\text{ن}}} = 1$

(5) $1 - \text{جتا س} = 2 \, \text{جا}^2 \dfrac{\text{س}}{2}$

(6) $1 - \text{جتا } 2\text{س} = 2 \, \text{جا}^2 \text{ س}$

مثال 1 :

أوجد $\underset{\text{س} \to 2}{\text{نهـا}} \dfrac{\text{جا (س - 2)}}{7\text{س} - 14}$

الحل:

$$\underset{\text{س} \to 2}{\text{نهـا}} \frac{\text{جا (س - 2)}}{7\text{س} - 14} = \underset{\text{س} \to 2}{\text{نهـا}} \frac{\text{جا (س - 2)}}{7\,(\text{س - 2})}$$

$$= \frac{1}{7} \underset{\text{س} \to 2}{\text{نهـا}} \frac{\text{جا (س - 2)}}{(\text{س - 2})}$$

$$= \frac{1}{7} \times 1$$

$$= \frac{1}{7}$$

مثال 2 :

أوجد $\lim\limits_{\text{و} \to 0} 5\,\text{و}\ \text{قتا}\ \text{و}$

الحل:

$$\lim\limits_{\text{و} \to 0} 5\,\text{و}\ \text{قتا}\ \text{و} = \lim\limits_{\text{و} \to 0} \frac{\text{و}}{\text{حا}\ \text{و}}$$

$$= 5 \times 1 = 5$$

مثال 3 :

أوجد $\lim\limits_{\text{ص} \to -3} \dfrac{\text{ظا}^2(\text{ص}+3)}{\text{ص}^2 + 6\,\text{ص} + 9}$

الحل:

$$\lim\limits_{\text{ص} \to -3} \frac{\text{ظا}(\text{ص}+3)}{\text{ص}^2 + 6\,\text{ص} + 9} = \lim\limits_{\text{ص} \to -3} \frac{\text{ظا}^2(\text{ص}+3)}{(\text{ص}+3)^2} = 1$$

مثال 4 :

أوجد $\lim\limits_{\text{س} \to 0} \dfrac{\text{جا}^3(\frac{\text{س}}{2})}{\text{س}^3}$

الحل:

$$\lim\limits_{\text{س} \to 0} \frac{\text{جا}^3(\frac{\text{س}}{2})}{\text{س}^3} = \lim\limits_{\text{س} \to 0} \frac{\text{جا}^3(\frac{\text{س}}{2})}{(2 \times \frac{\text{س}}{2})^3} = 1$$

$$= \frac{1}{8} \lim\limits_{\text{س} \to 0} \frac{\text{جا}^3(\frac{\text{س}}{2})}{(\frac{\text{س}}{2})^3}$$

$$= \frac{1}{8} \times 1$$

$$= \frac{1}{8}$$

مثال 5 :

أوجد $\lim\limits_{\text{س} \to 0} \dfrac{(\text{س} + 9\,\text{جا}\ \text{س})}{4\,\text{س} + \text{ظا}\ \text{س}}$

الحل: بقسمة حدي الكسر على س

$$\lim\limits_{\text{س} \to 0} \frac{(\text{س} + 9\,\text{جا}\ \text{س})}{4\,\text{س} + \text{ظا}\ \text{س}} = \lim\limits_{\text{س} \to 0} \frac{1 + 9\,\frac{\text{جاس}}{\text{س}}}{4 + \frac{\text{ظا}\ \text{س}}{\text{س}}}$$

$$= \frac{9+1}{1+4} = \frac{10}{5} = 2$$

مثال 6 :

أوجد $\lim\limits_{س \to 0} \frac{(1 - جتا 2س)}{س^2}$

الحل:

$\because$ $1 - جتا 2س = 2 جا^2 س$

$$\lim\limits_{س \to 0} \frac{(1 - جتا 2س)}{س^2} = \lim\limits_{س \to 0} \frac{2 جا^2 س}{س^2}$$

$$= 2 \lim \frac{جا^2 س}{س^2}$$

$$= 2 \times 1 = 2$$

مثال 7 :

أوجد $\lim\limits_{ص \to 0} \frac{ظا^2 ص}{ص جا ص}$

الحل:

بقسمة حدي الكسر على $ص^2$

$$\lim\limits_{ص \to 0} \frac{ظا^2 ص}{ص جا ص} = \lim\limits_{ص \to 0} \frac{ظا^2 ص}{ص^2} \times \lim\limits_{ص \to 0} \frac{ص}{جا ص}$$

$$= 1 \times 1 = 1$$

تمرين 6 أ :

(1) أوجد $\lim\limits_{س \to 0} \frac{ظا^2 (3س)}{س^2}$

(2) أوجد $\lim\limits_{ص \to 0} \frac{جا ص - ظا ص}{ص^3}$

(3) أوجد $\lim\limits_{هـ \to 0} \frac{قتا هـ - ظتا هـ}{هـ}$

(4) أوجد $\lim\limits_{س \to 0} \frac{قا^2 س - جتا 2س}{3س^2}$

(5) أوجد $\lim\limits_{ع \to 0} \frac{جا ع + 6 ع}{7ع - ظا ع}$

(6) أوجد $\lim\limits_{س \to \frac{\pi}{2}} \frac{جتا س}{2س - \pi}$

(7) أوجد $\lim\limits_{س \to 0} \frac{جا س + ظا س}{س}$

(8) أوجد $\lim\limits_{س \to 0} \frac{س جا س}{1 - جتا س}$

6-2 مشتقة جا س :

نفرض أن ص = جا س ⟵ (1)

نفرض أن Δس كمية صغيرة في س ، Δص كمية مقابلة في ص.

ص + Δص = جا (س + Δس) ⟵ (2)

بطرح (1) من (2)

Δص = جا (س + Δس) - جا س

$$\Leftarrow \quad \Delta\text{ص} = 2\ \text{جتا}\left(\text{س} + \frac{\Delta\text{س}}{2}\right)\text{جا}\left(\frac{\Delta\text{س}}{2}\right)$$

[باستخدام جا ق - جا ت = 2 جتا $\frac{\text{ق} + \text{ت}}{2}$ جا $\frac{\text{ق} - \text{ت}}{2}$]

بالقسمة على Δس:

$$\frac{\Delta\text{ص}}{\Delta\text{س}} = \frac{2\ \text{جتا}\left(\text{س} + \frac{\Delta\text{س}}{2}\right)\text{جا}\left(\frac{\Delta\text{س}}{2}\right)}{\Delta\text{س}}$$

$$= \frac{\text{جتا}\left(\text{س} + \frac{\Delta\text{س}}{2}\right)\text{جا}\left(\frac{\Delta\text{س}}{2}\right)}{\frac{\Delta\text{س}}{2}}$$

$$\Leftarrow \quad \frac{\Delta\text{ص}}{\Delta\text{س}} = \text{جتا}\left(\text{س} + \frac{\Delta\text{س}}{2}\right) \times \frac{\text{جا}\left(\frac{\Delta\text{س}}{2}\right)}{\frac{\Delta\text{س}}{2}}$$

الآن نفرض Δس ⟵ 0 ، إذن $\frac{\Delta\text{ص}}{\Delta\text{س}} \leftarrow \frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ ، جتا $\left(\text{س} + \frac{\Delta\text{س}}{2}\right) \leftarrow$ جتا س،

$$\frac{\text{جا}\left(\frac{\Delta\text{س}}{2}\right)}{\frac{\Delta\text{س}}{2}} \longrightarrow 1$$

$$\therefore \quad \underset{\text{س}\to 0}{\text{نهـا}} \frac{\Delta\text{ص}}{\Delta\text{س}} = \frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \text{جتا س}$$

$$\therefore \quad \frac{\text{ء}}{\text{ءس}}(\text{جا س}) = \text{جتا س}$$

مثلا : $\frac{\text{ء}}{\text{ءس}}(\text{جا 3 س}) = 3\ \text{جتا 3 س}$

6-3 مشتقة جتا س :

نفرض أن ص = جتا س ⟵ (1)

نفرض أن Δس كمية صغيرة في س ، Δص كمية مقابلة في ص.

ص + Δص = جتا (س + Δس) ⟵ (2)

بطرح (1) من (2)

Δص = جتا (س + Δس) - جا س

⟸ Δص = 2 جا (س + $\frac{\Delta س}{2}$) جا ($\frac{\Delta س}{2}$)

[باستخدام جتا ق - جتا ت =– 2 جا $\frac{ق + ت}{2}$ جا $\frac{ق - ت}{2}$]

بالقسمة على Δس: $\frac{\Delta ص}{\Delta س} = \frac{- 2 \text{ جا } (س + \frac{\Delta س}{2}) \text{ جا } (\frac{\Delta س}{2})}{\Delta س}$

$= \frac{- \text{ جا } (س + \frac{\Delta س}{2}) \text{ جا } (\frac{\Delta س}{2})}{\frac{\Delta س}{2}}$

⟸ $\frac{\Delta ص}{\Delta س} = -$ جا (س + $\frac{\Delta س}{2}$) $\times \frac{\text{جا } (\frac{\Delta س}{2})}{\frac{\Delta س}{2}}$

الآن نفرض Δس ⟵ 0 ، إذن $\frac{\Delta ص}{\Delta س}$ ⟵ $\frac{ءص}{ءس}$ ، – جا (س + $\frac{\Delta س}{2}$) ⟵ – جا س،

$\frac{\text{جا } (\frac{\Delta س}{2})}{\frac{\Delta س}{2}}$ ⟵ 1

∴ $\lim_{\Delta س \to 0} \frac{\Delta ص}{\Delta س} = \frac{ءص}{ءس} = -$ جا س

∴ $\frac{ء}{ءس}$ (جتا س) = – جا س

مثلا : $\frac{ء}{ءس}$ (جتا 3 س) = - 3 جا 3 س

6-4 مشتقة ظا س :

يمكن إيجاد مشتقة ظا س باستخدام قاعدة القسمة في التفاضل.

$$\frac{\text{ء}}{\text{ءس}}(\text{ظا س}) = \frac{\text{ء}}{\text{ءس}}\left(\frac{\text{جا س}}{\text{جتا س}}\right)$$

$$= \frac{\text{جتا س} \frac{\text{ء}}{\text{ءس}}(\text{جا س}) - \text{جا س} \frac{\text{ء}}{\text{ءس}}(\text{جتا س})}{\text{جتا}^2 \text{ س}}$$

$$= \frac{\text{جتا س جتا س} + \text{جا س جا س}}{\text{جتا}^2 \text{ س}}$$

$$= \frac{\text{جا}^2 \text{ س} + \text{جتا}^2 \text{ س}}{\text{جتا}^2 \text{ س}}$$

$$= \frac{1}{\text{جتا}^2 \text{ س}} = \text{قا}^2 \text{ س}$$

$$\frac{\text{ء}}{\text{ءس}}(\text{ظا س}) = \text{قا}^2 \text{ س}$$

6-5 مشتقات جا (أ س + ب)، جتا (أ س + ب)، ظا (أ س + ب) حيث أ ، ب ثابتان

نفرض ص = جا (أ س + ب)

$$\therefore \frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \text{جتا}(\text{أس} + \text{ب}) \frac{\text{ء}}{\text{ءس}}(\text{أس} + \text{ب})$$ [باستخدام قاعدة دالة الدالة]

$$= [\text{جتا}(\text{أ س} + \text{ب})] \times \text{أ}$$

$$= \text{أ جتا}(\text{أ س} + \text{ب})$$

$$\frac{\text{ء}}{\text{ءس}} \text{ جا}(\text{أ س} + \text{ب}) = \text{أ جتا}(\text{أ س} + \text{ب})$$

بالمثل

$$\frac{\text{ء}}{\text{ءس}} \text{ جتا}(\text{أ س} + \text{ب}) = -\text{أ جا}(\text{أ س} + \text{ب})،$$

$$\frac{\text{ء}}{\text{ءس}} \text{ ظا}(\text{أ س} + \text{ب}) = \text{أ قا}^2(\text{أ س} + \text{ب})$$

مثال 8:

فاضل كلا مما يأتي بالنسبة إلى س:

(أ) جا 5 س　　　　(ب) جتا 2 س

(جـ) 4 ظا $\frac{1}{2}$ س　　　　(د) جا (2 س − 1)

(هـ) جتا (1 - 3 س)　　　　(و) ظا (1+ 5 س)

الحل:

(أ) $\frac{\text{ء}}{\text{ءس}}(\text{جا 5 س}) = \text{5 جتا 5 س}$

(ب) $\frac{d}{dس}$ (جتا 2 س) = − 2 جا 2 س

(جـ) $\frac{d}{dس}$ (4 ظا $\frac{1}{2}$ س) = $\frac{1}{2}$ × 4 قا^2 $\frac{1}{2}$ س = 2 قا^2 $\frac{1}{2}$ س

(د) $\frac{d}{dس}$ [جا (2 س − 1)] = جتا (2 س − 1) $\frac{d}{dس}$ (2 س − 1)

= 2 جتا (2 س − 1)

(هـ) $\frac{d}{dس}$ [جتا (1 - 3 س)] = - جا (1 − 3 س) × (−3)

= 3 جا (1 - 3 س)

(و) $\frac{d}{dس}$ [ظا (1 + 5 س)] = قا^2 (1 + 5 س) × (5)

= 5 قا^2 (1 + 5 س)

مثال 9:

أوجد مشتقة كل مما يأتي بالنسبة إلى س:

(أ) $\frac{\text{جا } 2س}{3س}$ (ب) 3 س جتا 2 س

الحل:

(أ) $\frac{d}{dس}$ ($\frac{\text{جا } 2س}{3س}$) = $\frac{3س \frac{d}{dس}(\text{جا } 2س) - \text{جا } 2س \frac{d}{dس}(3س)}{(3س)^2}$

باستخدام قاعدة خارج القسمة في التفاضل

= $\frac{3 س (2 \text{ جتا } 2 س) - (\text{جا } 2 س) (3)}{9س^2}$

= $\frac{6 \text{ س جتا } 2 س - 3 \text{ جا } 2 س}{9س^2}$

= $\frac{2 \text{ س جتا } 2 س - \text{جا } 2 س}{3 س^2}$

(ب) $\frac{d}{dس}$ (3 س جتا 2 س) = جتا 2 س $\frac{d}{dس}$ (3 س) + 3 س $\frac{d}{dس}$ (جتا 2س)

باستخدام قاعدة حاصل الضرب في التفاضل

= (جتا 2 س) (3) + 3 س (- 2 جا 2 س)

= 3 (جتا 2 س - 2 س جا 2 س)

6-6 مشتقات الدوال الضمنية التي تحوي نسبًا مثلثية.

درسنا من قبل تفاضل دوال ضمنية. والآن سوف تمتد التطبيقات إلى دوال ضمنية تحتوي نسبًا مثلثية. فيما يلي بعض الأمثلة:

مثال 10:

إذا كان $س\ ص^2 + جتا\ ص = 0$ فأوجد $\frac{ءص}{ءس}$ بدلالة س، ص.

الحل:

لدينا $س\ ص^2 + جتاص = 0$

بتفاضل الطرفين ضمنيًّا بالنسبة إلى س.

$$س\ (2\ ص \frac{ءص}{ءس}) + ص^2 - جاص \frac{ءص}{ءس} = 0$$

$$(2\ س ص - جا\ ص) \frac{ءص}{ءس} = -\ ص^2$$

$$\Leftarrow \frac{ءص}{ءس} = \frac{-\ ص^2}{2س ص - جا\ ص}$$

$$= \frac{ص^2}{جاص - 2س\ ص}$$

مثال 11: إذا كان $3\ س\ جا\ ص = ظا\ ص$، فأوجد $\frac{ءص}{ءس}$ بدلالة س، ص.

الحل:

$$\because\ 3\ س\ جا\ ص = ظا\ ص$$

بتفاضل الطرفين ضمنيا بالنسبة إلى س.

$$3\ جا\ ص + 3\ س\ جتا\ ص \frac{ءص}{ءس} = قا^2 ص \frac{ءص}{ءس}$$

$$\Leftarrow (3\ س\ جتا\ ص - قا^2 ص) \frac{ءص}{ءس} = -\ 3\ جا\ ص$$

$$\Leftarrow \frac{ءص}{ءس} = \frac{-\ 3\ جا\ ص}{3س\ جتا\ ص - قا^2 ص}$$

7-6 تكامل جا س، جتا س، قا^{2}س:

$$\because \frac{ء}{ءس}(جتا\ س) = -\ جا\ س$$

$$\therefore \int -\ جا\ س\ ءس = جتا\ س + ث \quad (حيث\ ث\ ثابت)$$

إذن، يتبع هذا أن تكامل جا س يعطى كالآتي:

$$\int جا\ س\ ءس = -\ جتا\ س + ث \quad (حيث\ ث\ ثابت)،$$

$$\because \frac{ء}{ءس}(جا\ س) = جتا\ س$$

$$\therefore \int جتا\ س\ ءس = جا\ س + ث \quad (حيث\ ث\ ثابت)،$$

$$\because \frac{ء}{ءس}(ظا\ س) = قا^2 س$$

$$\therefore \int قا^2 س\ ءس = ظا\ س + ث \quad (حيث\ ث\ ثابت)$$

6-8 تكامل جا أ س، جتا أ س، قا^2 أ س حيث أ ثابت

∵ $\frac{د}{د س}$ جتا أ س = - أ جا أ س

∴ ∫ - أ جا أ س د س = جتا أ س + ث (حيث ث ثابت)

∴ ∫ - جا أ س د س = $\frac{1}{أ}$ جتا أ س + ث$_1$ (حيث ث$_1$ ثابت)

⇐ ∫ جا أ س د س = - $\frac{1}{أ}$ جتا أ س + ث$_2$ (حيث ث$_2$ ثابت)

بالمثل:

$\frac{د}{د س}$ جا أ س = أ جتا أ س

∴ ∫ جتا أ س د س = $\frac{1}{أ}$ جا أ س + ث (حيث ث ثابت)

$\frac{د}{د س}$ ظا أ س = أ قا^2 أ س

∴ ∫ قا^2 أ س د س = $\frac{1}{أ}$ ظا أ س + ث (حيث ث ثابت)

مثال 12:

كامل كلا مما يأتي بالنسبة إلى س:

(أ) جا 2 س (ب) جتا 5 س

(جـ) قا^2 3 س (د) 2 جتا 4 س

الحل:

(أ) ∫ جا 2س د س = $\frac{- \text{جتا } 2 \text{ س}}{2}$ + ث (حيث ث ثابت)،

(ب) ∫ جتا 5 س د س = $\frac{\text{جا } 5\text{س}}{5}$ + ث (حيث ث ثابت)،

(جـ) ∫ قا^2 3 س د س = $\frac{\text{ظا } 3\text{س}}{3}$ + ث، (حيث ث ثابت)،

(د) ∫ 2 جتا 4 س د س = $\frac{2\text{جا } 4 \text{ س}}{4}$ + ث (حيث ج ثابت)،

9-6 تكامل جا (أ س + ب)، جتا (أ س + ب)، قا^2 (أ س + ب)

لإيجاد تكامل جا (أ س + ب)، حيث أ ، ب ثابتان، نلاحظ $\frac{د}{دس}$ [جتا (أ س + ب)].

نعلم أن: $\frac{د}{دس}$ [جتا (أ س + ب)] = - أ جا (أ س + ب)،

∴ $\int$ - أ جا (أ س + ب) دس = جتا (أ س + ب) + ث$_1$، (حيث ث$_1$ ثابت)

∴ $\int$ - جا (أ س + ب) دس = $\frac{1}{أ}$ جتا (أ س + ب) + ث$_2$، (حيث ث$_2$ ثابت)

⇐ $\int$ جا (أ س + ب) دس = - $\frac{1}{أ}$ جتا (أ س + ب) + ث، (حيث ث ثابت)

بالمثل: $\frac{د}{دس}$ جا (أ س + ب) = أ جتا (أ س + ب)

⇐ $\int$ جتا (أ س + ب) دس = $\frac{1}{أ}$ جا (أ س + ب) + ث، (حيث ث ثابت)

$\frac{د}{دس}$ [ظا (أ س + ب)] = أ قا^2 (أ س + ب)

⇐ $\int$ قا^2 (أ س + ب) دس = $\frac{1}{أ}$ ظا (أ س + ب) + ث (حيث ث ثابت)

جميع الحالات السابقة صواب بشرط أ ≠ 0. إذا كان أ = 0 تصبح المقادير الجبرية ثوابت ومشتقة الثابت تساوي صفرًا. هذا مناسب حيث التكامل الناتج يجب أن يُقسم على مشتقة أ س ، القسمة على صفر غير مُعرَّفة.

مثال 13: كامل بالنسبة إلى س:

(أ) جا (س + 2) (ب) جا (1 - 2 س) (جـ) جتا (3 س -2)

(د) قا^2 (1+ 5 س) (هـ) 3 جتا (2 س + 1)

الحل:

(أ) $\int$ جا (س + 2) دس = -جتا (س + 2) + ث، (حيث ث ثابت)

(ب) $\int$ جا (1 -2 س) دس = $\frac{1}{2}$ جتا (1 -2 س) + ث، (حيث ث ثابت)

(جـ) $\int$ جتا (3 س- 2) دس = $\frac{1}{3}$ جا (3 س - 2) + ث، (حيث ث ثابت)

(د) $\int$ قا^2 (1+ 5 س) دس = $\frac{1}{5}$ ظا (1+ 5 س) + ث، (حيث ث ثابت)

(هـ) $\int$ 3 جتا (2 س + 1) دس = $\frac{3}{2}$ جا (2 س + 1) + ث، (حيث ث ثابت)

مثال 14: احسب $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}$ جتا س ءس

الحل:

$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}$ جتا س ءس = جا س $\Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}$

= جا π − جا $\frac{\pi}{2}$

= - 1

تمرين 6-ب

(1) فاضل الآتي بالنسبة إلى س:

(أ) جا 3 س (ب) 3 جتا 2 س (ج) $\frac{1}{2}$ ظا 4 س

(د) جتا (1 - 2 س) (هـ) $\frac{1}{3}$ ظا (6 س + 1) (و) 2 جا ($\frac{1}{2}$ س - 3)

(2) كامل كلا مما يأتي بالنسبة إلى س:

(أ) جتا 2 س (ب) جتا $\frac{1}{2}$ س (ج) جا $\frac{س}{3}$

(د) - 2 جا (1 +س) (هـ) - جتا $\frac{2}{3}$ س (و) قا^2 (2 س + 3)

(ز) 4 جتا (س - 1) (ح) 3 جا (1 - 3 س) (ط) $\frac{3}{4}$ جتا (1 - 4 س)

(3) احسب التكاملات المحدودة الآتية:

(أ) $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}$ جتا س ءس (ب) $\int_{0}^{\pi}$ جا س ءس (ج) $\int_{0}^{\pi}$ جا 2 س ءس

(د) $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}$ جتا 3 س ءس (هـ) $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}$ 2 قا^2 $\frac{1}{2}$ س ءس

تمرين 6-جـ

(1) فاضل الآتي بالنسبة إلى س:

(أ) 2 س جتا س (ب) 4 س جا $\frac{1}{2}$ س (جـ) 2 س جتا (1 - س) (د) س ظا (2 س + 1)

(هـ) $\frac{1}{2}$ جتا س ظا س (و) جا 3 س ظا 4 س (ز) $\frac{\text{جتا س}}{\text{2 س}}$ (ح) $\frac{\text{جا 2 س}}{\text{س + 1}}$

(ط) $\frac{\text{س}}{\text{ظا س}}$ (ي) قتا 3 س (إرشاد قتا س = $\frac{1}{\text{جا س}}$) (ك) ظتا 2 س (إرشاد ظتا س = $\frac{\text{جتا س}}{\text{جا س}}$)

(2) احسب التكاملات المحدودة الآتية:

(أ) $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}$ (جتا س + 1) ءس (ب) $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}$ (س - جا س) ءس (ج) $\int_{0}^{\frac{\pi}{4}}$ (1 + ظا^2 س) ءس

10-6 مشتقات جا^{ن}س، جتا^{ن}س، ظا^{ن}س

توجد مشتقات جا^{ن}س، جتا^{ن}س، ظا^{ن}س، حيث ن ثابت، باستخدام قاعدة دالة الدالة في التفاضل.

