رياضيات

ثالثة ثانوي

الباب الثاني:

المتطابقات المثلثية

الجزء الأول

إعداد:

أ.م. علي بوقرين

8:00

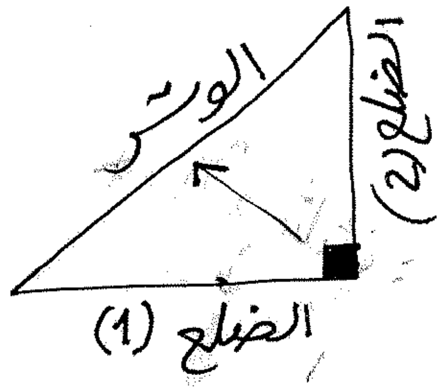
" الباب الثّاني "

" المتطابقات المثلّثيّة "

* مراجعة هامّة لحساب المثلّثات :

* نظرية فيثاغورس (المثلث قائم الزاوية) :

الضلع الذي يقابل الزاوية 90°
هو " الوتر " وهو أكبر
أضلاع المثلث القائم



$$\text{الوتر} = \sqrt{(\text{الضلع } 1)^2 + (\text{الضلع } 2)^2}$$

$$\text{الضلع } 1 = \sqrt{(\text{الوتر})^2 - (\text{الضلع } 2)^2}$$

$$\text{الضلع } 2 = \sqrt{(\text{الوتر})^2 - (\text{الضلع } 1)^2}$$

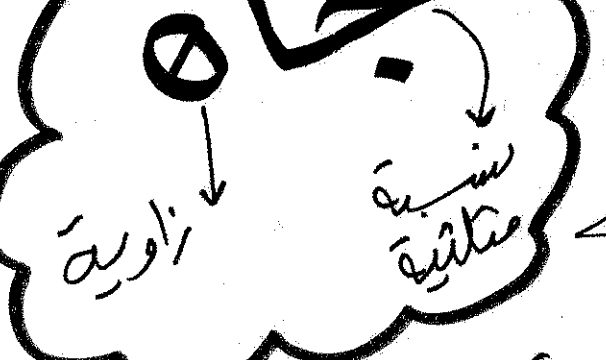
الوتر = المجموع
أي ضلع = الوتر^2 − الآخر^2
آخر ماعدا الوتر

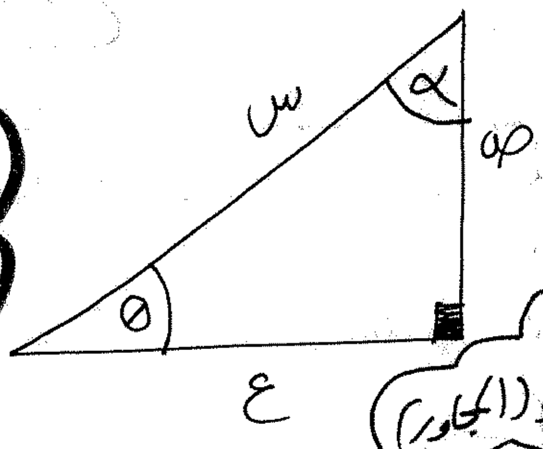
* النسب المثلثية الأساسية في أي مثلث قائم الزاوية :

* جيب الزاوية ← $\text{جا}\,\theta = \dfrac{\text{المقابل}}{\text{الوتر}}$

* جيب تمام الزاوية ← $\text{جتا}\,\theta = \dfrac{\text{المجاور}}{\text{الوتر}}$

* ظل الزاوية ← $\text{ظا}\,\theta = \dfrac{\text{المقابل}}{\text{المجاور}}$





إشارة : على حسب مكان الزاوية نقرر من هو (المقابل) ومن هو (المجاور)

$\text{جا}\,\theta = \dfrac{\text{ص}}{\text{س}}$ $\qquad$ $\text{جا}\,\alpha = \dfrac{\text{ع}}{\text{س}}$

$\text{جتا}\,\theta = \dfrac{\text{ع}}{\text{س}}$ $\qquad$ $\text{جتا}\,\alpha = \dfrac{\text{ص}}{\text{س}}$

$\text{ظا}\,\theta = \dfrac{\text{ص}}{\text{ع}}$ $\qquad$ $\text{ظا}\,\alpha = \dfrac{\text{ع}}{\text{ص}}$

$\text{ظا}\,\theta = \dfrac{\text{جا}\,\theta}{\text{جتا}\,\theta}$

* مقلوبات النسب المثلثية :

قاطع الزاوية ← قاθ

قاطع تمام الزاوية ← قتاθ

ظل تمام الزاوية ← ظتاθ

قاθ = $\frac{1}{\text{جتا}\theta}$ ، جتاθ = $\frac{1}{\text{قا}\theta}$

قتاθ = $\frac{1}{\text{جا}\theta}$ ، جاθ = $\frac{1}{\text{قتا}\theta}$

ظتاθ = $\frac{1}{\text{ظا}\theta}$ ، ظاθ = $\frac{1}{\text{ظتا}\theta}$

اللّي مافيهش "تاء" مقلوبها اللي فيها "تاء"

قتا ← جا

قا ← جتا

النسبة × مقلوبها = 1

* $\text{جا}\theta \times \text{قتا}\theta = 1$

$\cancel{\text{جا}\theta} \times \dfrac{1}{\cancel{\text{جا}\theta}} = 1$

* $\text{جتا}\theta \times \text{قا}\theta = 1$

* $\text{ظتا}\theta \times \text{ظا}\theta = 1$

لاحظ أن :

$\text{جا}م = \dfrac{1}{\text{قتا}م}$

لابد أن تكون نفس الزاوية ولا يصح أن تكتب :

$\text{جا}م \neq \dfrac{1}{\text{قتا}ب}$

* $\text{قتا}م = \dfrac{1}{\text{جا}م} = \dfrac{\text{الوتر}}{\text{المقابل}}$

* $\text{قا}م = \dfrac{1}{\text{جتا}م} = \dfrac{\text{الوتر}}{\text{المجاور}}$

* $\text{ظتا}م = \dfrac{1}{\text{ظا}م} = \dfrac{\text{المجاور}}{\text{المقابل}}$

لاحظ أن :

أي نسبة مثلثية

$\text{جا}\theta = \dfrac{\text{المقابل}}{\text{الوتر}}$

ضلع وليس زاوية

زاوية

* لايصح أن تكتب النسبة المثلثية بدون زاوية

مثل : جا $= \frac{2}{3}$ × (خطأ)

بل لابد من وجود زاوية "سواء كانت معلومة أو مجهولة"

* لايصح أن تكتب في "بسط أو مقام" الكسر الخاص بتعريف النسبة المثلثية [زوايا]

مثل : جا $50^\circ = \frac{30^\circ}{5}$

هكذا خاطئة لأنها زاوية ومن النسبة المثلثية الأساسية جا ه = $\frac{\text{مقابل}}{\text{وتر}}$ والمقصود بالمقابل والوتر أي أنها أضلاع وليست زوايا

متطابقات مهمّة

جا^{2}هـ + جتا^{2}هـ = 1

قا^{2}هـ − ظا^{2}هـ = 1

قتا^{2}هـ − ظتا^{2}هـ = 1

تذكّر أن:

$-1 \leq$ جا هـ $\leq +1$

$-1 \leq$ جتا هـ $\leq +1$

* أي أن جا (أي زاوية) ، جتا (أي زاوية) تكون قيمتها بين $[-1 ، 1]$

ملاحظة :

جا (أي زاوية) = جتا (متممتها)

جتا (أي زاوية) = جا (متممتها)

الزوايا المتممة :

هي الزوايا التي مجموعها = $90°$

مثل : $30°$ ، $60°$ ← $90°$

$80°$ ، $10°$ ← $90°$

وهكذا

مثلاً :

جا ($30°$) = جتا ($60°$)

والعكس صحيح:

جتا($30°$) = جا($60°$) .. وهكذا

* يمكن كتابة الملاحظة السابقة بصورة أخرى:

$$\boxed{\begin{array}{c} \text{جا}\theta = \text{جتا}(90^\circ - \theta) \\ \text{جتا}\theta = \text{جا}(90^\circ - \theta) \end{array}}$$

$(90^\circ - \theta)$ أي متممة (θ)

وكذلك:

$$\text{ظا}\theta = \text{ظتا}(90^\circ - \theta)$$

$$\text{ظتا}\theta = \text{ظا}(90^\circ - \theta)$$

"Ali Bograin"

* النسب المثلثية للزوايا الخاصة

$0°$ ، $90°$ ، $180°$ ، $270°$ ، $360°$

نرسم دائرة الوحدة (نصف قطرها = 1)