$\frac{د}{د س}$(جا^{ن}س) = ن جا$^{ن-1}$ س $\frac{د}{د س}$ (جا س)

= ن جا$^{ن-1}$ س (جتا س)

= ن جا$^{ن-1}$ س جتا س

بالمثل $\frac{د}{د س}$ (جتا^{ن}س) = ن جتا$^{ن-1}$ س $\frac{د}{د س}$(جتا س)

= ن جتا$^{ن-1}$ س (- جا س)

= - ن جتا$^{ن-1}$ س جا س

$\frac{د}{د س}$(ظا^{ن}س) = ن ظا$^{ن-1}$ س $\frac{د}{د س}$(ظا س)

= ن ظا$^{ن-1}$ س (قا^{2} س)

= ن ظا$^{ن-1}$ س قا^{2} س

مثال 15:

فاضل كلا مما يأتي بالنسبة إلى س:

(أ) جا^{3} س (ب) 2 جا^{3} س (جـ) جتا^{5} س

(د) 2 ظا^{3} س (هـ) 5 جا^{3} 4 س (و) ظا^{4} 2 س

الحل:

(أ) $\frac{د}{د س}$(جا^{3} س) = 3 جا^{2} س $\frac{د}{د س}$ (جا س)

= 3 جا^{2} س جتا س

(ب) $\frac{د}{د س}$ (2 جا^{3} س) = 3 (2 جا^{2} س) $\frac{د}{د س}$(جا س) = 6 جا^{2} س جتا س

(جـ) $\frac{د}{د س}$ (جتا^{5} س) = 5 جتا^{4} س $\frac{د}{د س}$(جتا س)

= 5 جتا^{4} س (-جا س) = - 5 جتا^{4} س جا س

(د) $\frac{د}{د س}$(ظا^{3} س) = 3 ظا^{2} س $\frac{د}{د س}$(ظا س)

= 3 ظا^{2} س قا^{2} س

(هـ) $\frac{د}{د س}$(5 جا^{3} 4 س) = 3 (5 جا^{2} 4 س) $\frac{د}{د س}$ (جا 4 س)

= 15 جا^{2} 4 س (4 جتا 4 س)

= 60 جا^{2} 4 س جتا 4 س

(و) $\frac{د}{د س}$(ظا^{4} 2 س) = 4 ظا^{3} 2 س $\frac{د}{د س}$(ظا 2 س)

= 4 ظا^{3} 2 س (2 قا^{2} 2 س)

= 8 ظا^{3} 2 س قا^{2} 2 س

مثال 16:

فاضل الآتي بالنسبة إلى س:

(أ) جا س جتا س (ب) ظتا س

(جـ) $\frac{\text{جا}^2 \text{س}}{\text{س}}$ (د) جا س جتا (1 - 2 س)

الحل:

(أ) باستخدام قاعدة الضرب في التفاضل

$$\frac{ء}{ء\text{س}}(\text{جا س جتا س}) = \text{جتا س} \frac{ء}{ء\text{س}}(\text{جا س}) + \text{جا س} \frac{ء}{ء\text{س}}(\text{جتا س})$$

$$= \text{جتا س}(\text{جتا س}) + \text{جا س}(-\text{جا س})$$

$$= \text{جتا}^2 \text{س} - \text{جا}^2 \text{س}$$

$$= \text{جتا } 2 \text{ س}$$

(ب) ظتا س = $\frac{\text{جتا س}}{\text{جا س}}$ باستخدام قاعدة القسمة في التفاضل

$$\frac{ء}{ء\text{س}}\left(\frac{\text{جتا س}}{\text{جا س}}\right) = \frac{\text{جا س} \frac{ء}{ء\text{س}}(\text{جتا س}) - \text{جتا س} \frac{ء}{ء\text{س}}(\text{جا س})}{\text{جا}^2 \text{س}}$$

$$= \frac{\text{جا س}(-\text{جا س}) - \text{جتا س}(\text{جتا س})}{\text{جا}^2 \text{س}}$$

$$= \frac{-\text{جا}^2 \text{س} - \text{جتا}^2 \text{س}}{\text{جا}^2 \text{س}}$$

$$= \frac{-1(\text{جا}^2 \text{س} + \text{جتا}^2 \text{س})}{\text{جا}^2 \text{س}}$$

$$= -\frac{1}{\text{جا}^2 \text{س}} = -\text{قتا}^2 \text{س}$$

(جـ) باستخدام قاعدة خارج القسمة في التفاضل

$$\frac{ء}{ء\text{س}}\left(\frac{\text{جا}^2 \text{س}}{\text{س}}\right) = \frac{\text{س} \frac{ء}{ء\text{س}}(\text{جا}^2 \text{س}) - \text{جا}^2 \text{س} \frac{ء}{ء\text{س}}(\text{س})}{\text{س}^2}$$

$$= \frac{2 \text{ س جا س جتا س} - \text{جا}^2 \text{س}}{\text{س}^2}$$

(د) باستخدام قاعدة حاصل الضرب في التفاضل:

$$\frac{ء}{ء\text{س}}[\text{جا س جتا}(1 - 2 \text{ س})] = \text{جتا}(1 - 2 \text{ س}) \frac{ء}{ء\text{س}}(\text{جا س}) + \text{جا س} \frac{ء}{ء\text{س}}[\text{جتا}(1 - 2\text{س})]$$

$$= \text{جتا}(1 - 2 \text{ س}) \text{ جتا س} + \text{جا س}[-\text{جا}(1 - 2 \text{ س}) \times (-2)]$$

$$= \text{جتا}(1 - 2 \text{ س}) \text{ جتا س} + \text{جا س}[2 \text{ جا}(1 - 2 \text{ س})]$$

$$= \text{جتا س جتا}(1 - 2 \text{ س}) + 2 \text{ جا س جا}(1 - 2 \text{ س})$$

مثال 17:

فاضل جا 2 س^{0} بالنسبة إلى س:

الحل:

يجب أولًا تحويل الزاوية من درجات إلى راديان.

2 س^{0} = $\frac{\pi \text{ س}}{90}$ راديان.

∴ $\frac{\text{ء}}{\text{ءس}}$(جا $\frac{\pi \text{ س}}{90}$) = $\frac{\pi}{90}$ جتا $\frac{\pi \text{ س}}{90}$

مثال 18:

بوضع 2 جتا^{2}س بدلالة جتا 2 س، أوجد $\int$ 2 جتا^{2}س ءس

الحل:

من قاعدة ضعف الزاوية:

⇦ جتا 2 س = 2 جتا^{2}س - 1

⇦ 2 جتا^{2}س = 1 + جتا 2 س

∴ $\int$ 2 جتا^{2}س ءس = $\int$ (1 + جتا 2 س) ءس

= س + $\frac{\text{جا 2 س}}{2}$ + ث (حيث ث ثابت)

تمرين 6-د

(1) فاضل الآتي بالنسبة إلى س:

(أ) س - جتا^3 س   (ب) س جا^2 س   (جـ) 3 ظا^2 $\frac{1}{6}$س

(د) 2 قتا^3س (إرشاد: قتا س = $\frac{1}{\text{جاس}}$)   (هـ) جا س - جتا^2س

(2) إذا كان ص = جا^3 س، فأوجد $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ عندما س = π

(3) بوضع جا^2 س بدلالة جتا 2 س ، أوجد التكامل غير المحدود للدالة جا^2 س

(4) احسب $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} (1 + \text{ظا}^2 \text{س})\, \text{ءس}$

(5) إذا كان ص^2 جتا س = 1، فأوجد $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$، $\frac{\text{ء}^2\text{ص}}{\text{ءس}^2}$ بدلالة س، ص.

(6) إذا كان س = قا ص، فأوجد $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ بدلالة س.

(7) إذا كان جتا 2ص - جا س = 0، فبين أن: $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = -\frac{1}{2}$.

(8) إذا كان ص=قا^2 س ، فأوجد $\frac{\text{ءص}}{\text{ءظاس}}$.

الملخص:

(1) $\frac{د}{دس}$(جا س) = جتا س

$\frac{د}{دس}$(جتا س) = − جا س

$\frac{د}{دس}$(ظا س) = قا^2 س

(2) $\int$ جا س د س = − جتا س + ث،   حيث ث ثابت

$\int$ جتا س د س = جا س + ث،   حيث ث ثابت

$\int$ قا^2 س د س = ظا س + ث،   حيث ث ثابت

(3) $\frac{د}{دس}$[جا (أ س + ب)] = أ جتا (أ س + ب)

$\frac{د}{دس}$[جتا (أ س + ب)] = − أ جا (أ س + ب)

$\frac{د}{دس}$[ظا (أ س + ب)] = أ قا^2(أ س + ب)

(4) $\int$ جا أ س د س = − $\frac{1}{أ}$ جتا أ س + ث، حيث ث ثابت

$\int$ جتا أ س د س = $\frac{1}{أ}$ جا أ س + ث،   حيث ث ثابت

$\int$ قا^2 أ س د س = $\frac{1}{أ}$ ظا أ س + ث،   حيث ث ثابت

(5) $\int$ جا (أ س + ب) د س = − $\frac{1}{أ}$ جتا (أ س + ب) + ث، حيث ث ثابت

$\int$ جتا (أ س + ب) د س = $\frac{1}{أ}$ جا (أ س + ب) + ث،   حيث ث ثابت

$\int$ قا^2(أ س + ب) د س = $\frac{1}{أ}$ ظا (أ س + ب) + ث،   حيث ث ثابت

بشرط أنه في جميع الحالات السابقة أ $\neq 0$

(6) $\frac{د}{دس}$ (جا^{ن} س) = ن جا$^{ن-1}$ س جتا س

$\frac{د}{دس}$ (جتا^{ن} س) = − ن جتا$^{ن-1}$ س جا س

$\frac{د}{دس}$(ظا^{ن} س) = ن ظا$^{ن-1}$ س قا^2 س

تمرين 6 هـ

(1) (أ) فاضل $\frac{\text{جتا س}}{1 - \text{جا س}}$ بالنسبة إلى س،

في أبسط صورة

(ب) احسب التكاملات الآتية:

(1) $\int_{0}^{\frac{\pi}{3}} \frac{2\ \text{جا س}}{\text{جتا}^{3}\text{س}}\ \text{ء س}$

(2) $\int_{0}^{\frac{\pi}{4}} (\text{جا}^{2}\text{س جتا س})\ \text{ء س}$

(2) ارسم المنحنيين ص = جا س،

ص = جتا س على الفترة $0 \leq$ س $\leq \frac{\pi}{2}$

احسب مساحة المنطقة المحدودة بالمنحنيين والمحور ص.

(3) أوجد إحداثيات نقط الرجوع للمنحنى

ص = جا س + جتا س على $0 <$ س $< 2\pi$

(4) اثبت أن :

$(\text{جا س + جتا س})^{2} + 1 = \text{جا 2س}$

ومن ثم احسب:

$\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} (\text{جا س + جتا س})^{2}\ \text{ء س}$

(5) (أ) احسب ميل المنحنى ص = 3 ظا^{2} 2 س،

عند النقطة، حيث س = $\frac{1}{3}\pi$

(ب) إذا كان ص=3 جتا س+جا س، فأوجد $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$

(6) إذا كان ص^{3} جا س = 1، فأوجد $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ ، $\frac{\text{ء}^{2}\text{ص}}{\text{ء س}^{2}}$ بدلالة س، ص.

(7) أوجد $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ بفرض أن س^{2} جا ص=ص جتا س

(8) (أ) أوجد قيمة ك التي تجعل

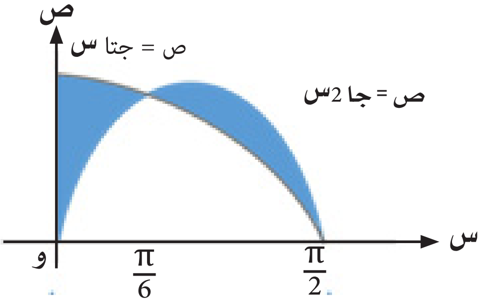
$\frac{\text{ء}}{\text{ءس}}(2\ \text{س - جا 2 س}) = \text{ك جا}^{2}\ \text{س}$

(ب) إذا كان ص=3 جتا س +5 جا س، فأوجد $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ ومن ثم حدد، قيم س، حيث $0 \leq$ س $\leq 2\pi$، التي تجعل ص حرجة.

(9) (أ) منحنى معادلته: ص = ظا (س + 1).

أوجد، لرقمين عشريين، الميل العمودي للمنحنى عند النقطة حيث س = 0

(ب)



شكل6-2

يوضح شكل 6-2 جزءًا من الشكلين البيانيين للمنحنيين:

ص=جتا س ، ص = جا 2 س

أوجد المساحة الكلية للمنطقتين المظللتين.

(10) أوجد المساحة المحصورة بين المنحنين ص= جاس ، ص جتاس.

7 تفاضل وتكامل الدوال اللوغاريتمية والأسية

تفاضل وتكامل الدوال اللوغاريتمية والأسية

Differentiation and Integration of Logarithmic and Exponential Functions

درسنا من قبل الدوال اللوغاريتمية والأسية للأعداد. والآن سوف ندرس تفاضل الدوال اللوغاريتمية والأسية وعلاقتها بالتكامل.

ولنتذكر بعض القوانين على اللوغاريتمات والتي قد نستخدمها في دراسة هذا الباب.

1- $\text{لو}\,\text{س}^{\text{ن}} = \text{ن}\,\text{لو}\,\text{س}$

2- $\text{لو}\,\text{س}\,\text{ص} = \text{لو}\,\text{س} + \text{لو}\,\text{ص}$

3- $\text{لو}\,\frac{\text{س}}{\text{ص}} = \text{لو}\,\text{س} - \text{لو}\,\text{ص}$ $\qquad$ $\text{هـ} \simeq 2.718$

4- $\text{لو}\,\text{هـ}^{\text{د}(\text{س})} = \text{د}(\text{س})$

5- $\text{هـ}^{\text{لو}\,\text{د}(\text{س})} = \text{د}(\text{س})$

6- $\text{لو}\,\text{هـ} = 1$

1-7 مفاهيم أساسية للثابت الأساسي:

(1) $\lim\limits_{\text{ن} \to \infty} \left(1 + \frac{1}{\text{ن}}\right)^{\text{ن}} = \text{هـ}$ $\qquad$ (1) $\text{نهـا}\,(1 + \text{م})^{\text{م}} = \text{هـ}$

مثال 1 :

أوجد $\lim\limits_{\text{م} \to 0} (1 - 3\text{م})^{\frac{1}{\text{م}}}$

الحل:

بوضع عندما $-3\text{م} = \text{ص}$ ، عندما $\text{م} \to 0$ $\therefore$ $\text{ص} \to 0$

$$\lim_{\text{م} \to 0} (1 - 3\text{م})^{\frac{1}{\text{م}}} = \lim_{\text{ص} \to 0} \left[(1 + \text{ص})^{\frac{1}{\text{ص}}}\right]^{-3} = \text{هـ}^{-3}$$

مثال 2 :

أوجد $\lim\limits_{\text{س} \to \infty} \left(\frac{\text{س}+\text{ص}}{\text{س}}\right)^{\text{س}} = \text{نهـا} \left(1 + \frac{\text{ص}}{\text{س}}\right)^{\text{س}} = \text{هـ}^{\text{ص}}$

مثال 3 : أوجد $\lim\limits_{\text{ن} \to \infty} \left(1 + \frac{2}{\text{ن}}\right)^{\text{ن}+1} = \text{هـ}$

$$= \lim_{\text{ن} \to \infty} \left(1 + \frac{2}{\text{ن}}\right)^{\text{ن}+1} = \lim_{\text{ن} \to \infty} \left(1 + \frac{2}{\text{ن}}\right)^{\text{ن}} \times \lim_{\text{ن} \to \infty} \left(1 + \frac{2}{\text{ن}}\right)$$

$$= \text{هـ}^2 \times \left(1 + \frac{2}{\infty}\right) = \text{هـ}^2$$

$$= \text{هـ}^2 \times (1 + 0) = \text{هـ}^2$$

مثال 4 : أوجد $\underset{\text{ن} \to \infty}{\text{نهـا}} \left(\frac{\text{ن} + 2}{\text{ن} + 3}\right)^{\text{ن}+2}$

الحل:

$$\underset{\text{ن} \to \infty}{\text{نهـا}} \left(\frac{\text{ن} + 2}{\text{ن} + 3}\right)^{\text{ن}-2} = \underset{\text{ن} \to \infty}{\text{نهـا}} \left(\frac{\text{ن} + 3}{\text{ن} + 2}\right)^{-(\text{ن}+2)}$$

$$= \underset{\text{ن} \to \infty}{\text{نهـا}} \left(\frac{\text{ن} + 2 + 1}{\text{ن} + 2}\right)^{-(\text{ن}+2)}$$

$$= \underset{\text{ن} \to \infty}{\text{نهـا}} \left(1 + \frac{1}{\text{ن} + 2}\right)^{-(\text{ن}+2)}$$

$$= \text{هـ}^{-1}$$

2-7 المعامل التفاضلي للدالة لوأ س

نفرض ص = لوأ س نفرض أن ص تتزايد بمقدار Δص كلما تتزايد س بمقدار Δس

$$\therefore \text{ص} + \Delta\text{ص} = \text{لو}_\text{أ} (\text{س} + \Delta\text{س}) \qquad \Delta\text{ص} = \text{لو}_\text{أ} (\text{س} + \Delta\text{س}) - \text{لو}_\text{أ} \text{س}$$

$$= \text{لو}_\text{أ} \left(\frac{\text{س} + \Delta\text{س}}{\text{س}}\right) \qquad = \text{لو}_\text{أ} \left(1 + \frac{\Delta\text{س}}{\text{س}}\right)$$

$$\frac{\Delta\text{ص}}{\Delta\text{س}} = \frac{1}{\Delta\text{س}} \text{لو}_\text{أ} \left(1 + \frac{\Delta\text{س}}{\text{س}}\right) \qquad = \text{لو}_\text{أ} \left(1 + \frac{\Delta\text{س}}{\text{س}}\right)^{\frac{1}{\Delta\text{س}}}$$

نفرض: $\text{ت} = \frac{\Delta\text{س}}{\text{س}}$ ، $\therefore \frac{1}{\Delta\text{س}} = \frac{1}{\text{ت س}}$ $\therefore \frac{\Delta\text{ص}}{\Delta\text{س}} = \text{لو}_\text{أ} (1 + \text{ت})^{\frac{1}{\text{ت س}}} = \frac{1}{\text{س}} \text{لو}_\text{أ} (1 + \text{ت})^{\frac{1}{\text{ت}}}$

نفرض: $\Delta\text{س} \to 0$ ، $\therefore \text{ت} \to 0$ ، $\frac{\Delta\text{ص}}{\Delta\text{س}} \longrightarrow \frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$

$$\therefore \frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \frac{1}{\text{س}} \text{نهـا} \ \text{لو}_\text{أ} (1 + \text{ت})^{\frac{1}{\text{ت}}}$$

$$= \frac{1}{\text{س}} \text{لو}_\text{أ} \left\{\text{نهـا} (1 + \text{ت})^{\frac{1}{\text{ت}}}\right\}$$

$\left\{\text{نهـا} (1 + \text{ت})^{\frac{1}{\text{ت}}}\right\}$ تساوي تقريبًا 2.718 ويرمز لها بالحرف هـ، وتعرف بالثابت الأسي.

$$\therefore \frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \frac{1}{\text{س}} \text{لو}_\text{أ} \text{هـ} \leftarrow \text{أي} \quad \frac{\text{ء}}{\text{ءس}} (\text{لو}_\text{أ} \text{س}) = \frac{1}{\text{س}} \text{لو}_\text{أ} \text{هـ} ، \ \text{س} > 0 \ ، \ \text{أ} > 1$$

ومنها تصل إلى اشتقاق الدالة اللوغاريتمية:

$\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \frac{\text{ء}}{\text{ءس}} \left(\text{لو د}(\text{س})\right) = \frac{1}{\text{د}(\text{س})} \cdot \text{د}'(\text{س})$ حيث د′(س) قابلة للإشتقاق في مجال تعريفها.

3-7 تفاضل الدوال اللوغاريتمية:

توضح الأمثلة الآتية طرق تفاضل أية دالة لوغاريتمية.

مثال 5:

تذكر:
عندما أ = هـ فإن
$لو_{هـ}$ تكتب لو
$\frac{د}{دس}(لو_{هـ} س) = \frac{1}{س} لو_{هـ} هـ = \frac{1}{س}$

فاضل الدوال الآتية بالنسبة إلى س:

(أ) لو(3 س − 1) (ب) لو جتا س

(جـ) لو $(\frac{س + 1}{2 س − 1})$ (د) $س^3$ لو 3 س

(هـ) لو $(1 + س^2)^5$ (و) لو (س جا س).

الحل:

(أ) ص = لو(3 س − 1)

$\Leftarrow \frac{دص}{دس} = \frac{1}{3س - 1} \times 3$

$\frac{دص}{دس} = \frac{3}{3س - 1}$

$\Leftarrow \frac{د}{دس}\{لو(3 س − 1)\} = \frac{3}{3س - 1}$

(ب) ص = لو جتا س،

$\frac{د}{دس} = \frac{1}{جتا س} \times -$ جاس

$\frac{د}{دس} = \frac{-جا س}{جتا س}$

= − ظا س

$\Leftarrow \frac{د}{دس}$ (لو جتا س) = − ظا س

(جـ) $\frac{د}{دس}\{لو(\frac{س + 1}{2س - 1})\} = \frac{د}{دس}\{$ لو(س + 1) − لو(2 س − 1) $\}$

$= \frac{1}{(س + 1)} - \frac{2}{(2 س - 1)}$

$= \frac{(2 س - 1) - 2 (س + 1)}{(س + 1)(2 س - 1)}$

$= \frac{-3}{(س + 1)(2 س - 1)}$

(د) $\frac{د}{دس}$ (س^3 لو 3س) = س^3 $\frac{د}{دس}$(لو 3س) + (لو 3س) $\frac{د}{دس}$(س^3)

= س^3 $(\frac{3}{3س})$ + (لو 3س) 3 س^2

= س^2 + 3 س^2 لو 3 س

(هـ) $\frac{د}{دس}$ {لو (1 + س^2)^5} = $\frac{د}{دس}$ {5 لو (1 + س^2)}

= 5 $(\frac{2 س}{1 + س^2})$

= $\frac{10 س}{1 + س^2}$

(و) $\frac{د}{دس}$ {لو (س جا س)} = $\frac{د}{دس}$ {لو س + لو جا س}

= $\frac{1}{س}$ + $\frac{جتا س}{جا س}$

= $\frac{1}{س}$ + ظتا س

مثال 6 :

أوجد دَ (س) إذا كان د (س) = لو (1 + جا س)

الحل:

د (س) = لو (1 + جا س)

دَ (س) = $\frac{1}{(1 + جا س)}$ جتا س

= $\frac{جتا س}{1 + جا س}$

تذكر: $\frac{د}{دس}$(د (س)) = دَ (س)

4-7 تكامل الصورة $\int$ (أ س + ب)$^{-1}$ ءس

سابقًا علمنا أن: $\frac{ء}{ءس}$(لو س) = $\frac{1}{س}$

بأخذ التكامل كعملية عكسية للتفاضل

$\int \frac{1}{س}$ ءس = لو س + ث، حيث ث ثابت

بالمثل، ∵ $\frac{ء}{ءس}$لو (أ س + ب) = $\frac{أ}{(أ س + ب)}$

علمنا من التكامل بالنسبة إلى س

$\int \frac{أ}{أ س + ب}$ ءس = لو (أ س + ب) + ث

$\int \frac{أ}{أ س + ب}$ ءس = $\frac{1}{أ}$ لو (أ س + ب) + ث

أو

$\int$ (أ س + ب)$^{-1}$ ءس = $\frac{1}{أ}$ لو (أ س + ب) + ث

فيما يلي الأمثلة التي توضح كيف نحسب مثل هذه التكاملات.

مثال 3:

احسب الآتي:

(أ) $\int \frac{2}{س}$ ءس (ب) $\int (2 - \frac{1}{س})$ ءس

الحل :

$\int \frac{2}{س}$ ءس = 2 $\int \frac{1}{س}$ ءس

= 2 لو س + ث

(ب) $\int (2 - \frac{1}{س})$ ءس = $\int 2$ ءس - $\int \frac{1}{س}$ ءس

= 2 س - لو س + ث

مثال 8:

أوجد ص في الآتي:

(أ) $\frac{ءص}{ءس} = \frac{1}{3س + 1}$ (ب) $\frac{ءص}{ءس} = \frac{2}{3 - 2س}$

الحل:

(أ) $\frac{ءص}{ءس} = \frac{1}{3س + 1}$

بتكامل الطرفين بالنسبة إلى س:

$$ص = \int \frac{1}{3س + 1} ءس$$

$$= \frac{1}{3} لو(3س + 1) + ث$$

(ب) $\frac{ءص}{ءس} = \frac{2}{3 - 2س}$

بإجراء التكامل بالنسبة إلى س:

$$ص = \int \frac{2}{3 - 2س} ءس$$

$$= 2 \int \frac{1}{3 - 2س} ءس$$

$$= 2 \left(-\frac{1}{2}\right) لو(3 - 2س) + ث$$

$$= - لو(3 - 2س) + ث$$

مثال 9:

إذا كان $دَ(س) = 2س + \frac{1}{1 - س}$ فأوجد د(س)

الحل:

$\because دَ(س) = 2س + \frac{1}{1 - س}$

بالتكامل بالنسبة إلى س:

$\because د(س) = س^2 + \int \frac{1}{1 - س} ءس$

$$= س^2 - لو(1 - س) + ث$$

مثال 10:

احسب

(أ) $\int_{1}^{2} \frac{1}{3\text{س}}\,\text{ءس}$ (ب) $\int_{0}^{3} \frac{\text{ءس}}{1+3\text{س}}$

الحل :

(أ) $\int_{1}^{2} \frac{1}{3\text{س}}\,\text{ءس} = \frac{1}{3}\int_{1}^{2} \frac{1}{\text{س}}\,\text{ءس}$

$= \frac{1}{3}[\text{لو س}]_{1}^{2}$

$= \frac{1}{3}(\text{لو }2 - \text{لو }1)$

$= \frac{1}{3}\text{لو }2$

(ب) $\int_{0}^{3} \frac{\text{ءس}}{1+3\text{س}} = [\frac{1}{3}\text{لو}(1+3\text{س})]_{0}^{3}$

$= \frac{1}{3}(\text{لو }10 - \text{لو }1)$

$= \frac{1}{3}\text{لو }10$

تمرين 7-أ

(1) أوجد كلا ممايأتي:

(أ) $\underset{\text{م}\to 0}{\text{نهـا}}\ (1+3\text{م})$ (ب) $\underset{\text{ن}\to\infty}{\text{نهـا}}\ \text{ن لو}(1+\frac{2}{\text{ن}})$

(جـ) $\underset{\text{ن}\to 0}{\text{نهـا}}\ \sqrt[\text{ن}]{1+\text{ن س}}$ (د) $\underset{\text{ن}\to\infty}{\text{نهـا}}\ \left(\frac{(\text{ن}+1)}{(\text{ن}+2)}\right)^{\text{ن}+1}$

(2) فاضل الدوال الآتية بالنسبة إلى س:

(أ) $\text{لو }3\text{س}$ (ب) $\text{لو}(2-\text{س})$ (جـ) $\text{لو}(\text{س}^2+\text{س}-1)$

(د) $\text{لو}\frac{1}{\text{س}}$ (هـ) $\text{لو}\sqrt{(\text{س}-1)}$ (و) $\text{لو}\frac{(\text{س}-1)}{(\text{س}+1)}$

(3) أوجد $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ لكل مما يأتي:

(أ) $\text{ص} = \text{لو}\frac{\text{س}^2}{\text{س}^2+1}$ (ب) $\text{ص} = \text{لو}(1-\text{س})^3$

(جـ) $\text{ص} = \text{لو جا س}$ (د) $\text{ص} = \text{لو ظا س}$

(هـ) $\text{ص} = \text{لو جا}(\text{س}+1)$ (و) $\text{ص} = \text{لو}\sqrt{(\text{س}^2+1)}$

(ز) $\text{ص} = \text{لو}(\frac{\text{جا س}}{\text{جتا }2\text{س}})$ (ح) $\text{ص} = \text{لو}_3\text{جا}^3\text{س}$

(4) أوجد دَ(س) في الحالات الآتية:

(أ) د(س) = س لو 2 س

(ب) د(س) = (2 س -1) لو (1 -س)

(جـ) د(س) = (1 + 3 س) لو جا س

(د) د(س) = $\frac{1}{\text{س}}$ لو س

(5) كامل الآتي بالنسبة إلى س:

(أ) $\frac{2}{\text{س}}$ (ب) $\frac{1}{3\text{س}}$ (جـ) $2 - \frac{1}{\text{س}}$ (د) $\text{س}^2 - \frac{1}{(\text{س} + 1)}$

(6) كامل:

(أ) $\int \frac{1}{(1 - \text{س})} \,\text{ءس}$ (ب) $\int \frac{2}{(3\text{س} - 1)} \,\text{ءس}$ (جـ) $\int \frac{3}{4(\text{س} - 1)} \,\text{ءس}$

(د) $\int \frac{2}{(2\text{س} + 3)} \,\text{ءس}$ (هـ) $\int \frac{5}{(1 - 5\text{س})} \,\text{ءس}$ (و) $\int (3\text{س} + 1)^{-1} \,\text{ءس}$

(7) أوجد قيمة:

(أ) $\int_{1}^{2} \frac{1}{3\text{س}} \,\text{ءس}$ (ب) $\int_{1}^{2} \left(1 - \frac{1}{2\text{س}}\right) \text{ءس}$

(جـ) $\int_{2}^{3} \frac{3}{(1 + \text{س})} \,\text{ءس}$ (د) $\int_{0}^{1} (1 + 2\text{س})^{-1} \,\text{ءس}$

(هـ) $\int_{2}^{-1} \frac{2}{(2 - 3\text{س})} \,\text{ءس}$ (و) $\int_{1}^{2} \frac{2}{3(2\text{س} - 1)} \,\text{ءس}$

(8) إذا كان س ص = لو س، فأوجد قيمة س عندما $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = 0$

(9) أوجد دَ(س) فيما يلي:

(أ) د(س) = (1 - س) لو (1 - جا س)

(ب) د(س) = لو $\left(\frac{\text{جا س}}{1 - \text{جتا س}}\right)$

(10) إذا كان ص = $\frac{\text{لو س}}{2\text{س}}$ ، فأوجد $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ ، $\frac{\text{ء}^2\text{ص}}{\text{ءس}^2}$ بدلالة س.

(11) إذا كان لو ص = 2 س فأوجد $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$، $\frac{\text{ء}^2\text{ص}}{\text{ءس}^2}$ بدلالة س، ص.

(12) إذا كان لو ظا ص = س، فاثبت أن $\frac{\text{ء}^2\text{ص}}{\text{ءس}^2} = \frac{1}{4}$ جا 4 ص.

5-7 تفاضل الدالة الأسية $هـ^{أ س+ب}$

نفرض الدالة الأسية $هـ^{أ س+ب}$ حيث أ ، ب ثابتان

نفرض الدالة الأسية $ص = هـ^{أ س+ب}$

خذ اللوغاريتم الطبيعي للطرفين،

$لو ص = أ س + ب$

فاضل ضمنيًا بالنسبة إلى س

$$\frac{1}{ص}\,\frac{ءص}{ءس} = أ$$

$$\frac{ءص}{ءس} = أ ص = أ هـ^{أ س+ب}$$

$$\frac{ء}{ءس}\left(هـ^{أ س+ب}\right) = أ هـ^{أ س+ب}$$

ادرس الحالة عندما $ب = 0$

$$\because \frac{ء}{ءس}\left(هـ^{أ س}\right) = أ هـ^{أ س}$$

حالة خاصة: خذ $أ = 1$

$$\because \frac{ء}{ءس}\left(هـ^{س}\right) = هـ^{س}$$

مثال 11:

فاضل الآتي بالنسبة إلى س:

(أ) $هـ^{2س}$ (ب) $هـ^{3س - 1}$

(جـ) $هـ^{1 - 4س}$ (د) $\left(هـ^{س} + \frac{1}{هـ^{س}}\right)^2$

الحل:

(أ) $\frac{ء}{ءس}\left(هـ^{2س}\right) = 2 هـ^{2س}$

(ب) $\frac{ء}{ءس}\left(هـ^{3س - 1}\right) = 3 هـ^{3س - 1}$

(جـ) $\frac{ء}{ءس}\left(هـ^{1 - 4س}\right) = \frac{ء}{ءس}\left(هـ^{-4س + 1}\right) = -4 هـ^{1 - 4س}$

(د) $\frac{ء}{ءس}\left(هـ^{س} + \frac{1}{هـ^{س}}\right)^2 = \frac{ء}{ءس}\left(هـ^{2س} + 2 + هـ^{-2س}\right) = 2 هـ^{2س} - 2 هـ^{-2س}$

مثال 12 :

أوجد $\frac{ءص}{ءس}$ إذا كان:

(أ) ص = $هـ^{س}$ جا 2 س (ب) ص = $\frac{\text{جتا } 6 \text{ س}}{هـ^{3س}}$ (جـ) ص = $هـ^{2س+1}$ لو س

الحل:

(أ) ص = $هـ^{س}$ جا 2 س

$\Leftarrow \frac{ءص}{ءس} =$ جا 2 س $\frac{ء}{ءس}(هـ^{س}) + هـ^{س} \frac{ء}{ءس}$(جا 2 س)

= (جا 2 س) $هـ^{س} + هـ^{س}$ 2 جتا 2 س

= $هـ^{س}$ جا 2 س + 2 $هـ^{س}$ جتا 2 س

(ب) **ص** = $\frac{\text{جتا } 6 \text{ س}}{هـ^{3س}}$ = $هـ^{-3س}$ **جتا 6 س**

$\Leftarrow \frac{ءص}{ءس} =$ جتا 6 س [- 3 $هـ^{-3س}$] + $هـ^{-3س}$ [- 6 جا 6 س]

$= -\frac{\text{3 جتا 6 س}}{هـ^{3س}} - \frac{\text{6 جا 6 س}}{هـ^{3س}}$

$= -\frac{3}{هـ^{3س}}$ (جتا 6 س + 2 جا 6 س)

(جـ) **ص** = $هـ^{2س+1}$ **لو س**

$\Leftarrow \frac{ءص}{ءس} =$ لو س $\frac{ء}{ءس}$ $(هـ^{2س+1})$ + $هـ^{2س+1}$ $\frac{ء}{ءس}$(لو س)

= لو س (2 $هـ^{2س+1}$) + $هـ^{2س+1}$ $(\frac{1}{س})$

= 2 $هـ^{2س+1}$ لو س + $\frac{هـ^{2س+1}}{س}$

= $\frac{هـ^{2س+1}}{س}$ (2 س لو س + 1)

مثال 13 :

أوجد دَ (س) فيما يأتي:

(أ) $\text{د}(\text{س}) = \text{س}\ \text{هـ}^{1-2\text{س}}$ (ب) $\text{د}(\text{س}) = \dfrac{(1-\text{س}^2)}{\text{هـ}^{\text{س}}}$

الحل:

(أ) $\text{د}(\text{س}) = \text{س}\ \text{هـ}^{1-2\text{س}}$

بالتفاضل بالنسبة إلى س:

$$\therefore\ \text{دَ}(\text{س}) = \text{هـ}^{1-2\text{س}}\ \frac{\text{ء}}{\text{ءس}}(\text{س}) + \text{س}\ \frac{\text{ء}}{\text{ءس}}(\text{هـ}^{1-2\text{س}})$$

$$= \text{هـ}^{1-2\text{س}} - 2\text{س}\ \text{هـ}^{1-2\text{س}}$$

$$= \text{هـ}^{1-2\text{س}}(1-2\text{س})$$

(ب) $\text{د}(\text{س}) = \dfrac{(1-\text{س}^2)}{\text{هـ}^{\text{س}}} = (1-\text{س}^2)\ \text{هـ}^{-\text{س}}$

بالتفاضل بالنسبة إلى س:

$$\therefore\ \text{دَ}(\text{س}) = \text{هـ}^{-\text{س}}\ \frac{\text{ء}}{\text{ءس}}(1-\text{س}^2) + (1-\text{س}^2)\frac{\text{ء}}{\text{ءس}}(\text{هـ}^{-\text{س}})$$

$$= \text{هـ}^{-\text{س}}(-2\text{س}) + (1-\text{س}^2)\ (-\text{هـ}^{-\text{س}})$$

$$= -\text{هـ}^{-\text{س}}\ (2\text{س} + 1 - \text{س}^2)$$

$$= \frac{\text{س}^2 - 2\text{س} - 1}{\text{هـ}^{\text{س}}}$$

6-7 تكامل الدالة الأسية $\text{هـ}^{\text{أس}+\text{ب}}$

أوضحنا فيما سبق أن :

$$\frac{\text{ء}}{\text{ءس}}(\text{هـ}^{\text{أس}+\text{ب}}) = \text{أ}\ \text{هـ}^{\text{أس}+\text{ب}}$$

باعتبار التكامل عملية عكسية للتفاضل، نجد أن

$\int \text{أ}\ \text{هـ}^{\text{أس}+\text{ب}}\ \text{ءس} = \text{هـ}^{\text{أس}+\text{ب}} + \text{ث}$، **حيث ث ثابت**

$$\text{أ}\int \text{هـ}^{\text{أس}+\text{ب}}\ \text{ءس} = \text{هـ}^{\text{أس}+\text{ب}} + \text{ث}$$

$$\Leftarrow\ \int \text{هـ}^{\text{أس}+\text{ب}}\ \text{ءس} = \frac{1}{\text{أ}}\ \text{هـ}^{\text{أس}+\text{ب}} + \text{ث}$$

$\Leftarrow\ \dfrac{\text{ء}}{\text{ءس}}(\text{هـ}^{\text{أس}}) = \text{أ}\ \text{هـ}^{\text{أس}}$ **بالمثل**

$\because\ \int \text{أ}\ \text{هـ}^{\text{أس}}\ \text{ءس} = \text{هـ}^{\text{أس}} + \text{ث}$، **حيث ث ثابت**

$$\text{أ}\int \text{هـ}^{\text{أس}}\ \text{ءس} = \text{هـ}^{\text{أس}} + \text{ث}$$

$$\therefore\ \int \text{هـ}^{\text{أس}}\ \text{ءس} = \frac{1}{\text{أ}}\ \text{هـ}^{\text{أس}} + \text{ث}$$

$\Leftarrow$ **حالة خاصة:** خذ $\text{أ} = 1$

$$\int \text{هـ}^{\text{س}}\ \text{ءس} = \text{هـ}^{\text{س}} + \text{ث}$$

مثال 14 :

أوجد تكامل الآتي بالنسبة إلى س:

(أ) $هـ^{3س}$ (ب) $هـ^{س} - \frac{1}{هـ^{س}}$ (جـ) $هـ^{2س-1}$ (د) $هـ^{1-\frac{س}{2}}$

الحل:

(أ) $\int هـ^{3س} ءس = \frac{1}{3} هـ^{3س} + ث$

(ب) $\int (هـ^{س} - \frac{1}{هـ^{س}}) ءس = \int (هـ^{س} - هـ^{-س}) ءس = هـ^{س} + هـ^{-س} + ث$

(جـ) $\int هـ^{2س-1} ءس = \frac{1}{2} هـ^{2س-1} + ث$

(د) $\int هـ^{1-\frac{1}{2}س} = \int هـ^{-\frac{1}{2}س+1} ءس$

$= -2 هـ^{-\frac{1}{2}س+1} + ث$

$= -2هـ^{1-\frac{1}{2}س} + ث$

مثال 15 :

احسب $\int هـ^{1-2س} ءس$

الحل:

$\int_{0}^{1} هـ^{1-2س} ءس = \frac{-1}{2} [هـ^{1-2س}]_{0}^{1}$

$= \frac{1}{2} [هـ^{-1} - هـ^{1}]$

$= \frac{1}{2} (\frac{1}{هـ} - هـ)$

$= \frac{1}{2} (هـ - \frac{1}{هـ})$

$\approx \frac{1}{2}(2.718 - 0.368)$

≈ 1.175

تمرين 7 -ب

(1) فاضل الآتي بالنسبة إلى س:

(أ) $4\,\text{هـ}^{\text{س}}$ (ب) $\text{هـ}^{3\text{س}}$

(جـ) $\text{هـ}^{-2\text{س}}$ (د) هـ س

(هـ) $\text{هـ}^{2\text{س}} - \frac{1}{\text{هـ}^{\text{س}}}$ (و) $\left(\text{هـ}^{\text{س}} - \frac{1}{\text{هـ}^{\text{س}}}\right)^{2}$

(2) أوجد د/ (س) فيما يلي:

(أ) $\text{د}(\text{س}) = 2\,\text{س}\,\text{هـ}^{\text{س}+1}$ (ب) $\text{د}(\text{س}) = (\text{س}^{2}+1)\,\text{هـ}^{\text{س}-1}$

(جـ) $\text{د}(\text{س}) = \text{هـ}^{\text{س}}\ \text{ظا}\ \text{س}$ (د) $\text{د}(\text{س}) = \text{لو}_{2}\ \text{ظا}\ 3\,\text{س}$

(3) أوجد $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ إذا كان:

(أ) $\text{ص} = \frac{\text{هـ}^{3\text{س}}}{\text{س}}$ (ب) $\text{ص} = \frac{\text{هـ}^{2\text{س}} + \text{هـ}^{-2\text{س}}}{\text{هـ}^{-\text{س}}}$

(جـ) $\text{ص} = \text{هـ}^{2\text{س}+1}\ \text{لو}(\text{س}+1)$

(4) كامل الآتي بالنسبة إلى س :

(أ) $2\,\text{هـ}^{\text{س}}$ (ب) $\text{هـ}^{\frac{1}{2}\text{س}}$

(جـ) $\text{هـ}^{2\text{س}+1}$ (د) $\text{هـ}^{-3\text{س}}$

(هـ) $\text{هـ}^{2\text{س}} + \text{هـ}^{1-\text{س}}$ (و) $\left(\text{هـ}^{\text{س}} + \frac{1}{\text{هـ}^{\text{س}}}\right)^{2}$

(5) احسب (الإجابة):

(أ) $\int_{0}^{1} \text{هـ}^{2\text{س}}\,\text{ءس}$ (ب) $\int_{0}^{2} \text{هـ}^{-\frac{1}{2}\text{س}}\,\text{ءس}$

(جـ) $\int_{0}^{\frac{1}{2}} \left(3 - \frac{\text{هـ}^{3\text{س}}}{2}\right)\text{ءس}$ (د) $\int_{0}^{4} \frac{\text{ءس}}{\text{هـ}^{\text{س}-1}}$

(6) إذا كان $\text{ص} = \text{ن}\,\text{هـ}^{-\text{ك}\,\text{س}}$ حيث ن ، ك ثابتان، أثبت أن $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} + \text{ك}\,\text{ص} = 0$.

(7) إذا كان $\text{ص} = \text{س}^{\text{ن}}\,\text{هـ}^{\text{أ}\text{س}}$ ، فاثبت أن $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} - \text{أ}\,\text{ص} = \frac{\text{ن}\,\text{ص}}{\text{س}}$ حيث ن ، أ ثابتان

(8) إذا كان $\text{ص} = \text{هـ}^{\text{س}} + \text{هـ}^{-\text{س}}$ ، أثبت أن $\frac{\text{ء}^{2}\text{ص}}{\text{ءس}^{2}} - \text{ص} = 0$.

الملخص

(1) تفاضل لو س

ص = لو س حيث: س > 0

$\frac{ء}{ءس}$ (لو ا س) = $\frac{1}{س}$

(2) التكامل على الصورة: $\int (ا س + ب)^{-1}$ ءس

(أ) $\int \frac{1}{س}$ ءس = لو س + ث

(ب) $\int \frac{ءس}{ا س + ب}$ ءس = $\frac{1}{ا}$ لو (ا س + ب) + ث

أو $\int (ا س + ب)^{-1}$ ءس = $\frac{1}{ا}$ لو (ا س + ب) + ث

(3) تفاضل الدالة الأسية $هـ^{ا س + ب}$

(أ) $\frac{ءص}{ءس}$ ($هـ^{س}$) = $هـ^{س}$ ، س ∈ ح

(ب) $\frac{ءص}{ءس}$ ($هـ^{ا س}$) = ا $هـ^{ا س}$

(جـ) $\frac{ءص}{ءس}$ ($هـ^{ا س + ب}$) = أ $هـ^{ا س + ب}$

(4) تكامل الدالة الأسية $هـ^{ا س + ب}$

(أ) $\int$ ($هـ^{س}$) = $هـ^{س}$ + ث

(ب) $\int$ ($هـ^{ا س}$) = $\frac{1}{ا}$ $هـ^{ا س}$ + ث

(جـ) $\int$ $هـ^{ا س + ب}$ = $\frac{1}{ا}$ $هـ^{ا س + ب}$ + ث

(5) تفاضل $لو_{ا}$ د (س)

ص = $لو_{ا}$ د (س) حيث: د (س) > 0

$\frac{ءص}{ءس}$ = $\frac{1}{د (س)}$. د$'$ (س) $لو_{ا}$ هـ ، ا > 1

8 المُتَّجِهَاتُ

8 المتجهات Vectors

"كارل . ف . جاوس"

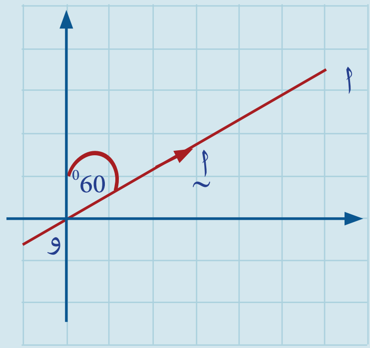
عندما كان عمره أقل من ثلاثة أعوام أستطاع عالم الرياضيات الألماني العبقري "كارل فريدريك جاوس" (1778-1857) اكتشاف خطأ وقع فيه والده عند إعداده لكشوفات المرتبات، وعندما كان عمره أقل من 17 عاما أدى عبثه بمفاهيم الهندسة غير الإقليديسية إلى النظرية النسبية في القرن العشرين.

ولقد أُثني على جاوس أيضا لمفاهيمه عن الأعداد المركبة وعند تطويره للأعداد المركبة اقترح أسلوبا هندسيا للنظر إليها. إن سلوك القطع المستقيمة التي تمثل الأعداد المركبة تتلائم تماما مع سلوك العديد من الأشياء الكمية في الطبيعة مثل القوة، السرعة، العجلة. إن مثل هذه الكميات تسمى متجهات وتعتبر أدوات ضرورية في علم الفيزياء ، والمتجهات لها مقادير ومتجهات. ومن ناحية أخرى، فإن الكميات التي لها مقادير تسمى كميات قياسية. بعض أمثلة الكميات القياسية، المساحة الكمية والكتلة والزمن.

في نهاية هذا الفصل سوف تكون قادرا على:

- التمييز بين المتجه والكمية اللاموجهة.
- تمثيل الكمية المتجهة بواسطة قطعة مستقيمة موجهة.
- إيجاد المجموع والفرق والضرب القياسي للمتجهات.
- التعبير عن حل المتجهات بصورة عمودية.
- إيجاد مقدار المتجه.
- التعبير عن المتجه بدلالة متجه الاتجاه.
- حل مشكلات تتضمن الاتجاه.

1-8 تمثيل المتجهات Representation of Vectors



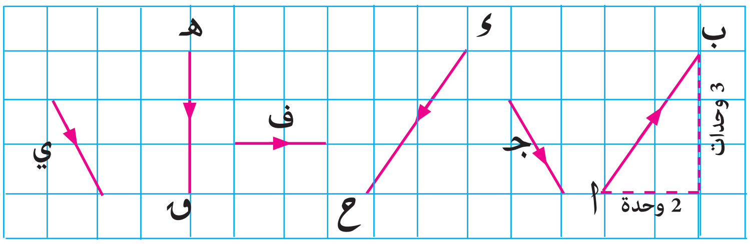
يمكن تمثيل المتجه بقطعة مستقيمة موجهة كما موضح على اليمين اتجاه القطعة المستقيمة و أ (في اتجاه 060) هو اتجاه المتجه وطوله و أ يمثل مقدار المتجه.

ويمكن التعبير عن المتجه و أ هكذا $\overleftarrow{\text{و أ}}$. يشير السهم إلى الاتجاه من و إلى أ، قد نستخدم أيضا الحروف مثل $\underset{\sim}{\text{أ}}$ (مع علامة التموج ~ تحته) أو الحرف (أ) بخط كثيف للإشارة إلى المتجه، ومن ثم $\overleftarrow{\text{و أ}} = \underset{\sim}{\text{أ}}$

مقدار المتجه $\overleftarrow{\text{ىأ}}$ يرمز له بالرمز $|\overleftarrow{\text{ىأ}}|$. وإذا كان المتجه ممثلاً بالحرف $\underset{\sim}{\text{أ}}$ فإن مقداره يرمز له بالرمز $|\underset{\sim}{\text{أ}}|$ في الطباعة $|\text{أ}|$ ترمز إلى مقدار المتجه أ.

المتجه الذي مقداره صفر يعرف باسم المتجه الصفري. والمتجه الصفري ليس له اتجاه.

لقد استخدمنا المتجه العمودي لتمثيل الانتقال. دعنا ندرس المتجهات التالية:



يمكن التعبير عن المتجهات المختلفة كما يلي :

$\overleftarrow{\text{أب}} = \begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}$ ، $\overleftarrow{\text{جـ}} = \begin{pmatrix}1\\-2\end{pmatrix}$ ، $\overleftarrow{\text{ىح}} = \begin{pmatrix}-2\\-3\end{pmatrix}$

$\text{ف} = \begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix}$ ، $\overleftarrow{\text{هـن}} = \begin{pmatrix}0\\-3\end{pmatrix}$ ، $\text{ى} = \begin{pmatrix}1\\-2\end{pmatrix}$

لاحظ أن كلا المتجهين جـ ، ى لهما نفس المقدار ونفس الاتجاه وكلا منهما يمكن التعبير عنه كمتجه عمودي $\begin{pmatrix}1\\-2\end{pmatrix}$. ويسمى ذلك تكافؤ المتجهات أو تساوي المتجهات.

وتكتب جـ = ى.

من ناحية أخرى المتجهان $\overleftarrow{\text{أب}}$ ، $\overleftarrow{\text{ىح}}$ لهما نفس المقدار ولكن في اتجاهين متضادين نلاحظ أيضا أن:

$$\overleftarrow{\text{ىح}} = -\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}$$

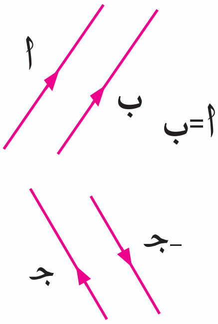
$$= -\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}$$

$$= -\overleftarrow{\text{أب}}$$

ومن ثم فإن الإشارة السالبة تعكس اتجاه المتجه.

تساوى المتجهان أ، ب فقط إذا كان لهما نفس المقدار و الاتجاه (بمعنى ان يكون لهما نفس المتجه العمودي).

المتجهان جـ ، -جـ لهما نفس المقدار ولكن متضادان في الاتجاه (الإشارة السالبة تعكس اتجاه المتجه).



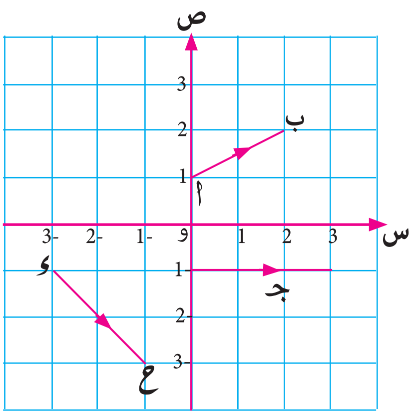
مثال 1 :

عبر عن كل المتجهات الاتية بمتجه عمودي :

الحل:

$\overleftarrow{\text{أب}} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\qquad$ $\text{جـ} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$

$\overleftarrow{\text{وح}} = \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \end{pmatrix}$

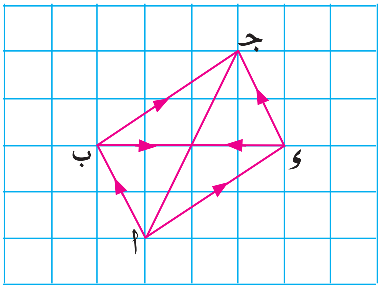


مثال 2:

أوجد المتجهات المتكافئة باستخدام علامة (=) .

الحل:

$\overleftarrow{\text{أب}} = \overleftarrow{\text{وجـ}}$ $\qquad$ $\overleftarrow{\text{بجـ}} = \overleftarrow{\text{أو}}$ $\qquad$ $\overleftarrow{\text{جـم}} = \overleftarrow{\text{مأ}}$



مثال 3:

إذا كانت هـ = $\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ ، $\overleftarrow{\text{كل}} = \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \end{pmatrix}$ ، عبر عن كل مما يأتي كمتجه عمودي:

(أ) – هـ $\qquad$ (ب) ل ك

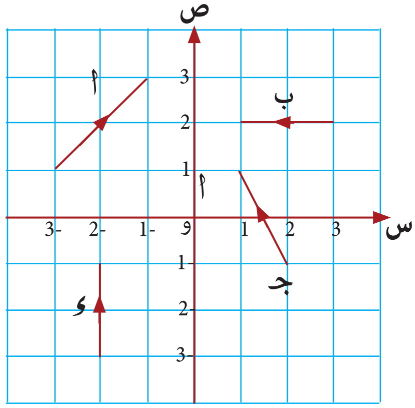
الحل:

(أ) – هـ = – $\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ $\qquad$ $\overleftarrow{\text{لك}} = -\overleftarrow{\text{كل}}$

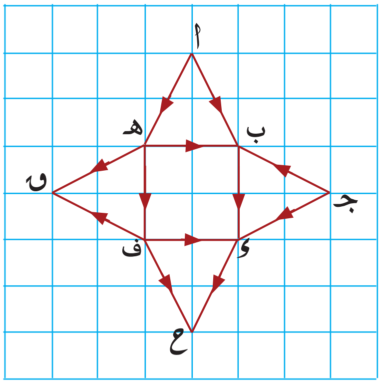
$= \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ $\qquad$ $= -\begin{pmatrix} -3 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \end{pmatrix}$

تمرين 8 أ :

1 - عبر عن المتجهات الموضحة كمتجه عمودي :



3 - عبر عن المتجهات الموضحة كمتجه عمودي :



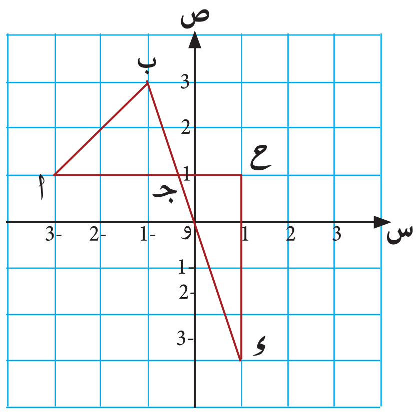
2 - عبر عن كل من المتجهات الاتية كمتجه عمودي :

(أ) $\overrightarrow{\text{أ ب}}$ (ب) $\overrightarrow{\text{ب جـ}}$ (جـ) $\overrightarrow{\text{أ جـ}}$ (د) $\overrightarrow{\text{ب ء}}$

(ح) $\overrightarrow{\text{ء ع}}$ (ف) $\overrightarrow{\text{ع جـ}}$ (ق) $\overrightarrow{\text{ء ب}}$ (هـ) $\overrightarrow{\text{ع أ}}$

4 - إذا كان أ ب= $\begin{pmatrix}1\\2-\end{pmatrix}$ ، جـ= $\begin{pmatrix}3\\4-\end{pmatrix}$ عبر عن كل من المتجهات الا تية كمتجه عمودي :

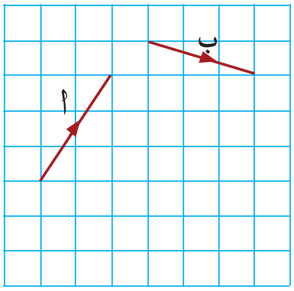
(أ) $\overrightarrow{\text{ب أ}}$ (ب) - جـ



5 -إذا كان $\overrightarrow{\text{ء ع}}$ = $\begin{pmatrix}2\\3-\end{pmatrix}$ ، $\overrightarrow{\text{ع ف}}$ = $\begin{pmatrix}3-\\4-\end{pmatrix}$ ، $\overrightarrow{\text{ف ق}}$ = $\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ عبر كمتجه عمودي :

(أ) $\overrightarrow{\text{ق ف}}$ (ب) $\overrightarrow{\text{ف ع}}$ (جـ) $\overrightarrow{\text{ع ء}}$

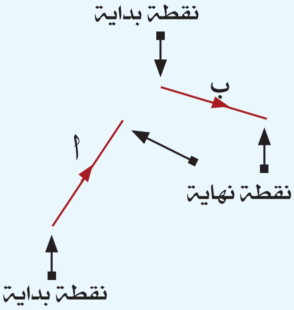
2-8 جمع وطرح المتجهات:

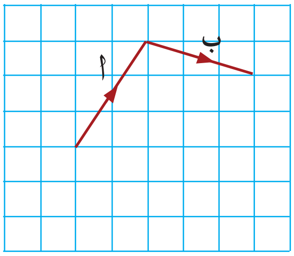


انظر إلى المتجهين أ، ب يمكن جمع المتجهين أ، ب حيث كل منهما يمثله متجه عمودي .

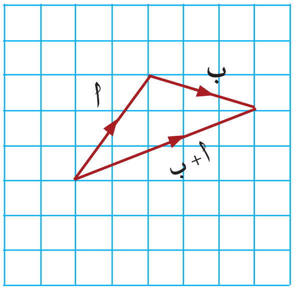
أ + ب = $\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}3\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5\\2\end{pmatrix}$

ملحوظة





يمكننا تخيل متجه الجمع باستخدام المخطط إلى اليمين. خذ نقطة البداية للمتجه ب ثم صلها إلي نقطة نهاية المتجه أ . نحصل على



ولهذا إذا رسمنا قطعة مستقيمة ثالثة تربط نقطة بداية أ إلي نقطة نهاية ب . سوف نحصل على مثلث كما هو موضح.

لا حظ أن هذا المتجه يمكن تمثيله بواسطة $\begin{pmatrix}5\\2\end{pmatrix}$ الذي يكافئ تماماً أ + ب.

ولهذا أ، ب، أ + ب يكونو مثلثاً يُعطى اسم قاعدة المثلث لجمع المتجهات.

ملحوظة

ب= $\begin{pmatrix}3\\-1\end{pmatrix}$

-ب= $\begin{pmatrix}-3\\1\end{pmatrix}$

باستخدام نفس المتجهين أ، ب نحصل على:

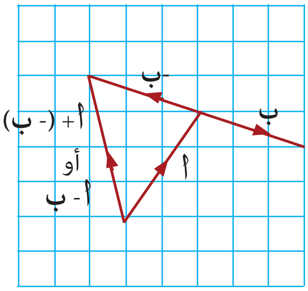
أ - ب = $\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}3\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\4\end{pmatrix}$

أ + (- ب) = $\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-3\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\4\end{pmatrix}$

حينئذ أ - ب = أ + (- ب)

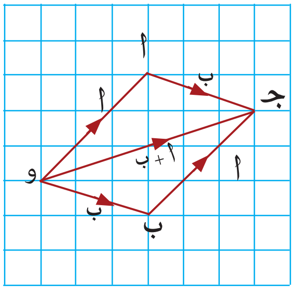
لهذا فإن طرح المتجهات في الحقيقة هو جمع المتجهات مع عكس المتجه الثاني .

ونحصل بيانيا على



ملحوظة

اعكس اتجاه ب للحصول -ب



وكبديل .
افرض أن و ، أ نقطتا البداية والنهاية للمتجه أ ،
وأن و ، ب نقطتا البداية والنهاية للمتجه ب .
أكمل متوازي الأضلاع و أ جـ ب .

أجـ = وب

و أ = بجـ

و أ + أجـ = وب + بجـ

برسم القطر (و جـ) و تحديد السهم على و جـ. محدداً اتجاه (و جـ). و جـ تمثل أ + ب

ومن قاعدة المثلث

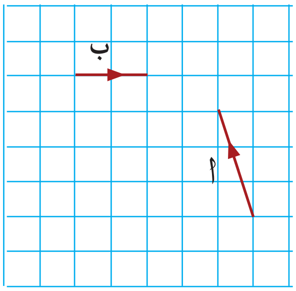
و أ + أجـ = وجـ

وب + بجـ = وجـ

ومن ثم يمكننا أن نكتب أيضا

و أ + أجـ = وب + بجـ = وجـ

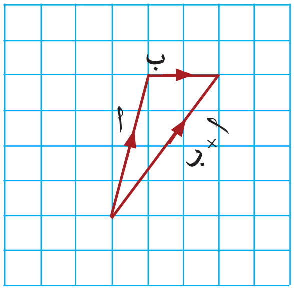
ولهذا نرى أن قطر متوازي الأضلاع و أ جـ ب يستخدم للحصول على مجموع المتجهين أ ، ب ومن ثم تعطى سبباً لتسميتها قاعدة متوازي الأضلاع لجمع المتجهات.



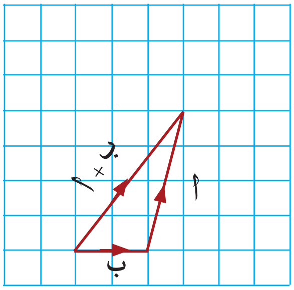
مثال 4:
(أ) بفرض أن المتجهين أ ، ب كما هو موضح . ارسم أشكالاً منفصلة لتوضح.
(i) أ + ب
(ii) ب + أ
(ب) هل أ + ب = ب + أ ؟

الحل:

(أ) (i)



(ii)



(ب) من الأشكال

أ + ب = $\begin{pmatrix}3\\3\end{pmatrix}$ ب + أ = $\begin{pmatrix}3\\3\end{pmatrix}$

∴ أ + ب = ب + أ

يوضح هذا المثال أن جمع المتجهات عملية ابدالية.

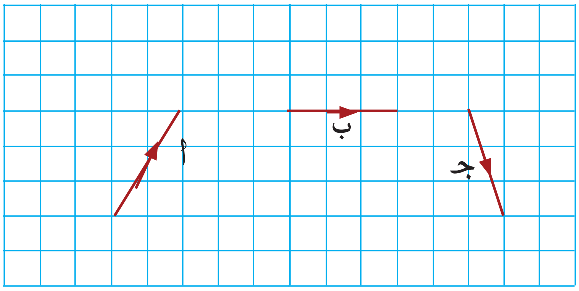
مثال 5:

(أ) بفرض أن المتجهات أ ، ب جـ كما هو موضح . ارسم أشكالاً منفصلة لتوضح.

(i) (أ + ب) + جـ

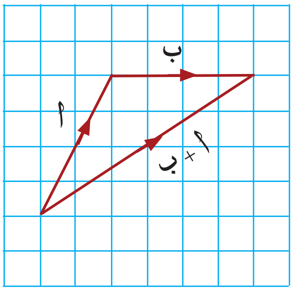
(ii) أ+ (ب + جـ)

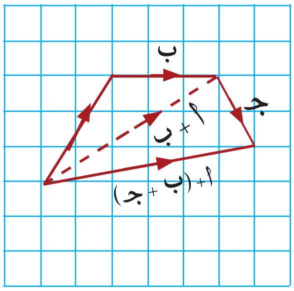
(ب) هل (أ + ب) + جـ = أ+ (ب + جـ) ؟



الحل:

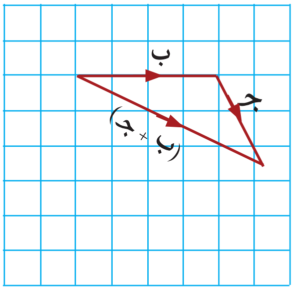
(أ) (i) نرسم (أ + ب) أولاً   ثم نجمع جـ

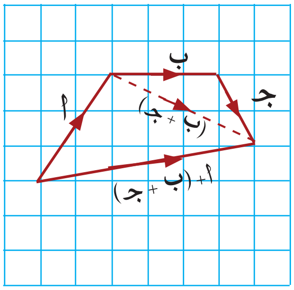




أ

(ii) نرسم (ب + جـ) أولاً   ثم نجمع (ب + جـ) إلى أ





(ب) من المخططات

(أ + ب) + جـ = $\begin{pmatrix} 6 \\ 1 \end{pmatrix}$

كما أن أ + (ب + جـ) = $\begin{pmatrix} 6 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\therefore$ (أ + ب) + جـ = أ + (ب + جـ)

يبين هذا المثال أن جمع المتجهات عملية ترتيبية.

مثال 6:

إذا كان أ = $\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$ ، ب = $\begin{pmatrix}2\\-3\end{pmatrix}$ ، حـ = $\begin{pmatrix}3\\0\end{pmatrix}$ عبر عن كل مما يأتي كمتجه عمودي.

(أ) أ − ب　　　　(ب) أ + ب − جـ

(حـ) أ − أ　　　　(ى) أ − ب + جـ

الحل:

(أ) أ − ب = $\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}2\\-3\end{pmatrix}$

= $\begin{pmatrix}-1\\5\end{pmatrix}$

(ب) أ + ب − جـ = $\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}2\\-3\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}3\\0\end{pmatrix}$

= $\begin{pmatrix}0\\-1\end{pmatrix}$

(حـ) أ − أ = $\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$

= $\begin{pmatrix}\text{صفر}\\\text{صفر}\end{pmatrix}$

(ى) أ − ب + جـ = $\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}2\\-3\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}3\\0\end{pmatrix}$

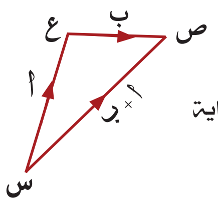
= $\begin{pmatrix}2\\5\end{pmatrix}$

إذا عنونا رؤوس المثلث في جمع المتجهات كما هو موضوح على اليسار سوف نلاحظ أن:

$\overleftarrow{\text{سص}} = \overleftarrow{\text{سع}} + \overleftarrow{\text{عص}}$

نقطة بداية　نقطة نهاية　نفس الحرف　نقطة نهاية

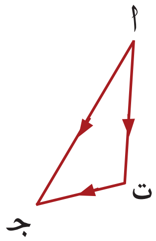
نقطة بداية



بالمثل في الرسم الثاني لدينا :

$\overleftarrow{\text{أجـ}} = \overleftarrow{\text{أت}} + \overleftarrow{\text{تجـ}}$

نفس الحرف

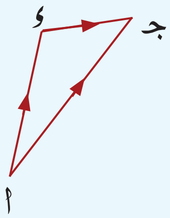


وعموما

بالنسبة للمتجه أ جـ لدنيا

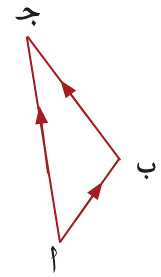
$\overleftarrow{\text{أجـ}} = \overleftarrow{\text{أى}} + \overleftarrow{\text{ىجـ}}$

حيث (ى) أي نقطة في المستوى.



مثال 7:

إذا كان $\overleftarrow{\text{أ ب}} = \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$ ، $\overleftarrow{\text{ب حـ}} = \begin{pmatrix}-3\\4\end{pmatrix}$ ، أوجد $\overleftarrow{\text{أ حـ}}$.



الحل:

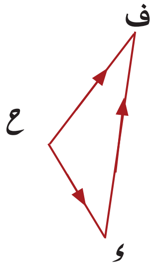
$$\overleftarrow{\text{أ جـ}} = \overleftarrow{\text{أ ب}} + \overleftarrow{\text{ب جـ}}$$

$$= \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}-3\\4\end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix}-2\\6\end{pmatrix}$$

مثال 8:

إذا كان $\overleftarrow{\text{ى ع}} = \begin{pmatrix}2\\-3\end{pmatrix}$ ، $\overleftarrow{\text{ى ف}} = \begin{pmatrix}4\\5\end{pmatrix}$ ، أوجد $\overleftarrow{\text{ع ف}}$.



الحل:

$$\overleftarrow{\text{ع ف}} = \overleftarrow{\text{ع ى}} + \overleftarrow{\text{ى ف}}$$

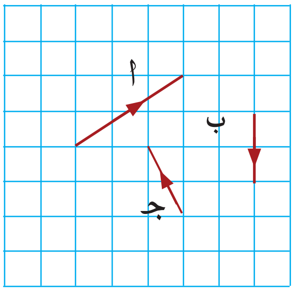
$$= -\begin{pmatrix}2\\-3\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}4\\5\end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix}-2\\3\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}4\\5\end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix}2\\8\end{pmatrix}$$

تمرين 8 ب

1 -



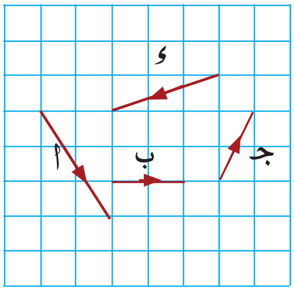
بمعلومية أن المتجهات ا ، ب، حـ هي كما هو موضح ارسم أشكالاً منفصلة لتوضيح ما يلي.

(أ) أ + ب　　(ب) أ + جـ

(حـ) ب + جـ　　(ى) أ – ب

(هـ) ب – أ　　(و) أ – جـ

2 -



بمعلومية أن المتجهات ا ، ب، حـ ، ى هي كما هو موضح ارسم أشكالاً منفصلة لتوضيح ما يلي.

(أ) أ + ب + جـ　　(ب) أ + ب + ى

(حـ) ب + جـ + ى　　(ى) أ + ب - جـ

(أ) أ – ب + جـ　　(ب) أ – ب – جـ

3 - إذا كان أ = $\begin{pmatrix}2\\-3\end{pmatrix}$ ، ب = $\begin{pmatrix}4\\0\end{pmatrix}$ ، حـ = $\begin{pmatrix}-1\\5\end{pmatrix}$ أوجد

(أ) أ + ب (ب) أ + جـ

(حـ) ب + جـ (ى) أ − ب

(هـ) ب − جـ (و) جـ − أ

4 - إذا كان أ = $\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$ ، ب = $\begin{pmatrix}-2\\3\end{pmatrix}$ ، حـ=د = $\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$ أوجد

(أ) أ + ب + جـ (ب) أ + ب + ى

(حـ) أ − ب + جـ (ى) أ + ب − ى

(هـ) أ − ب − جـ (و) ب − جـ − ى

5 - أكمل الأتي:

(أ) $\overleftarrow{\text{أب}} + \square = \overleftarrow{\text{أجـ}}$

(ب) $\square + \overleftarrow{\text{عف}} = \overleftarrow{\text{ىف}}$

(حـ) $\overleftarrow{\text{قهـ}} + \overleftarrow{\text{هـى}} = \square$

(ى) $\overleftarrow{\text{زك}} - \overleftarrow{\text{لك}} = \square$

(هـ) $\overleftarrow{\text{من}} - \square = \overleftarrow{\text{مو}}$

(و) $\square - \overleftarrow{\text{رط}} = \overleftarrow{\text{ىر}}$

(ز) $\overleftarrow{\text{ذت}} + \overleftarrow{\text{تى}} + \overleftarrow{\text{ىر}} = \square$

(ع) $\overleftarrow{\text{سس}} + \square + \overleftarrow{\text{صع}} = \overleftarrow{\text{سع}}$

6 - أوجد المتجه

(أ) $\overleftarrow{\text{أحـ}}$ إذا كان $\overleftarrow{\text{أب}} = \begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}$ ، $\overleftarrow{\text{بحـ}} = \begin{pmatrix}2\\-3\end{pmatrix}$

(ب) $\overleftarrow{\text{عف}}$ إذا كان $\overleftarrow{\text{ىع}} = \begin{pmatrix}5\\8\end{pmatrix}$ ، $\overleftarrow{\text{ىف}} = \begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}$

(حـ) $\overleftarrow{\text{قهـ}}$ إذا كان $\overleftarrow{\text{هـى}} = \begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix}$ ، $\overleftarrow{\text{قى}} = \begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix}$

(ى) $\overleftarrow{\text{زل}}$ إذا كان $\overleftarrow{\text{زك}} = \begin{pmatrix}5\\-5\end{pmatrix}$ ، $\overleftarrow{\text{لك}} = \begin{pmatrix}-8\\-9\end{pmatrix}$

(هـ) $\overleftarrow{\text{ون}}$ إذا كان $\overleftarrow{\text{من}} = \begin{pmatrix}-1\\-4\end{pmatrix}$ ، $\overleftarrow{\text{مو}} = \begin{pmatrix}-4\\-2\end{pmatrix}$

(و) $\overleftarrow{\text{ىط}}$ إذا كان $\overleftarrow{\text{رط}} = \begin{pmatrix}3\\3\end{pmatrix}$ ، $\overleftarrow{\text{ىر}} = \begin{pmatrix}3\\-7\end{pmatrix}$

(ز) $\overleftarrow{\text{ذر}}$ إذا كان $\overleftarrow{\text{ذت}} = \begin{pmatrix}-7\\7\end{pmatrix}$ ، $\overleftarrow{\text{تى}} = \begin{pmatrix}6\\-1\end{pmatrix}$ ، $\overleftarrow{\text{ىر}} = \begin{pmatrix}0\\9\end{pmatrix}$

(ع) $\overleftarrow{\text{سص}}$ إذا كان $\overleftarrow{\text{سص}} = \begin{pmatrix}-4\\-7\end{pmatrix}$ ، $\overleftarrow{\text{صع}} = \begin{pmatrix}-1\\5\end{pmatrix}$ ، $\overleftarrow{\text{سع}} = \begin{pmatrix}5\\7\end{pmatrix}$

7 - إذا كان: $\overleftarrow{\text{وأ}}$ = أ، $\overleftarrow{\text{وب}}$ = ب، $\overleftarrow{\text{بجـ}}$ = جـ عبر عن

(أ) $\overleftarrow{\text{أب}}$ بدلالة أ ، ب

(ب) $\overleftarrow{\text{أحـ}}$ بدلالة أ ، ب ،جـ

8 - إذا كان $\overleftarrow{\text{وى}}$ = ى، $\overleftarrow{\text{وط}}$ = ز، $\overleftarrow{\text{ىر}}$ = س عبر عن $\overleftarrow{\text{طر}}$ بدلالة

ي ، ز ، س

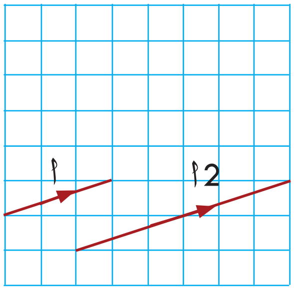
8-3 المضاعف العددي (الاتجاهي) للمتجه

تأمل المتجه أ = $\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}$

وبفرض أن هذا المتجه ضرب في مضاعف عدد (الاتجاهي) وليكن 2

2أ = 2 $\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}$

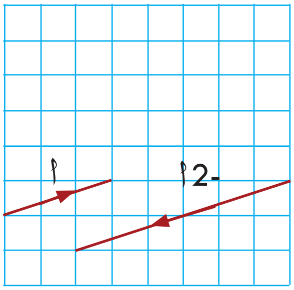
= $\begin{pmatrix}6\\2\end{pmatrix}$



يمكننا تخيل المتجهين أ ، 2 أ كما هو موضح على اليسار لاحظ أن 2 أ له نفس اتجاه أ ولكن طوله ضعف طول المتجه أ

بالمثل: -2أ = -2 $\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}$

= $\begin{pmatrix}-6\\-2\end{pmatrix}$



حيث يمكن رسمه كما هو موضح في الشكل على اليسار. في هذا الحالة اتجاه المتجه -2أ عكس اتجاه المتجه أ ولكن طوله ضعف الطول.

المتجهان 2أ ، – 2 أ يسميان مضاعفين عدديين للمتجه أ .

مثال 9:

إذا كان أ = $\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$ ، ب = $\begin{pmatrix}-2\\3\end{pmatrix}$ ، حـ = $\begin{pmatrix}0\\-1\end{pmatrix}$ عبر عن كل مما يأتي كمتجه عمودي.

(أ) أ + 2ب　　　(ب) أ – 3جـ　　　(حـ) أ + 3ب –2جـ

الحل:

(أ) أ + 2ب = $\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix}-2\\3\end{pmatrix}$

= $\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}-4\\6\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-3\\8\end{pmatrix}$

(ب) أ – 3جـ = $\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} - 3\begin{pmatrix}0\\-1\end{pmatrix}$

= $\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}0\\-3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\5\end{pmatrix}$

(حـ) أ + 3ب –2جـ = $\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} + 3\begin{pmatrix}-2\\3\end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix}0\\-1\end{pmatrix}$

= $\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}-6\\9\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}0\\2\end{pmatrix}$

= $\begin{pmatrix}-5\\13\end{pmatrix}$

مثال 10 :

اختصر المقدار المتجه $\frac{1}{2}(5\text{أ} + 4\text{ب}) - 2(\frac{1}{4}\text{ب} - \text{أ})$

الحل:

$$\frac{1}{2}(5\text{أ} + 4\text{ب}) - 2(\frac{1}{4}\text{ب} - \text{أ}) = \frac{5}{2}\text{أ} + 2\text{ب} - \frac{1}{2}\text{ب} + 2\text{أ}$$

$$= \frac{5}{2}\text{أ} + 2\text{أ} + 2\text{ب} - \frac{1}{2}\text{ب}$$

$$= \frac{9}{2}\text{أ} + \frac{3}{2}\text{ب}$$

$$= \frac{3}{2}(3\text{أ} + \text{ب})$$

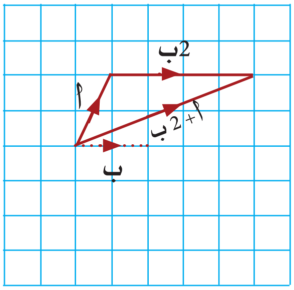
مثال 11 :

بفرض المتجهات المعطاة أ ، ب على اليمين . ارسم اشكالاً منفصلة لتوضح

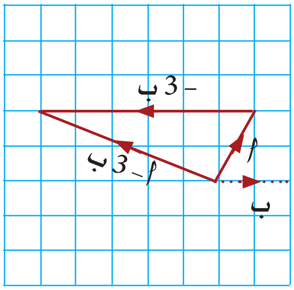
(أ) $\text{أ} + 2\text{ب}$ **(ب)** $\text{أ} - 3\text{ب}$ **(جـ)** $2\text{أ} - \frac{1}{2}\text{ب}$ **(ى)** $\frac{1}{2}\text{أ} - \frac{3}{2}\text{ب}$

الحل:

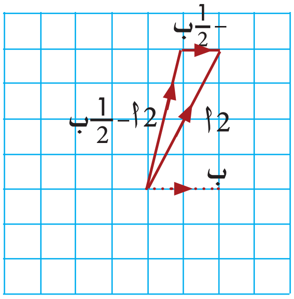
(أ)



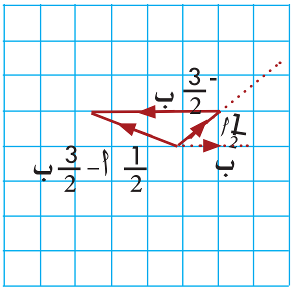
(ب)



(جـ)



(ى)



مثال 12 :

إذا كان $\text{أ} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ **،** $\text{ب} = \begin{pmatrix} \text{س} \\ -3 \end{pmatrix}$ **،** $\text{حـ} = \begin{pmatrix} 5 \\ \text{ص} \end{pmatrix}$ **احسب قيمة س ، ص إذا كان** $3\text{أ} = \text{ب} + \text{حـ}$ **.**

الحل:

$$3\text{أ} = \text{ب} + \text{حـ}$$

$$3\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \text{س} \\ -3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 \\ \text{ص} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \text{س} + 5 \\ \text{ص} - 3 \end{pmatrix}$$

$$\therefore 3 = \text{س} + 5 \quad ، \quad \text{ص} - 3 = 6$$

$$\text{س} = -2 \quad ، \quad \text{ص} = 9$$

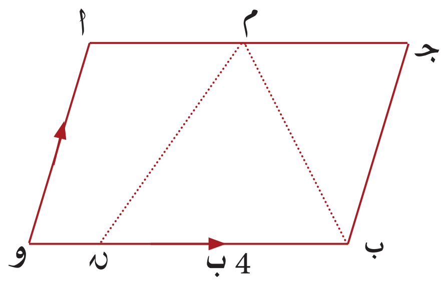
مثال 13 :

و أ جـ ب متوازي أضلاع م تنصف أ جـ.

ن تقسم القطعة المستقيمة و ب بنسبة و ن : ن ب = 1 : 3

فإذا كان $\overleftarrow{\text{و أ}}$ = أ، $\overleftarrow{\text{و ب}}$ = 4 ب عبر بأبسط ما يمكن بدلالة أ، ب

(أ) $\overleftarrow{\text{ب م}}$ (ب) $\overleftarrow{\text{ن ب}}$ (جـ) $\overleftarrow{\text{ن م}}$



الحل:

(أ) $\overleftarrow{\text{ب م}}$ = $\overleftarrow{\text{ب و}}$ + $\overleftarrow{\text{و أ}}$ + $\overleftarrow{\text{أ م}}$

= - 4 ب + أ + $\frac{1}{2}$ (4 ب)

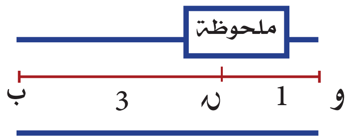
= - 4 ب + أ + 2 ب = أ - 2 ب

(ب) $\overleftarrow{\text{ن ب}}$ = $\frac{3}{4}$ $\overleftarrow{\text{و ب}}$ ، (و ن : ن ب = 1 : 3 ⇐ ن ب : و ب = 3 : 4)

= $\frac{3}{4}$ (4 ب) = 3 ب

(جـ) $\overleftarrow{\text{ن م}}$ = $\overleftarrow{\text{ن ب}}$ + $\overleftarrow{\text{ب م}}$

= 3 ب + (أ - 2 ب) = أ + ب



تمرين 8 جـ

1 - إذا كان أ = $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ ، ب = $\begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}$ ، جـ = $\begin{pmatrix} 5 \\ 0 \end{pmatrix}$ عبر عن كل ما ياتي كمتجه عمودي

(أ) أ + ب (ب) ب - جـ

(جـ) أ - 2ب (د) 2ب + 3جـ

(هـ) 5 أ + 8 ب - جـ (و) 3 أ - 2 ب + جـ

2 - اختصر المقادير المتجهة الاتية:

(أ) أ + 2 (ب - أ)

(ب) 3 أ - 5 (أ - 2ب)

(جـ) $\frac{2}{3}$ (4أ - 3ب) - 2 أ

(د) (أ - 2ب) - $\frac{3}{4}$ (4أ + 2ب)

(هـ) $\frac{1}{2}$ (4ب - أ) - $\frac{3}{2}$ (2ب - أ)

(و) $\frac{2}{3}$ (3أ - 4ب) + $\frac{1}{2}$ (2أ - 3ب)

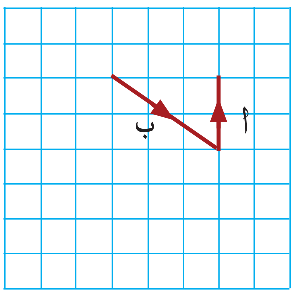
3 - إذا كان المتجهان ا ، ب ، ارسم أشكالاً منفصلة لتوضح:

(أ) 2 أ + ب

(ب) أ - 2ب

(جـ) $\frac{1}{2}$ أ - ب

(د) $\frac{2}{3}$ ب - $\frac{1}{2}$ أ

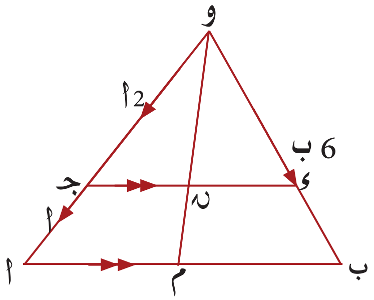


4 - في Δ أ ب و نقطة م تنصف $\overleftarrow{\text{أ ب}}$ ، $\overleftarrow{\text{جـ د}}$ // $\overleftarrow{\text{أ ب}}$ ، وتقطع $\overleftarrow{\text{و م}}$ في ن إذا كان $\overleftarrow{\text{و أ}}$ = 3 أ ، $\overleftarrow{\text{و ب}}$ = 6 ب ، $\overleftarrow{\text{و جـ}}$ = 2 أ عبر عن الآتي في أبسط صورة بدلالة أ أو ب

(أ) $\overleftarrow{\text{أ ب}}$ (ب) $\overleftarrow{\text{أ م}}$

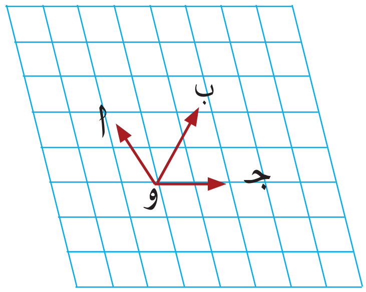
(جـ) $\overleftarrow{\text{و م}}$ (د) $\overleftarrow{\text{جـ د}}$

(هـ) $\overleftarrow{\text{و د}}$ (و) $\overleftarrow{\text{ن د}}$



5 - إذا كان ى = $\begin{pmatrix} 8 \\ 5 \end{pmatrix}$ ، ز = $\begin{pmatrix} -3 \\ \text{ص} \end{pmatrix}$ ، ل = $\begin{pmatrix} \text{س} \\ 2 \end{pmatrix}$ احسب قيمة س، ص إذا كان 2 ى = ز - ل

6 - (أ) في الشكل المرسوم 3 متجهات و أ ، و ب ، و جـ.
إذا كان و ت = و أ + 2 و ب - 3 و جـ حدد النقطة (ت) على الرسم وعنونها بوضوح.



(ب) المتجهات العمودية ى، ذ، س عرفت كما يلي :

ى = $\begin{pmatrix}10\\4\end{pmatrix}$ ، ر = $\begin{pmatrix}-2\\3\end{pmatrix}$ ، س = $\begin{pmatrix}5\\ط\end{pmatrix}$ ،

(i) عبر عن $\frac{1}{2}$ى + 3 ر كمتجه عمودي.

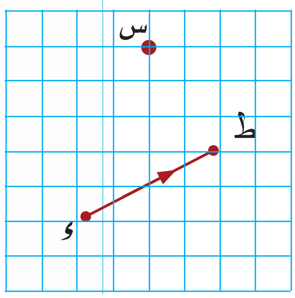
(ii) إذا كان ى - س = س - ر ، أوجد قيمة ى، ط

(7) يبين الشكل موقع النقط س، ى، ط حيث ى ط = $\begin{pmatrix}4\\2\end{pmatrix}$

(أ) ص نقطة بحيث أن ى ط ص س متوازي أضلاع.
عبر عن ط ص كمتجه عمودي.

(ب) ع نقطة بحيث أن ى ط س ع متوازي أضلاع .
عبر عن س ع كمتجه عمودي.

(جـ) ر نقطة تنصيف ى ط عبر عن س ر كمتجه عمودي.

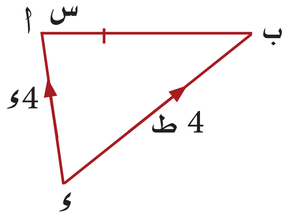


8 - (أ) النقطة س تقع على القطعة أ ب ، أ س : س ب = 1 : 3
باعتبار نقطة الأصل و المتجه و أ يساوي 4 ى . والمتجه
و ب = 4 ط

عبر بدلالة ى، ط عن :

(أ) أ ب (ب) أ س

(جـ) و س أعط هذه الإجابة الأخيرة في أبسط صورة ممكنة.



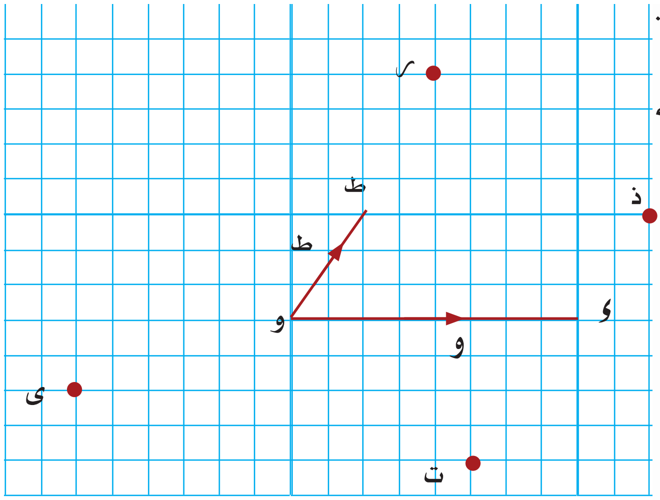
9 - إذا كان و ى = ى ، و ط = ط ، ر ، ذ ، ت ، ى أربع نقط على الشبكة عبر بدلالة ى أو ط عن :

(أ) و ر

(ب) و ذ

(جـ) و ت

(د) و ى



10- ى = $\begin{pmatrix}5\\-2\end{pmatrix}$ ، ط = $\begin{pmatrix}-3\\1\end{pmatrix}$ ، ر = $\begin{pmatrix}س\\7\end{pmatrix}$ ، ذ = $\begin{pmatrix}-4\\ص\end{pmatrix}$

(أ) أوجد :

(i) 2 ى + 3 ط

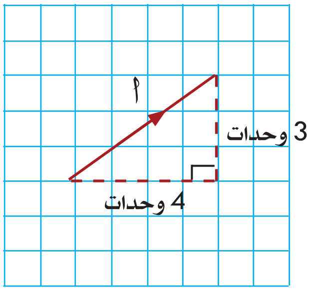
(ii) ى - ط

()إذا كان 2 ى = ر + ذ احسب قيمتي س ، ص .

8-4 مقدار المتجه:

مقدار المتجه أ يرمز له بالرمز | أ |

على سبيل المثال أ = $\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$ يمكن بيانه على الصورة .



مقدار المتجه أ يمكن إيجاده باستخدام نظرية "فيثاغورث".

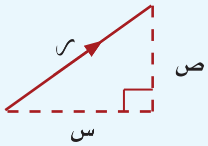
∴ | أ | = $\sqrt{4^2+3^2}$

= $\sqrt{25}$

= 5 وحدات

إذا كانت ر = $\begin{pmatrix} س \\ ص \end{pmatrix}$

فإن | ر | = $\sqrt{س^2+ص^2}$ وحدة



مثال 14 :

إذا كان أ = $\begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix}$ ، ب = $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ أوجد | أ | ، | ب |

الحل:

| أ | = $\sqrt{5^2+3^2}$

= $\sqrt{34}$

= 5.83 وحدة (لأقرب ثلاثة أرقام معنوية).

| ب | = $\sqrt{2^2+(-1)^2}$

= $\sqrt{5}$

= 2.24 وحدة (لأقرب ثلاثة أرقام معنوية)

مثال 15 :

إذا كان حـ = $\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ أوجد : (أ) | 2حـ | (ب) | -2حـ | (جـ) 2 | حـ |

الحل:

(أ) 2 جـ = 2 $\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$

= $\begin{pmatrix} 6 \\ 8 \end{pmatrix}$

| 2جـ | = $\sqrt{6^2 + 8^2}$

= $\sqrt{100}$

= 10 وحدات

(ب) -2حـ = -2 $\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$

= $\begin{pmatrix} -6 \\ -8 \end{pmatrix}$

| -2جـ | = $\sqrt{(-6)^2 + (-8)^2}$

= $\sqrt{100}$

= 10 وحدات

(جـ) | 2جـ | = 2 $\sqrt{3^2 + 4^2}$

= 2 $\sqrt{25}$

= 2 × 5 وحدات

= 10 وحدات

لاحظ من المثال السابق أن على العموم ،

| هـ أ | = | - هـ أ | = هـ | أ | حيث هـ مضاعف عددي، هـ > صفر .

مثال 16 :

إذا كان | ✓ | = 2 وحدة ، أوجد :

(أ) 3 | ✓ | (ب) | 5 ✓ | (جـ) | -8 ✓ |

الحل:

(أ) 3 | ✓ | = 3 × 2

= 6 وحدة

(ب) | 5 ✓ | = 5 | ✓ |

= 5 × 2

= 10 وحدات

(جـ) | -8 ✓ | = 8 | ✓ |

= 8 × 2

= 16 وحدة

ملحوظة

تعامل مع أربعة أرقام معنوية

| أ+ب | ≠ | أ | + | ب |

مثال 17 :

إذا كان أ = $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ ، ب = $\begin{pmatrix} -3 \\ 5 \end{pmatrix}$ ، أوجد :

(أ) | أ | + | ب | (ب) | أ+ ب |

(حـ) | 2ب-أ | (ء) 2 | ب | - | أ |

الحل:

(أ) | أ | + | ب | = $\sqrt{1^2 + 2^2} + \sqrt{(-3)^2 + 5^2}$

= $\sqrt{5} + \sqrt{34}$

= 2.236+5.831

= 8.07 وحدة (لأقرب ثلاثة أرقام معنوية)

(ب) أ + ب = $\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}-3\\5\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-2\\7\end{pmatrix}$

| أ + ب | = $\sqrt{(-2)^2 + 7^2}$

$= \sqrt{53}$

$= 7.28$ (لأقرب ثلاثة أرقام معنوية)

ملحوظة

| 2ب − أ | $\neq$ 2 | ب | − | أ |

(حـ) 2ب − أ = $2\begin{pmatrix}-3\\5\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix}-6\\10\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-7\\8\end{pmatrix}$

| 2ب − أ | = $\sqrt{(-7)^2 + 8^2}$

$= \sqrt{113}$

$= 10.6$ (لأقرب ثلاثة أرقام معنوية)

(ء) 2 | ب | − | أ | = $2\sqrt{(-3)^2 + 5^2} - \sqrt{1^2 + 2^2}$

$= 2\sqrt{34} - \sqrt{5}$

$= 2\,(5.831) - 2.236$

$= 9.43$ وحدة (لأقرب ثلاثة أرقام معنوية).

مثال 18 :

إذا كان أ ب = $\begin{pmatrix}1\\-2\end{pmatrix}$ و ب جـ = $\begin{pmatrix}3\\5\end{pmatrix}$ ، و أوجد (أ جـ)

الحل :

أ جـ = أ ب + ب جـ

$= \begin{pmatrix}1\\-2\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}3\\5\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}4\\3\end{pmatrix}$

$\therefore$ | أ جـ | = $\sqrt{4^2 + 3^2}$

$= \sqrt{25}$

= 5 وحدات

ملحوظة

استخرج المتجه $\overleftarrow{\text{أ جـ}}$ ثم أوجد | $\overleftarrow{\text{أ جـ}}$ |

مثال 19 :

إذا كان ءط = $\begin{pmatrix} 3 \\ 4- \end{pmatrix}$ ، ر ذ = $\begin{pmatrix} 6 \\ \text{ث} \end{pmatrix}$ ، ر ذ يوازي ءط . أوجد :

(أ) قيمة ت (ب) | ر ذ |

الحل :

(أ) ر ذ // ءط ⟵ ر ذ = ك ءط حيث ك كمية قياسية .

∴ $\begin{pmatrix} 6 \\ \text{ث} \end{pmatrix}$ = ك $\begin{pmatrix} 3 \\ 4- \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 6 \\ \text{ث} \end{pmatrix}$ = $\begin{pmatrix} 3\text{ك} \\ 4-\text{ك} \end{pmatrix}$

∴ 3 ك = 6 ⟵ ك = 2

- 4 ك = ت ⟵ ت = - 4 (2)

= - 8

(ب) ر ذ = $\begin{pmatrix} 6 \\ 8- \end{pmatrix}$

| ر ذ | = $\sqrt{6^2 + (-8)^2}$

= $\sqrt{100}$

= 10 وحدات

مثال 20 :

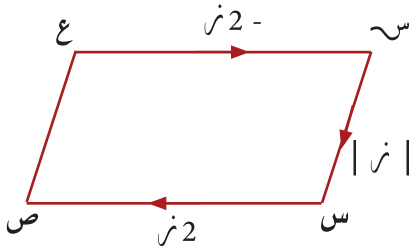
الشكل رباعي الأضلاع سَ س ص ع فيه : سَ س = ى، س ص = 2 ر،

ع سَ = - 2 ر، حيث | ى | = | ر |

(أ) ارسم الشكل الرباعي سَ س ص ع

(ب) ما هو الاسم الخاص للشكل الرباعي سَ س ص ع

(جـ) عبر عن ص ع في أبسط ما يمكن بدلالة ى أو ر .



الحل:

(أ) ع سَ = - 2 ر ⟵ سَ ع = 2 ر

سَ ع // س ص ، | سَ ع | = | س ص | = 2 | ر |

| سَ س | = | ى | = | ر | = $\frac{1}{2}$ | سَ ع |

ومن ثم فإن الرسم المطلوب موضح إلى اليسار .

(ب) الشكل الرباعي سَ س ص ع متوازي أضلاع .

(جـ) ص ع = س سَ

= - سَ س

= - ى

تمرين 8 د

1- إذا كان أ = $\begin{pmatrix}1-\\3\end{pmatrix}$ ، ب = $\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$ ، أوجد ما يأتي:

(أ) | أ |　　　(ب) | ب |

(حـ) | 2أ |　　　(ى) | -3ب |

(هـ) -3 | أ |　　　(و) | $\frac{1}{2}$ ب |

(ز) | أ - ب |　　　(ح) | أ | - | ب |

(ط) | 2أ + ب |　　　(ى) 2 | أ | + | ب |

2 - إذا كان $\overleftarrow{\text{ءع}}$ = $\begin{pmatrix}8\\13\end{pmatrix}$ ، $\overleftarrow{\text{ع ف}}$ = $\begin{pmatrix}4\\8-\end{pmatrix}$ أوجد | $\overleftarrow{\text{ء ف}}$ |

3 - | $\overleftarrow{\text{ق هـ}}$ | = $\begin{pmatrix}\text{م}\\12\end{pmatrix}$ ، ن ل = $\begin{pmatrix}3-\\4\end{pmatrix}$ ، إذا كان ق هـ // ن ل

أوجد :

(أ) قيمة م.

(ب) | $\overleftarrow{\text{ق هـ}}$ |

4 - $\overleftarrow{\text{ك ل}}$ = $\begin{pmatrix}3.5\\2\end{pmatrix}$ ، $\overleftarrow{\text{م ن}}$ = $\begin{pmatrix}\text{ن}\\4\end{pmatrix}$. إذا كان $\overleftarrow{\text{م ن}}$ // $\overleftarrow{\text{ك ل}}$ ،

أوجد دون استخدام الآلة حاسبة الجيب :

(أ) قيمة ن .

(ب) $\overleftarrow{\text{م ن}}$ أعط إجابتك مقرباً لأقرب عدد صحيح .

5 - إذا كان $\overleftarrow{\text{ءط}}$ = $\begin{pmatrix}6\\8\end{pmatrix}$ ، $\overleftarrow{\text{م ذ}}$ = $\begin{pmatrix}\text{ت}\\\text{صفر}\end{pmatrix}$ ، أوجد :

(أ) $\overleftarrow{\text{ءط}}$

(ب) القيمتين الممكنتين ت إذا كان $\overleftarrow{\text{م ذ}}$ = $\overleftarrow{\text{ءط}}$

6 - $\overleftarrow{\text{ءط}}$ = $\begin{pmatrix}2\\4-\end{pmatrix}$ ، $\overleftarrow{\text{ط م}}$ = $\begin{pmatrix}8-\\6\end{pmatrix}$ أوجد :

(أ) $\overleftarrow{\text{ءم}}$

(ب) $\overleftarrow{\text{م س}}$ بحيث أن 2 $\overleftarrow{\text{م س}}$ = $\overleftarrow{\text{ط ء}}$

(جـ) | $\overleftarrow{\text{ط م}}$ |

7 - المتجه $\overleftarrow{\text{أب}}$ ، المتجه $\overleftarrow{\text{جـء}}$ كما يأتي :

$\overleftarrow{\text{أب}}$ = $\begin{pmatrix}6-\\8\end{pmatrix}$ ، $\overleftarrow{\text{جـء}}$ = $\begin{pmatrix}\text{ى}\\2\end{pmatrix}$

(أ) أوجد | $\overleftarrow{\text{أب}}$ |

(ب) $\overleftarrow{\text{جـء}}$ // $\overleftarrow{\text{أب}}$ ، أوجد قيمة ى .

8 - ء = $\begin{pmatrix}6\\8-\end{pmatrix}$ ، ط = $\begin{pmatrix}5\\4\end{pmatrix}$ ، م = $\begin{pmatrix}9\\\text{ك}\end{pmatrix}$

(أ) عبر عن ء + 2 ط كمتجه عمودي .

(ب) أوجد | ء |

(جـ) إذا كان م // ء أوجد قيمة ك

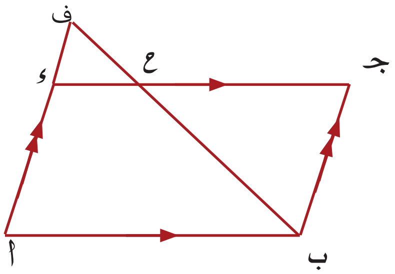
9 - أ ب جـ ء متوازي أضلاع، ع نقطة على ءجـ بحيث ءع = $\frac{1}{3}$ ءجـ تقابل المستقيم أ ء مع ب ع عندما مدّا في نقطة ف

أ ب = $\begin{pmatrix}6\\\text{صفر}\end{pmatrix}$ ، أ ء = $\begin{pmatrix}2\\4\end{pmatrix}$

(أ) أوجد قيمة | أ ب |

(ب) عبر عن كل مما يأتي على صورة متجه عمودي

(i) $\overleftarrow{\text{جـ ب}}$　(ii) $\overleftarrow{\text{ع جـ}}$　(iii) $\overleftarrow{\text{ف ع}}$



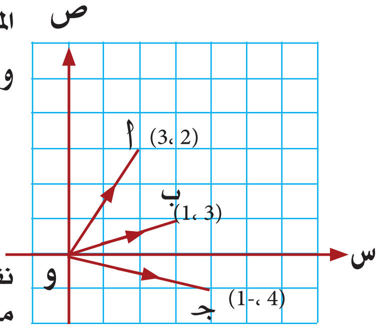
10 - $\overleftarrow{\text{ء ط}}$ = $\begin{pmatrix}4-\\7\end{pmatrix}$ ، $\overleftarrow{\text{ط م}}$ = $\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$ ، $\overleftarrow{\text{م ذ}}$ = $\begin{pmatrix}\text{هـ}\\10.5\end{pmatrix}$.

(أ) عبر كمتجه عمودي عن $\overleftarrow{\text{ء ط}}$ + 3 $\overleftarrow{\text{ط م}}$

(ب) إذا كان $\overleftarrow{\text{م ذ}}$ // $\overleftarrow{\text{ء ط}}$ أوجد قيمة هـ

(جـ) أوجد | $\overleftarrow{\text{ء ط}}$ | مقرباً إجابتك لأقرب عدد صحيح .

5-8 متجهات الموضع



المتجهات و أ = $\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}$ و ب = $\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}$،

و جـ = $\begin{pmatrix}4\\-1\end{pmatrix}$ يمكن عرضها على المستوى الديكارتي كما هو مبين حيث الاحداثيات.

(أ) للنقطة أ هي (3، 2)

(ب) للنقطة ب هي (1، 3)

(جـ) للنقطة جـ هي (4، - 1).

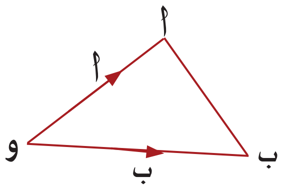
نقول : إن المتجه و أ يعرف موضع النقطة أ بالنسبة لنقطة الأصل (و) . ولهذا و أ يسمى متجه موضع للنقطة أ بالنسبة لنقطة الأصل و . بالمثل و ب ، و جـ متجهات موضع للنقط ب ، جـ على التوالي.

يعطي متجه الموضع لنقطة ى (س، ص) عن طريق و ى = $\begin{pmatrix}س\\ص\end{pmatrix}$ حيث (و) هي نقطة الأصل.

يرمز غالباً لمتجه الموضع بحرف .على سبيل المثال في مثلث و أ ب متجهات الموضع هي:

و أ = أ

و ب = ب



أ ب ليس متجه موضع بالنسبة لنقطة الأصل(و)

لكن يمكن التعبير عنه بدلالة أ ،ب،

أ ب = أ و + و ب

= - و أ + و ب

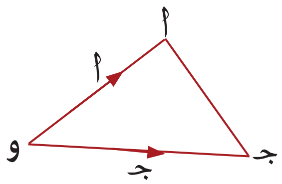
= - أ + ب

= ب - أ

بالمثل أ جـ = و جـ - و أ

= جـ - أ

الحرف أ أولاً الحرف أ الاخير



لاحظ كيفية انعكاس ترتيب الحروف أ،ب ثم أ ، جـ.

إذا كانت متجهات الموضع للنقط أ ،ب بالنسبة لنقطة الأصل(و)

هي و أ = أ، و ب = ب على التوالي فإن:

أ ب = و ب - و أ

= ب - أ

مثال 21 :

إذا كانت النقطة أ (7، 0)، أ ب = $\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}$، أوجد إحداثيات النقطة ب .

الحل:

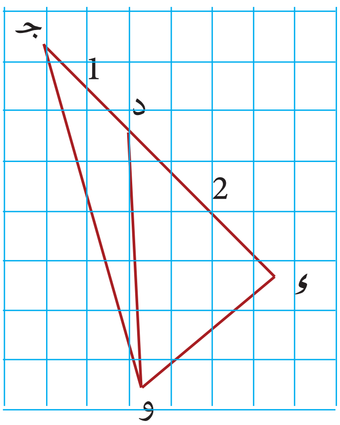
متجه الموضع لـ أ ، و أ = $\begin{pmatrix}7\\0\end{pmatrix}$

متجه الموضع لـ ب، و ب = و أ + أ ب

= $\begin{pmatrix}7\\0\end{pmatrix}$ + $\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}$

= $\begin{pmatrix}10\\2\end{pmatrix}$ إحداثيات النقطة ب (10، 2).

مثال 22:



إذا كانت النقطة حـ (4، 3)، ى (10، 12)، ى نقطة على جـ ى ، جـ د = $\frac{1}{2}$ د ى ،

عبر عما يأتي كمتجه عمودي

(أ) جـ ى (ب) جـ د

(جـ) متجه الموضع للنقطة د بالنسبة لنقطة الأصل(و) .

الحل:

(أ) $\overleftarrow{\text{جـ ى}} = \overleftarrow{\text{و ى}} - \overleftarrow{\text{و جـ}}$.

$= \begin{pmatrix}10\\12\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}4\\3\end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix}6\\9\end{pmatrix}$

(ب) $\overleftarrow{\text{حـ د}} = \frac{1}{2}\ \overleftarrow{\text{د ى}}$

$= \frac{1}{3}\ \overleftarrow{\text{حـ ى}}$

$= \frac{1}{3}\begin{pmatrix}6\\9\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}$

(جـ) $\overleftarrow{\text{و د}} = \overleftarrow{\text{و حـ}} + \overleftarrow{\text{حـ د}}$

$= \begin{pmatrix}4\\3\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}6\\6\end{pmatrix}$

مثال 23 :

ع ف ن هـ متوازي أضلاع، إذا كانت إحداثيات النقط الثلاث كالآتي:

ع (0، 1)، ف(- 2، 2)، ن (1،3)، أوجد إحداثيات النقطة هـ.

الحل

نفرض أن إحداثيات النقطة هـ(س ، ص).

$\overleftarrow{\text{ف ع}} = \overleftarrow{\text{و ع}} - \overleftarrow{\text{و ف}}$

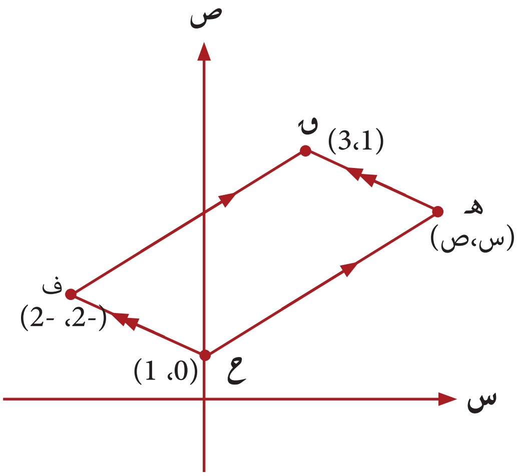
$= \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}-2\\2\end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix}$

$\overleftarrow{\text{ن هـ}} = \overleftarrow{\text{و هـ}} - \overleftarrow{\text{و ن}}$

$= \begin{pmatrix}\text{س}\\\text{ص}\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix}\text{س}-1\\\text{ص}-3\end{pmatrix}$



ع ف ن هـ متوازي أضلاع ،

$\overleftarrow{\text{ن هـ}} = \overleftarrow{\text{ف ع}}$

$\begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\text{س}-1\\\text{ص}-3\end{pmatrix}$

$\text{س} - 1 = 2$ $\qquad$ $\text{ص} - 3 = -1$

$\text{س} = 3$ $\qquad$ $\text{ص} = 2$

إحداثيات النقطة هـ هي (3، 2).

تمرين 8 هـ

1 - إذا كانت إحداثيات النقطة أ (1، 6)، $\overrightarrow{\text{أب}} = \begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}$، أوجد إحداثيات النقطة ب

2 - إذا كانت إحداثيات النقطة جـ(- 2 ،0)، د (- 5، 4) وكان $\overrightarrow{\text{دع}} = \begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}$، أوجد

(أ) | جـ د |

(ب) إحداثيات النقطة ع.

3 - إذا كانت النقطة ف (4، 3)، ن (8، 11) النقطة هـ تقع على المستقيم ف ن بحيث ف هـ = $\frac{1}{3}$ هـ ن.

عبر كمتجه عمودي عن:

(أ) ف ن

(ب) ف هـ

(جـ) متجه الموضع للنقطة هـ بالنسبة لنقطة الأصل(و).

4 - إذا كانت(و) نقطة الأصل، ل نقطة بحيث و ل = $\begin{pmatrix}1\\-4\end{pmatrix}$ النقطة ك هي منتصف ل ك إحداثياتها (- 2 ، - 1). عبر عن و ك كمتجه عمودي.

5 - و ل م ن متوازي أضلاع حيث (و) نقطة الأصل إذا كانت إحداثيات ل (-2،1)، م (2،1) على التوالي أوجد إحداثيات ن مستخدماً طريقة المتجهات.

6 - $\overrightarrow{\text{أب}} = \begin{pmatrix}-8\\6\end{pmatrix}$

(أ) احسب أ ب

(ب) إذا كان أ (3،7)، أوجد إحداثيات النقطة ب.

(جـ) إذا كان جـ د // أ ب، جـ د = $\frac{1}{2}$ أ ب، عبر عن جـ د كمتجه عمودي.

7 - $\overrightarrow{\text{أب}} = \begin{pmatrix}-6\\8\end{pmatrix}$

(أ) احسب | أ ب |

(ب) إذا كان أ ب جـ د متوازي أضلاع ، عبر عن $\overrightarrow{\text{جـد}}$ كمتجه عمودي.

(جـ) إذا كان أ (7 ، 3)، م ينصف أ ب ، أوجد إحداثيات م

8 - أب = $\begin{pmatrix}7\\1\end{pmatrix}$ ، ب جـ = $\begin{pmatrix}2\\-5\end{pmatrix}$

(أ) عبر عن أ جـ كمتجه عمودي.

(ب) إحداثيات النقطة د(- 2 ،0)، ع(هـ ، 6)

(جـ) (i) عبر عن المتجه $\overrightarrow{\text{دع}}$ كمتجه عمودي.

(ii) إذا كان د ع // أ ب أوجد قيمة هـ

(iii) إذا كان | د ع | = | أ ب | أوجد قيمتين ممكنتين للنقطة هـ

9 - $\overrightarrow{\text{وأ}} = \begin{pmatrix}-2\\1\end{pmatrix}$ ، $\overrightarrow{\text{وب}} = \begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix}$

(أ) إذا كان $\overrightarrow{\text{وجـ}} = \overrightarrow{\text{وأ}} + \overrightarrow{\text{وب}}$ عبر عن $\overrightarrow{\text{وجـ}}$ كمتجه عمودي.

(ب) عبر عن المتجه $\overrightarrow{\text{أب}}$ كمتجه عمودي.

(جـ) إذا كان $\overrightarrow{\text{لم}} = \begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix}$ ، $\overrightarrow{\text{أم}} = \begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$

ماهو الاسم الخاص الذي يعطي للشكل الرباعي أ ل م و.

10 - إذا كانت إحداثيات د (1 ، 1) وكان:

د ط = $\begin{pmatrix}-3\\2\end{pmatrix}$ ، د ر = $\begin{pmatrix}5\\4\end{pmatrix}$، ت منتصف $\overrightarrow{\text{طر}}$ أوجد

(أ) ط ر

(ب) د ت

(جـ) إحداثيات النقطة س بحيث د ط س ر يصبح متوازي أضلاع.

11 - إذا كانت ى = $\begin{pmatrix}6\\-8\end{pmatrix}$ ، ر = $\begin{pmatrix}-9\\10\end{pmatrix}$ ، س = $\begin{pmatrix}15\\\text{د}\end{pmatrix}$ أوجد

(أ) (i) | ى | (ii) 2 ى + ر

(ب) إذا كان المتجه س // للمتجه ى أحسب قيمة د.

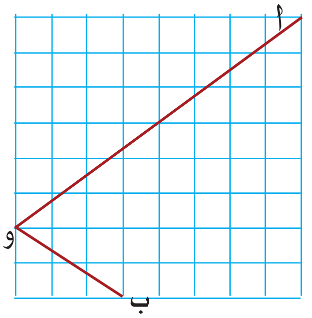
12 - د = $\begin{pmatrix}1\\-4\end{pmatrix}$ ، ط = $\begin{pmatrix}-3\\4\end{pmatrix}$، ر = $\begin{pmatrix}\text{م}\\2\end{pmatrix}$ ت منتصف ط ر أوجد

(أ) أوجد قيمة ط .

(ب) عبر عن (2د - ط) كمتجه عمودي

(جـ) إذا كانت د // ر أوجد قيمة م.

13 -



في الشكل المرسوم $\overrightarrow{\text{وأ}} = \begin{pmatrix}8\\6\end{pmatrix}$ ، $\overrightarrow{\text{وب}} = \begin{pmatrix}3\\-2\end{pmatrix}$،

(أ) أوجد:

(i) | $\overrightarrow{\text{وأ}}$ |

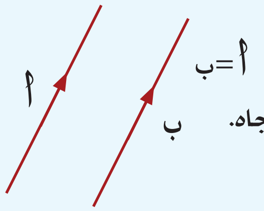
(ii) $\overrightarrow{\text{بأ}}$

(ب) إذا كان $\overrightarrow{\text{بجـ}} = \begin{pmatrix}\text{س}\\9\end{pmatrix}$، $\overrightarrow{\text{بجـ}}$ = ك $\overrightarrow{\text{وأ}}$، أوجد قيمة ص.

ملخص

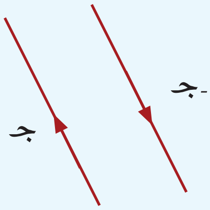
1- المتجه له مقدار وله اتجاه بينما الكمية اللا موجهة لها مقدار فقط ومن أمثلة المتجهات السرعة الاتجاهية، العجلة، القوة ... الخ. ومن أمثلة الكميات اللا موجهة السرعة اللا اتجاهية، الكتلة، المساحة، الزمن ... الخ.

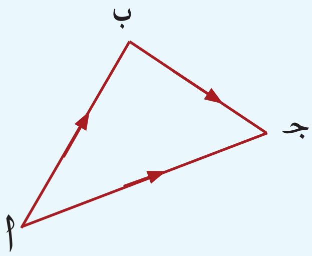
2- المتجه الذي مقداره صفر يعرف باسم المتجه الصفري، والمتجه الصفري ليس له اتجاه.



3- يتساوى المتجهان أ، ب فقط إذا كان لهما نفس المقدار ونفس الاتجاه.

4- المتجهان جـ، -جـ لهما نفس المقدار ولكنهما يختلفان في الاتجاه.





5- قاعدة المثلث لجمع المتجهات.

$\overleftarrow{\text{أجـ}} = \overleftarrow{\text{أب}} + \overleftarrow{\text{بجـ}}$

6- إذا كان المتجه أ = ك ب حيث ك كمية لا موجهة فإن:

(أ) | أ | = ك | ب | .

(ب) (i) المتجهان أ، ب لهما نفس الاتجاه إذا كانت ك > صفر

(ii) المتجهان أ، ب كل منهما اتجاهه عكس الآخر إذا كانت ك < صفر

7- متجه الموضع للنقطة د (س ، ص) يعطى بواسطة $\overleftarrow{\text{ود}} = \begin{pmatrix} \text{س} \\ \text{ص} \end{pmatrix}$ حيث (و) نقطة الأصل.

8- إذا كانت متجهات الموضع للنقطتين أ ب بالنسبة للأصل (و) هي: $\overleftarrow{\text{وأ}}$ = أ ، $\overleftarrow{\text{وب}}$ = ب على التوالي

فإن: $\overleftarrow{\text{أب}} = \overleftarrow{\text{وب}} - \overleftarrow{\text{وأ}}$ = ب - أ.

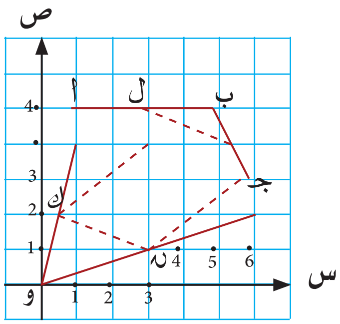
6- إذا كان ✓ = $\begin{pmatrix} \text{س} \\ \text{ص} \end{pmatrix}$ فإن مقدار | أ | $= \sqrt{\text{س}^2 + \text{ص}^2}$ من الوحدات

استقصاء الرياضيات

الشكل الرباعي الناتج عن نقاط تصنيف أضلاع أي شكل رباعي

تأمل الشكل الرباعي: و أ ب جـ إلى اليسار حيث النقط ك، ل، م، ن

منتصفات أضلاعه و أ ، أ ب ، ب جـ ، جـ و على التوالي. ومن ثم فإن المتجهات العمودية هي:



$\overleftarrow{\text{و أ}} = \begin{pmatrix}1\\4\end{pmatrix}$ ، $\overleftarrow{\text{أ ب}} = \begin{pmatrix}4\\0\end{pmatrix}$

$\overleftarrow{\text{جـ ب}} = \begin{pmatrix}-1\\2\end{pmatrix}$ ، $\overleftarrow{\text{و جـ}} = \begin{pmatrix}6\\2\end{pmatrix}$

$$\overleftarrow{\text{و ك}} = \frac{1}{2}\overleftarrow{\text{و أ}} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\2\end{pmatrix}$$

$$\overleftarrow{\text{و ل}} = \overleftarrow{\text{و أ}} + \overleftarrow{\text{أ ل}}$$

$$= \overleftarrow{\text{و أ}} + \frac{1}{2}\overleftarrow{\text{أ ب}}$$

$$= \begin{pmatrix}1\\4\end{pmatrix} + \frac{1}{2}\begin{pmatrix}4\\0\end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix}$$

$$\overleftarrow{\text{ك ل}} = \overleftarrow{\text{و ل}} - \overleftarrow{\text{و ك}}$$

$$= \begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\2\end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix}2\frac{1}{2}\\2\end{pmatrix}$$

بالمثل $\overleftarrow{\text{و ن}} = \frac{1}{2}\overleftarrow{\text{و جـ}} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}6\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}$

$$\overleftarrow{\text{و م}} = \overleftarrow{\text{و جـ}} + \overleftarrow{\text{جـ م}}$$

$$= \overleftarrow{\text{و جـ}} + \frac{1}{2}\overleftarrow{\text{جـ ب}}$$

$$= \begin{pmatrix}6\\2\end{pmatrix} + \frac{1}{2}\begin{pmatrix}-1\\2\end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix}5\frac{1}{2}\\3\end{pmatrix}$$

∴ $\overrightarrow{نم} = \overrightarrow{وم} - \overrightarrow{ون}$

$$= \begin{pmatrix} 5\frac{1}{2} \\ 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 2\frac{1}{2} \\ 2 \end{pmatrix}$$

ومن ثم ن م = ك ل

أيضا ك ل // ن م ، ك ل = م ن

∴ **الشكل** ك ل م ن **متوازي أضلاع**

باستخدام شكل رباعي آخر و ى ط ر مع متجهات عمودية مختلفة، استقص ما إذا كان الشكل الرباعي المكون عن طريق تنصيف أضلاع الشكل الرباعي و ى ط ر أيضا متوازي أضلاع.

الاجابات Answers

الفصل الأول:

تمرين 1 أ:

(1) (أ) -22 (ب) 62

(2) (أ) 24 حاصل ضرب عناصر القطر الرئيسي

(ب) 0 (تناسب بين ص$_1$ ، ص$_3$)

(ج) 0 (عناصر ص$_3$ كله أصفار)

(د) 0 (لان: ع$_2$ - ع$_1$ = ع$_3$)

(3) (i) س= -8 ، س= 0 ، ع= 1

(ii) ن= 3

(iii) هـ = 2 ، ن= 8 ، ع= 9

(4) 14

(5) يترك للطالب

(6) (i) س= -2 ، (ii) س= 10

(iii) س= 1 ، (iv) س= 2

تمرين 1 ب:

(1) $\begin{bmatrix} 0 & -2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}$ (2) $\begin{bmatrix} 15 & 3 \\ 17 & -1 \end{bmatrix}$

(3) يترك للطالب (4) يترك للطالب، (iii) 256

(5) س= ± 1 ، ص= ± 1 ، ص= ± $\frac{1}{2}$

(6) س= $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ ص= $\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

(7) $\begin{bmatrix} (أب)^{ن-1} & أ^{ن} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ ، $\begin{bmatrix} 0 & أ^{ن} \\ ب^{ن} & 0 \end{bmatrix}$ ، $\begin{bmatrix} 0 & أ^{ن} \\ 0 & أب^{ن-1} \end{bmatrix}$

(8) $\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}$

تمرين 1 جـ:

(1) (أ) أ= 8 ، ب= 1 ، جـ= 1

(ب) ب= -1 ، 2

(2) ل= -5 ، م= 2 ، ن= -6 ، هـ=3

الفصل الثاني:

تمرين 2 أ:

(1) (أ) $\frac{\sqrt{2} - \sqrt{6}}{4}$ (ب) $\frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$

(جـ) 2 -$\sqrt{3}$ (د) $\frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{4}$

(هـ) 2 -$\sqrt{3}$ (و) $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}$

(2) (أ) جا 39^0 (ب) جتا 70^0 (جـ)ظا 65^0

(3) (أ) $\frac{1}{2}$ (ب)- $\frac{1}{2}$ (جـ) 1

(4) (أ) جتا (60^0 + θ) (ب) جتا (θ - 45^0)

(جـ) جتا (30^0 + θ)

(5) (أ) $\frac{16}{65}$ (ب) $\frac{56}{65}$ (جـ) $\frac{-16}{63}$

(6) أ + ب = 60^0

تمرين 2 ب:

(1) (أ) جتا 36^0 (ب) ظتا 20^0 (جـ) جا س

(د) جتا 4 س (هـ) $\frac{1}{2}$جتا 2 س

(2) (أ) $\frac{1}{2}$ (ب) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ (ج) 0 $\frac{1}{2}$

(3) (أ) (ب) (جـ) $\frac{3}{7}$ 3

(4) (أ) 0°، 75.5°، 180°، 284.5°، 360°

(ب) 199.5°، 340.5°

(جـ) 0°، 30°، 150°، 180°، 210°، 330°، 360°

(5) (أ) 5، -5 (ب) 5، -5 (جـ)$\sqrt{م^2 +ن^2}$ ، -$\sqrt{م^2 +ن^2}$

تمرين 2 جـ:

(1) 11.5°، 168.5°

(2) ص= $\frac{1-س^2}{1-س^2}$

(3) $\frac{77}{85}$

(4) (أ) $\frac{\sqrt{6}}{6}$ (ب) $\frac{\sqrt{5}}{5}$

(5) (أ) 11.5° (ب) 60.4°، 193.3°

(جـ) 0°، 120°، 360°

الفصل الثالث

تمرين 3 أ:

(1) (أ) فردية (ب) زوجية (ج) زوجية (د) زوجية وفردية

(2) زوجية

تمرين 3 ب:

(1) (أ) ليست أحادية (ب) أحادية وفوقية

(ج) ليست أحادية (د) أحادية وفوقية

(2) أحادية وفوقية

تمرين 3 جـ:

(1) (أ) $\text{د}^{-1}(\text{س})=\frac{1}{4}\text{س}$ (ب) $\text{د}^{-1}(\text{س})=\sqrt[3]{\text{س}}$

(ج) $\text{د}^{-1}(\text{س})=\sqrt{\text{س}+1}$ ، $\text{س}\geqslant -1$ (د) $\text{د}^{-1}(\text{س})=\frac{5\text{س}+2}{3\text{س}-2}$ ، $\text{س}\neq\frac{2}{3}$

(2) (أ) نعم (ب) نعم

تمرين 3 د:

(1) (أ) $\sqrt{1-\text{س}^2}$ ، $1-\text{س}$ (ب) 2جاس جا 2س

(ج) $\frac{1}{\sqrt{\left(1-\frac{1}{\text{س}^2}\right)}}$ ، $\frac{1}{(\text{س}-2)}$

(2) قيمة ك =2 (3) يترك للطالب (4) $\text{س}=\pm\sqrt{2}$

تمرين 3 هـ:

(1) (أ) $\text{س}^2(\text{س}+2)(6+5\text{س})$

(ب) $(\text{س}+2)^2(3-4\text{س}-5\text{س}^2)$

(جـ) $2(\text{س}+3)(2\text{س}-1)^2(5\text{س}+8)$

(د) $\frac{1}{(2\text{س}-1)^2}$ (هـ) $\frac{8}{(\text{س}-1)^2}$

(و) $\frac{3\text{س}^2+1}{\sqrt{\text{س}}}+\frac{27\text{س}^2+1}{2}$ (ز) $\frac{(3\text{س}-1)(11+15\text{س})}{2(1+\text{س})^{\frac{1}{2}}}$

(2) (أ) 4س (ب) $(\text{س}-1)(1+\text{س}+4\text{س}^2)$

(جـ) $4(3\text{س}-1)(3\text{س}^2-2\text{س}+1)$

(د) $\frac{(\text{س}-2)(1+\text{س})^2}{\text{س}^3}$

تمرين 3 و:

(1) (أ) $\frac{-5}{(\text{س}-1)^2}$ (ب) $\frac{5}{(1-\text{س})^2}$

(ج) $\frac{1-2\text{س}-\text{س}^2}{(1+\text{س}^2)^2}$ (د) $\frac{6\text{س}(1-\text{س})}{(1-2\text{س})^2}$

(هـ) $\frac{4-3\text{س}^2-4\text{س}^3}{(2+\text{س}^3)^2}$ (و) $\frac{1-\text{س}}{(1+\text{س})^3}$

(2) (أ) $\frac{1-2\text{س}}{2\sqrt{\text{س}}(1+2\text{س})^2}$ (ب) $\frac{1}{2\sqrt{\text{س}}(1+\sqrt{\text{س}})^2}$

(ج) $\frac{3\text{س}+4}{2(\text{س}+1)^{\frac{2}{3}}}$ (د) $\frac{2}{(1+\text{س})^2}$

(هـ) $\frac{3\text{س}-1}{\text{س}^2(1-\text{س})^3}$

تمرين 3 ز:

(1) (أ) $\frac{\text{س}}{\text{ص}}$ (ب) $\frac{\text{س}-1}{\text{ص}}$ (ج) $\frac{2(\text{س}\,\text{ص}^3+1)}{3\text{س}^2\text{ص}^2}$

(د) $\frac{\text{ص}^2}{\text{س}^2}$ (هـ) $\frac{\text{ص}}{\text{س}}$ (و) $\frac{\text{ص}-4\text{س}}{2\text{ص}-\text{س}+3}$

(2) 2 أو -2

تمرين 3 ي:

(1) (أ) 1 ، $\text{س}-\text{ص}-2=0$

(ب) 2 ، $2\text{س}-\text{ص}-3=0$

(جـ) 2، $2\text{س}-\text{ص}-4=0$

(2) (أ) $(1، \frac{1}{2})$ ، $(2، 0)$

(3) عندما أ = $-\frac{1}{3}$ ، ب = $-\frac{16}{27}$ ، عندما أ = $\frac{1}{2}$ ، ب = $\frac{3}{4}$

(4) الميل 0 ، $(1، 4)$، $(1\frac{2}{3}، 3\frac{5}{27})$

(5) $(0، 0)$، $(1، 0)$، $(2، 0)$، $\text{ص}=2\text{س}$

(6) أ = 2، ب = -3، جـ = 5

(7) 2 ، $2\text{س}-\text{ص}-1=0$ ، $2\frac{3}{4}$

(8) 20، $-20\text{س}+\text{ص}-39=0$

(9) $(\frac{1}{2}، 4)$ ، $(-\frac{1}{2}، -4)$

(10) (أ) $(1، 3)$ (ب) $2\text{س}-3\text{ص}-7=0$ (جـ) $(0، 2\frac{1}{3})$

تمرين 3 ح:

(2) (أ) $\frac{1}{(1+\text{س})^2}$ (ب) $\frac{2}{(1+\text{س})^3}$

(3) (أ) $\frac{(1+2\text{س}\,\text{ص}^3)}{3\text{س}^2\text{ص}^2}$ (ب) $\frac{1}{\text{ص}^2}$

(4) $\frac{2}{9}$ أو $-\frac{2}{9}$ (4) $\text{ص}=6\text{س}-4$

(6) (أ) (1) $\frac{\text{س}}{\sqrt{1+\text{س}^2}}$ (2) $(1+18\text{س})(1+3\text{س})^4$

(7) (أ) $\frac{3\text{س}^2-\text{ص}^3}{3\text{س}\,\text{ص}^2+1}$ (ب) $8\text{س}-3\text{ص}-29=0$

(8) (أ) (1) $\frac{11}{(\text{س}-4)^2}$ (2) $\frac{3\text{س}}{\sqrt{12-3\text{س}^2}}$ (ب) $\frac{4}{7}$

(22) (أ) 1.8 (ب) 60.9^{0}

الفصل الرابع:

تمرين 4 أ:

(1) (أ) 384 سم^3/ث

(2) (أ) 4 π سم/ث (ب) 40 π سم^2/ث

(3) $\frac{1}{\pi}$ سم/ث

(4) (أ) ينقص $\frac{1}{6\pi}$ (ب) ينقص 150 سم^3/ث

(5) (أ) 40 سم^2/ث

(6) $\frac{1}{3\pi}$ سم/ث

تمرين 4 ب:

1- 0.003 20- 2- 4 % 3- 0.8 π

4- 0.008 94- 5- $\frac{24\pi}{25}$ سم^2 6- 960 ق

تمرين 4 جـ:

(1) (أ) صغرى (0، 1) (ب) عظمى (0، 2)

(جـ) نقطة الانقلاب (0، 0)

(د) عظمى ($-\frac{1}{3}$، $\frac{4}{27}$)، صغرى (1، 0)

(هـ) عظمى (2، 33)، صغرى (-2، -31)

(ك) عظمى ($\frac{1}{5}$ ، $\frac{512}{3125}$)، صغرى (1، 0)

(2) (أ) صغرى (0، -1) (ب) صغرى (1، -1)

(جـ) صغرى ($1\frac{1}{3}$، - $1\frac{23}{27}$)

(3) صغرى (0، 0): عظمى ($\frac{2}{3}$ ، $\frac{4}{27}$)

تمرين 4 د:

(1) (8 ، 8) (2) (15 ، 15 م)

(3) 625 م^2، 25 ، 25 م (4) 4، 6 ، 12 سم

(5) ز = $5\frac{1}{3}$، ف = $2\frac{2}{3}$ (6) $112\frac{1}{2}$ سم^2

(7) عظمى ($\frac{1}{3}$ ، $\frac{4}{27}$)، صغرى (1، 0)

(8) 1، 1، $\frac{1}{2}$

(9) ص = $\frac{3}{2}$ (100، ص)، أ = $\frac{9}{2}$ س (100 - س): حيث أ عظمى، س = 50

(10) ح = 75نق - π نق^3 ح: 141 سم^3 (10) س = $\frac{7\sqrt{3}}{7}$

تمرين 4هـ:

(1) - $6\frac{1}{4}$

(2) (أ) عندما ن = 0، ن = 3 ث (ب) ن = 1.5ث

(جـ) 4.5 م (د) 4 م

(3) (أ) ع = 30 - 20 ن (ب) ث = $12\frac{1}{2}$، ف = 20

(جـ) ن = $1\frac{1}{2}$ (د) $22\frac{1}{2}$

(هـ) 3 ث

(4) (أ) عندما ن = 3 ث (ب) عندما ن = 1 ث، 3 ث

(جـ) 8 م (د) 2 م

(هـ) عندما ن = 2 ث (و) من ن = 0 إلى ن = 2

تمرين 5 أ :

أ- 10.7 تقريبا ب- 11.25

جـ- 5.3 تقريبا د- 5.3 تقريبا

هـ- 2.7 تقريبا

تمرين 5 ب :

أ- 10.7 تقريبا ب- ت=3

جـ- $\alpha=2$، $\beta=4.8$ د- (4.4) ، 10.7 تقريبا

تمرين 5 د :

1- ف = 3ن^2 + 1

2- ف = $\frac{ن^3}{3}$

3- ف = 4ن^3 + ن

4- $6\frac{2}{3}$ م / ث

5- (أ) ن = 0، $\frac{2}{3}$ث (ب) ف = 0، - $\frac{4}{27}$ م

6- (أ) 22 م (ب) 19 م

7- (أ) 27 م / ث (ب) 72 م

8- (أ) $4\frac{1}{2}$ م (ب) $4\frac{1}{2}$ ث

9- م = $2\frac{2}{5}$ ، ل = - $\frac{1}{5}$

10- أ = - 2، ب = 12

تمرين 5 هـ :

المساحة بين المنحنى والمحور س / ص

1- (ب) (1) 8 (2) 16 (3) - 4، ك = 2

2- (أ) 10 (ب) 0 (جـ) 24 ، 5

3- 5 : 11

4- $10\frac{2}{3}$ وحدة مربعة 5- $5\frac{1}{3}$ وحدة مربعة

6- (أ) ك = 16 (ب) 12 وحدة مربعة

7- (أ)(1) 8 وحدة مربعة (2) أ = 5

(ب)(1) (2، 1) (2) $1\frac{5}{6}$ وحدة مربعة

8- ك = 1.2 9- أ = 2

تمرين 6أ:

(1) 9　(2) $-\frac{1}{2}$　(3) 1　(4) $\frac{2}{5}$

(5) $-\frac{7}{6}$　(6) $-\frac{1}{2}$　(7) 2　(8) 2

تمرين 6ب:

-1 (أ) 3 جتا 3 س　(ب) - 6 جا 2 س　(جـ) 2 قا² 4 س

(د) 2 جا (1 - 2 س)　(هـ) 2 قا² (6 س + 1)

(و) جتا($\frac{1}{2}$ س - 3)

-2 (أ) $\frac{1}{2}$ جا 2 س + جـ　(ب) 2 جا $\frac{1}{2}$ س + جـ

(جـ) - 3 جتا $\frac{س}{3}$ + جـ　(د) 2 جتا س + جـ

(هـ) - $\frac{3}{2}$ جتا $\frac{2}{3}$ س + جـ　(و) $\frac{1}{2}$ ظا (2 س + 3) + جـ

(ز) 4 جا (س - 1) + جـ　(ح) جتا (1 - 3 س) + جـ

(ط) - $\frac{3}{16}$ جا (1 - 4 س) + جـ

-3 (أ) 1　(ب) 1　(جـ) 1　(د) $\frac{1}{3}$　(هـ) - 8

تمرين 6جـ:

(1) (أ) 2 جتا س - 2 س جا س　(ب) 4 جا $\frac{1}{2}$ س + 2 س $\frac{1}{2}$ جتا س

(جـ) 6 جا 2 س　(د) 2 جتا (1 - س) + 2 س جا (1 - س)

(هـ) $\frac{1}{2}$ جتا س　(و) 3 جتا 3 س ظا 4 س + 4 جا 3 س قا² 4 س

(ز) $\frac{-(\text{س جتا س} + \text{جتا س})}{\text{س}^2}$　(ح) $\frac{\text{2 جتا 2 س}}{\text{س + 1}} - \frac{\text{جا 2 س}}{(\text{س + 1})^2}$

(ط) $\frac{1}{\text{ظا س}} - \frac{\text{س}}{\text{جا}^2\text{ س}}$　(ي) - 3 ظتا 3 س قتا 3 س

(ك) - 2 قتا² 2 س

(2) (أ) $1 + \frac{\pi}{2}$　(ب) $1 - \frac{2\pi}{8}$　(جـ) 1

تمرين 6 د:

-1 (أ) 1 - 3 جتا² س جا س　(ب) جا س (جا س + 2 س جتا س)

(جـ) ظا $\frac{1}{6}$ س قا² $\frac{1}{6}$ س　(د) $\frac{\text{6 جتا س}}{\text{جا}^4\text{ س}}$

(هـ) جتا س (1 + 2 جا 2 س)　(و) - 2 ظتا 2 س قتا² 2 س

(ز) $\frac{\text{2 جتا 4 س}}{\sqrt{\text{جا 4 س}}}$

-2 0　-3 جا س جتا س؛ $\frac{1}{24}$　-4 $\frac{1}{2}$ (س - $\frac{1}{2}$ جا 2 س)

-5 $\sqrt{3} - 1$　-6 $\frac{1}{2}$ ص ظا س ؛ $\frac{1}{4}$ ص (2 + 3 ظا² س)

-7 $\frac{1}{\text{س}\sqrt{\text{س}^2 - 1}}$

تمرين 6 هـ:

-1 (أ) $\frac{1}{\text{1 - جتا س}}$　(ب، 1) 3　(ب، 2) $\frac{\sqrt{2}}{12}$

-2 $\sqrt{2} - 1$

-3 ($\frac{\pi}{4}$ ، $\sqrt{2}$)، ($1\frac{1}{4}\pi$ ، $\sqrt{2}$)

-4 (أ) - 48 $\sqrt{3}$　(ب) جتا س - 3 جا س؛ π بالراديان

-6 - $\frac{1}{3}$ ص ظتا س؛ $\frac{1}{9}$ ص ظتا س (3 قتا س + ظتا س)

-7 $\frac{\text{2 س جا ص + ص جا س}}{\text{جتا س - س}^2\text{ جتا ص}}$

(8) (أ) ك = 4　(ب) - 3 جا س + 5 جتا س؛ 1.03، -184.17

(9) (أ) 0.29　(ب) $\frac{1}{2}$ وحدة مربعة

تمرين 7 أ:

(1) (أ) هـ²　(ب) 2　(جـ) هـ^س　(د) هـ^-1

(2) (أ) $\frac{1}{\text{س}}$　(ب) $\frac{1}{\text{2 - س}}$　(جـ) $\frac{\text{2س + 1}}{\text{س}^2\text{ + س - 1}}$

(د) $\frac{1}{\text{س}}$　(هـ) $\frac{1}{\text{2(1 - س)}}$　(و) $\frac{2}{\text{(س + 1) (س - 1)}}$

(3) (أ) - $\frac{2}{\text{س}}$ - $\frac{\text{2 س}}{\text{س}^2\text{ + 1}}$　(ب) $\frac{3}{\text{س - 1}}$

(جـ) ظتا س　(د) قا² س ظتا س

(هـ) ظتا (س + 1)　(و) $\frac{\text{س}}{\text{س}^2\text{ + 1}}$

(ز) (ط) ظتا س + 2 ظا 2 س　(ح) 3 ظتا س لو₃ هـ

(4) (أ) 1+ لو 2 س　(ب) $\frac{\text{1 - 2س}}{\text{س - 1}}$ + 2 لو (س-1)

(جـ) (1+ 3 س) ظتاس + 3لو جاس　(د) س^-2 لو س+ جـ

(5) (أ) 2 لو س + جـ　(ب) $\frac{1}{3}$ لو س + جـ

(جـ) 2 س - لو س + جـ　(د) $\frac{\text{س}^3}{3}$ - لو (س + 1) + جـ

(6) (أ) - لو (1 - س) + جـ　(ب) $\frac{2}{3}$ لو (3 س - 1) + جـ

(جـ) $\frac{3}{4}$ لو (س - 1) + جـ　(د) لو (2 س + 3) + جـ

(هـ) - لو (1 - 5 س) + جـ　(و) $\frac{1}{3}$ لو (3 س + 1) + جـ

(7) (أ) $\frac{1}{3}$ لو 2 ≈ 0.231　(ب) 1 - $\frac{1}{2}$ لو 2 ≈ 0.653

(جـ) $\frac{4}{3}$ لو 3 ≈ 0.863　(د) $\frac{1}{2}$ لو 3 ≈ 0.549

(هـ) - $\frac{2}{3}$ لو ($\frac{5}{8}$) ≈ 0.313　(و) $\frac{1}{3}$ لو 3 ≈ 0.366

(9) (أ) $\frac{\text{(س -1) جتاس}}{\text{1 - جاس}}$ - لو (1- جا س)

(ب) ظتا س $\frac{\text{جاس}}{\text{1 - جتاس}}$

(10) $\frac{\text{1 - لوس}}{\text{2س}^2}$: $\frac{\text{2لوس - 3}}{\text{2س}^3}$

تمرين 7 ب:

(1) (أ) 4 هـ^س　(ب) 3 هـ^3س　(جـ) - 2 هـ^-2س

(د) $\frac{1}{3}$ هـ^⅓س　(هـ) 2 هـ^2س + ي^-س　(و) 2 هـ^2س - 2 هـ^-2س

(ز) 2 هـ^2س+1　(ح) - 3 هـ^1-3س

(2) (أ) 2 ي^س+1 + 2 س ي^س+1　(ب) (س + 2)² هـ^س-1

(جـ) هـ^س (قا² س + ظا س)　(د) $\frac{1}{3}$ قا 3 س قتا س لو₂ هـ.

(3) (أ) $\frac{\text{هـ}^{3\text{س}}}{\text{س}^2}$ (3 س + 1)　(ب) 3 ي^3س - ي^-س

(جـ) $\frac{\text{هـ}^{2\text{س}+1}}{\text{(س + 1)}}$ [1 + 2 (س + 1) لو (س + 1)]

(4) (أ) 2 هـ^س + جـ　(ب) 2 هـ^½س + جـ

(جـ) $\frac{1}{2}$ هـ^س+1 + جـ　(د) - $\frac{1}{3}$ هـ^-3س + جـ

(هـ) $\frac{1}{2}$ هـ^2س - هـ^-س + جـ　(و) 2 س + $\frac{1}{2}$ (هـ^2س - هـ^-2س) + جـ

(5) (أ) $\frac{1}{2}$ (هـ² - 1)　(ب) 2 - 2 هـ^-1　(جـ) $\frac{1}{6}$ (هـ^-1 + 5) ، (د) 2

الفصل الثامن :

تمرين 8 أ:

(1) أ = $\begin{pmatrix}2\\2\end{pmatrix}$ ، ب = $\begin{pmatrix}-2\\0\end{pmatrix}$ = جـ $\begin{pmatrix}-1\\2\end{pmatrix}$ ، د = $\begin{pmatrix}0\\2\end{pmatrix}$

(2) (أ) $\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$ ، (ب) $\begin{pmatrix}1\\-2\end{pmatrix}$ (جـ) $\begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix}$ (د) $\begin{pmatrix}3\\-6\end{pmatrix}$

(هـ) $\begin{pmatrix}0\\4\end{pmatrix}$ ، (و) $\begin{pmatrix}-2\\0\end{pmatrix}$ (ز) $\begin{pmatrix}-3\\6\end{pmatrix}$ (ح) $\begin{pmatrix}-4\\0\end{pmatrix}$

(3) $\overleftarrow{\text{أب}} = \overleftarrow{\text{فع}}$ ، $\overleftarrow{\text{أهـ}} = \overleftarrow{\text{وع}}$ ، $\overleftarrow{\text{جب}} = \overleftarrow{\text{فن}}$ ، $\overleftarrow{\text{جو}} = \overleftarrow{\text{هن}}$

$\overleftarrow{\text{هب}} = \overleftarrow{\text{فو}}$ ، $\overleftarrow{\text{فهـ}} = \overleftarrow{\text{وب}}$

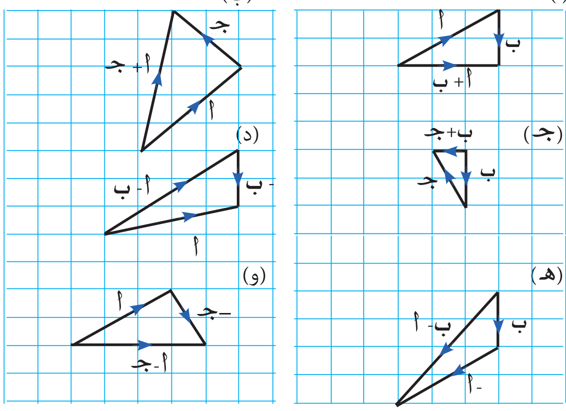
(1) أ = $\begin{pmatrix}1\\-2\end{pmatrix}$ ، ب = $\begin{pmatrix}-3\\4\end{pmatrix}$

(2) (أ) $\begin{pmatrix}-1\\0\end{pmatrix}$ ، (ب) $\begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix}$ (جـ) $\begin{pmatrix}-2\\3\end{pmatrix}$

تمرين 8 ب:

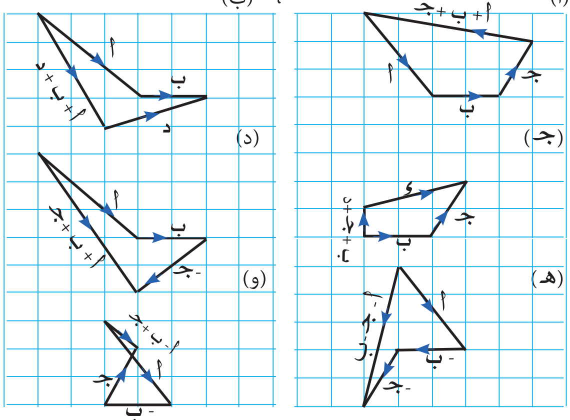
(1)

(أ) ، (ب)



(2)

(أ) ، (ب)



تمرين 8 جـ:

(1) (أ) $\begin{pmatrix}-1\\2\end{pmatrix}$ ، (ب) $\begin{pmatrix}-4\\3\end{pmatrix}$ (جـ) $\begin{pmatrix}5\\-7\end{pmatrix}$

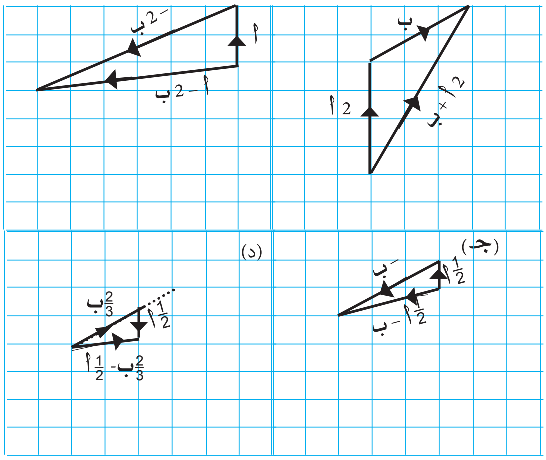
(د) $\begin{pmatrix}11\\0\end{pmatrix}$ ، (هـ) $\begin{pmatrix}-16\\19\end{pmatrix}$ (و) $\begin{pmatrix}12\\-9\end{pmatrix}$

(2) (أ) 2 ب − أ ، (ب) 2 (5 ب − أ) ، (جـ) $\frac{2}{3}$ (أ − 3 ب)

(د) − $\frac{1}{2}$ (4 أ + 7 ب) ، (هـ) أ − ب ، (و) $\frac{1}{5}$ (18 أ − 25 ب)

(3)

(أ) (ب) (جـ) (د)

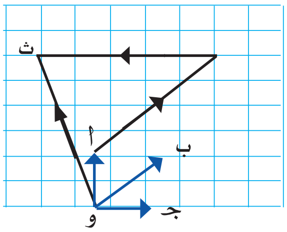


(4) (أ) 3 (2 ب − أ) ، (ب) $\frac{3}{2}$ (2 ب − أ) ، (جـ) $\frac{2}{3}$ (أ + 2 ب)

(د) 2 (2 ب − أ) ، (هـ) 4 ب ، (و) 2 ب − أ

(5) س = −19 ، ص = 12

(6) (أ)



(ب) (i) $\begin{pmatrix}-1\\17\end{pmatrix}$ (ii) ء = 4 ط = 4.5

(د) 2 (2 ب − أ) ، (هـ) 4 ب ، (و) 2 ب − أ

(7) (أ) $\begin{pmatrix}2\\5\end{pmatrix}$ (ب) $\begin{pmatrix}-4\\-2\end{pmatrix}$ (جـ) $\begin{pmatrix}0\\-4\end{pmatrix}$

(8) (أ) 4 (ط − ء) ، (ب) (ط − ء) ، (جـ) 3 ء + ط

(9) (أ) $\overleftarrow{\text{ور}}$ = 2 ط (ب) وذ = ء + ط

(جـ) $\overleftarrow{\text{وت}}$ = ء − ط (ب) وي = − $\frac{1}{2}$ (ء + ط)

(10) (أ) (i) $\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$ (ii) $\begin{pmatrix}8\\-3\end{pmatrix}$ (ب) س = 14 ، ص = −11

تمرين 8 د:

(1) (أ) 3.16 (ب) 2.24 (جـ) 6.32 (د) 6.71

(هـ) 15.8 (و) 1.12 (ز) 3.61 (ح) 0.926

(ط) 7 (ي) 8.56

(2) 13

(3) (أ) 9- (ب) 15

(4) (أ) 7 (ب) 8

(5) (أ) 10 (ب) $\pm$ 10

(6) (أ) $\begin{pmatrix}-5\\2\end{pmatrix}$ (ب) $\begin{pmatrix}-1\\2\end{pmatrix}$ (جـ) 10

(7) (أ) 10 (ب) $-\frac{3}{2}$

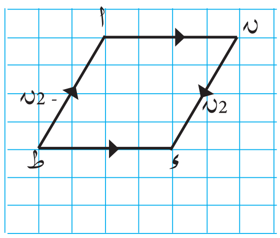
(8) (أ) $\begin{pmatrix}15\\0\end{pmatrix}$ (ب) 10 (جـ) ك = 12-

(9) (أ) 6

(ب) (i) $\begin{pmatrix}-2\\-4\end{pmatrix}$ (ii) $\begin{pmatrix}4\\0\end{pmatrix}$ (iii) $\begin{matrix}1\\-2\end{matrix}$

(10) (أ) (ب) هـ = 6- (جـ) 8

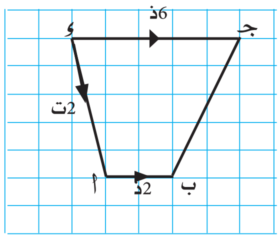
(11) (أ)



(ب) معين ، (جـ) $\overleftarrow{\text{ر ذ}}$ = - ي

(12) (أ) (i) 5 (ii) $\begin{bmatrix}0\\19\end{bmatrix}$ (iii) أ = 5 ، ب = 1

(ب) (i)



(ii) أب // دجـ ، $\overleftarrow{\text{أب}}$ = $\frac{1}{3}$ $\overleftarrow{\text{ءجـ}}$

(iii) 4ء - 2ت

(iv) -ت

(13) (أ) شبه منحرف (ب) ء - ط

تمرين 8 هـ:

(1) 4.8

(2) (أ) 5 (ب) (- 3 ، 7)

(3) (أ) $\begin{pmatrix}4\\8\end{pmatrix}$ (ب) $\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$ (جـ) $\begin{pmatrix}5\\5\end{pmatrix}$

(4) $\begin{pmatrix}-5\\2\end{pmatrix}$

(5) (3 ، 1)

(6) (أ) 10 (ب) (- 1 ، 9) (جـ) $\begin{pmatrix}-4\\3\end{pmatrix}$

(7) (أ) 10 (ب) $\begin{pmatrix}6\\-8\end{pmatrix}$ (جـ) (4 ، 7)

(8) (أ) $\begin{pmatrix}9\\-4\end{pmatrix}$

(ب) (i) $\begin{pmatrix}\text{هـ} + 1\\5\end{pmatrix}$ (ii) هـ = 33 (iii) هـ = 3 أو 7-

(9) (أ) $\begin{pmatrix}1\\5\end{pmatrix}$ (ب) $\begin{pmatrix}5\\3\end{pmatrix}$ (جـ) متوازي الاضلاع

(10) (أ) $\begin{pmatrix}8\\2\end{pmatrix}$ (ب) $\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}$ (جـ) (7 ، 3)

(11) (أ) (i) 10 (ii) $\begin{pmatrix}3\\-6\end{pmatrix}$ (ب) 20-

(12) (أ) 5 (ب) $\begin{pmatrix}-5\\-12\end{pmatrix}$ (جـ) $-\frac{1}{2}$

(13) (أ) (i) 10 (ii) $\begin{pmatrix}5\\8\end{pmatrix}$ (ب) 12

تمرين 8 و:

(1) $\frac{1}{3}$ (ب - أ) (ب) $\frac{2أ+ب}{2}$

(2) (أ) $\frac{2}{5}$ (ط-ى) (ب) $\frac{3ى+2ط}{5}$

(3) (أ) $\frac{م}{م+ن}$ (ب - أ) (ب) $\frac{نأ+مب}{م+ن}$

(4) $\frac{1}{2}$ (أ +ب)

(5) (أ) $\frac{1}{2}$(أ +ب) (ب) $\frac{2}{3}$ أ

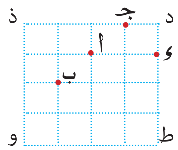
(أ) $\frac{1}{6}$(3ب - أ) (ب) $\frac{1}{2}$ (3ب - أ)

ل ، م ، ن على استقامة واحدة

م ، ن = 3 (ل ، م)

(6) (أ) شبه منحرف (ب) د - ط

(7)



(8) (أ) (i) 4(ى+ط) (ii) (ى+ط) (iii)-3ى+ط

(ب) (i) 3 (ii) 3 (iii) 9

(9) (أ) (i) ى+3ط (ii) $\frac{1}{4}$ى + $\frac{3}{4}$ط

(iii) $\frac{3}{4}$ط-$\frac{3}{4}$ط (iv) $\frac{1}{2}$ط - $\frac{1}{2}$ى

(ب) ب ص// س ن

(جـ) شبه منحرف (د) (i) $\frac{1}{3}$ (ii) $\frac{9}{4}$

(10) (أ) (i) 3أ (ii) 3أ+2ب (iii) $\frac{1}{5}$(3أ+2ب)

(جـ) 4أ+ب.

(د) (i) $\frac{2}{5}$ (ii) $\frac{2}{5}$ (iii) $\frac{1}{5}$

(11) (أ) (i) 9.22 (ii) (أ) $\begin{pmatrix} 6 \\ 3 \end{pmatrix}$ (ب) $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

(iii) الخطوط متوزاي . | 2ى+ط | = 3 | ى-2ر |

(ب) (i) (أ) -3أ (ب) 2ب - 3أ (جـ) ب-أ (ب) 4 (ب - أ)

(ii) أ ، ب وجـ تقع على استقامة واحدة أجـ = 4(أب)

(12) (أ) (i) ى+ط (ii) ى-ط

(ب) (i) 2ى+ط (ii) ب ح//أب ⇦ أب ح جـ شبه منحرف

(جـ) (i) 5.87 وحدة (ii) 70.4 وحدة مربعة (iii) 7.21 وحدة