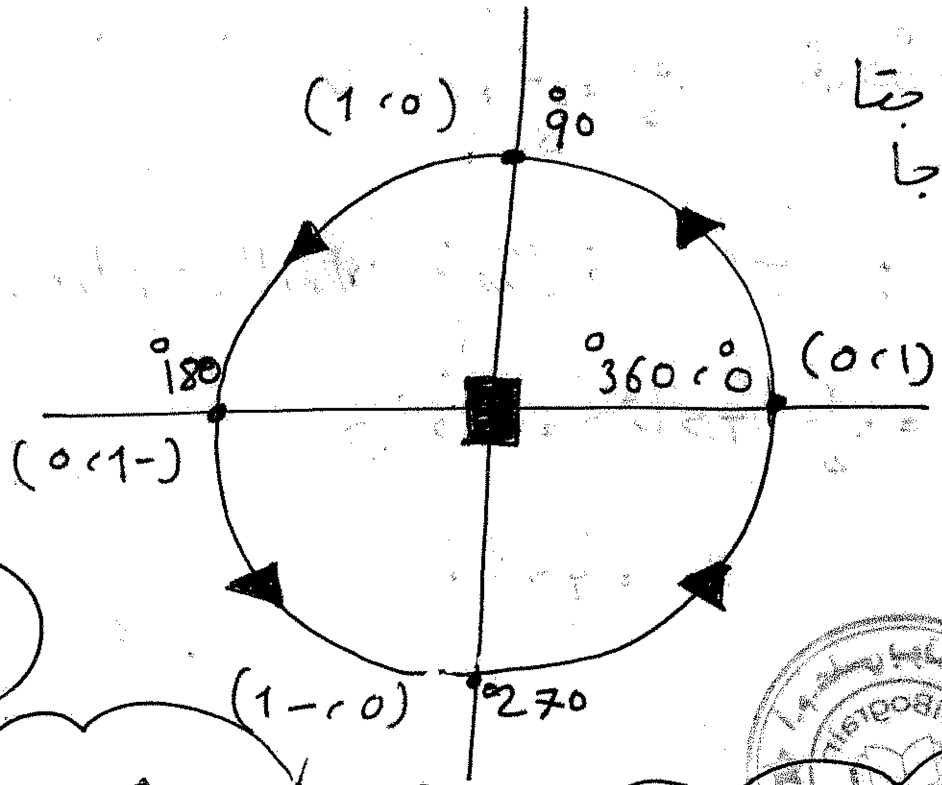
"الإحداثي السيني = جتا"

"الإحداثي الصادي = جا"

ظا θ = $\frac{\text{جا}\,\theta}{\text{جتا}\,\theta}$

س ← جتا

ص ← جا



جا $270°$ = -1

جتا $270°$ = 0

ظا $270°$ = ∞

جا $180°$ = 0

جتا $180°$ = -1

ظا $180°$ = 0

جا $90°$ = 1

جتا $90°$ = 0

ظا $90°$ = ∞ كمية غير معرفة

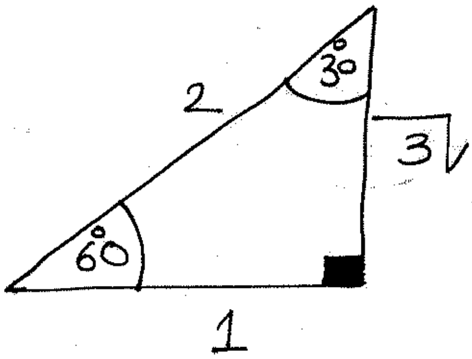
جا $0°$ = 0 ↔ = ↔ جا $360°$ = 0

جتا $0°$ = 1 ↔ = ↔ جتا $360°$ = 1

ظا $0°$ = $\frac{0}{1}$ = 0 ↔ = ↔ ظا $360°$ = 0

* النسب المثلثية للزوايا الخاصة :

* النسب المثلثية للزوايا الخاصة 30° ، 60° :

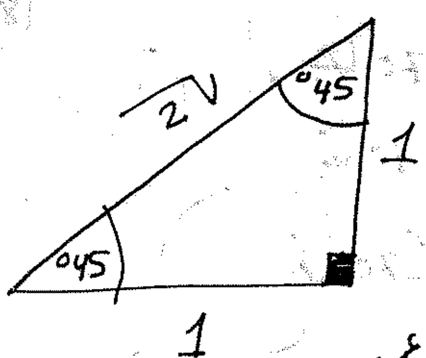


جا $30^\circ = \frac{1}{2}$ جا $60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$

جتا $30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$ جتا $60^\circ = \frac{1}{2}$

ظا $30^\circ = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$ ظا $60^\circ = \sqrt{3}$

* النسب المثلثية للزاوية الخاصة 45° :



جا 45° = جتا $45^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

ظا $45^\circ = 1$

تذكر أن:

* الزاوية الحادة : $90^\circ > \theta > 0^\circ$
* الزاوية المنفرجة : $180^\circ > \theta > 90^\circ$

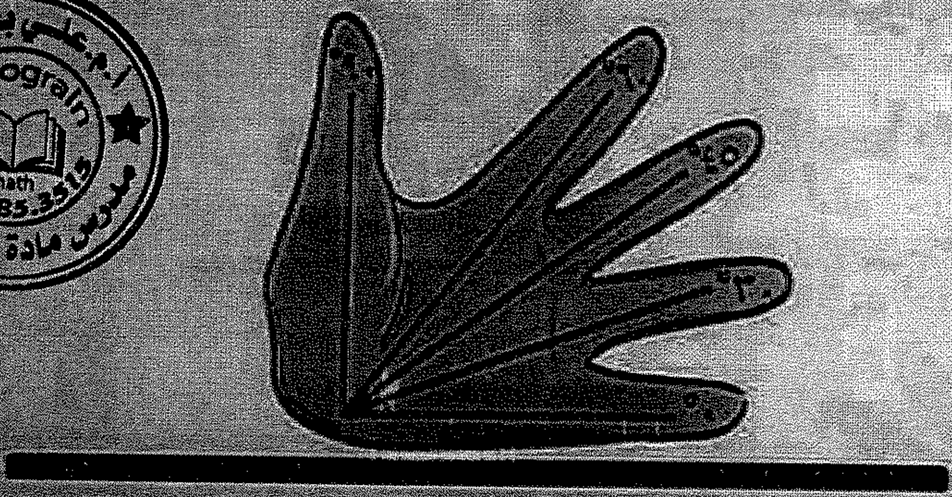
١٥-م

١٠١ حساب النسب المثلثية للزوايا الخاصة

الهدف:

إيجاد قيمة النسب المثلثية للزوايا الخاصة.

لسهولة حساب النسب المثلثية للزوايا الخاصة بدون استخدام الآلة الحاسبة، يكتب المعلم الزوايا الخاصة على باطن أصابع اليد اليسرى كما هو موضح بالرسم وعلى أن ينبّه التلاميذ على ضرورة وضع اليد على الطاولة عند الحل حيث أن الإبهام يوافق المحور الصادي والخنصر يوافق المحور السيني.



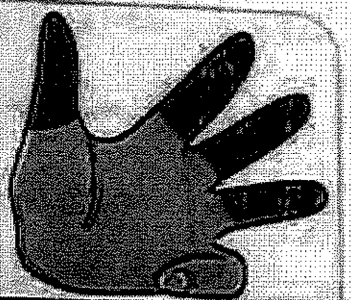
ثم يكتب القواعد الآتية لإيجاد قيمة الجيب وجيب التمام وظل الزاوية لأي زاوية خاصة:

$$\text{جاهـ} = \frac{\sqrt{\text{عدد الأصابع فوق الإصبع المغلق}}}{٢}$$

$$\text{جتاهـ} = \frac{\sqrt{\text{عدد الأصابع تحت الإصبع المغلق}}}{٢}$$

$$\text{ظاهـ} = \frac{\sqrt{\text{عدد الأصابع تحت الإصبع المغلق}}}{\sqrt{\text{عدد الأصابع فوق الإصبع المغلق}}}$$

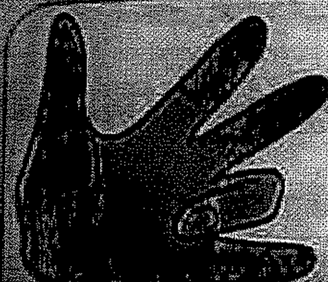
لحساب النسب المثلثية لأي زاوية خاصة يطلب المعلم من التلاميذ أن يقوموا بطي الإصبع الذي يمثل الزاوية المراد حساب نسبها المثلثية ثم يتم التطبيق في القواعد السابقة:



جتا ٠° = $\frac{\sqrt{٤}}{٢}$

جا ٠° = $\frac{\sqrt{٠}}{٢}$

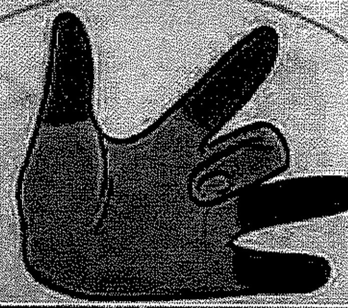
ظا ٠° = $\frac{\sqrt{٠}}{\sqrt{٤}}$



جتا ٣٠° = $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$

جا ٣٠° = $\frac{\sqrt{١}}{٢}$

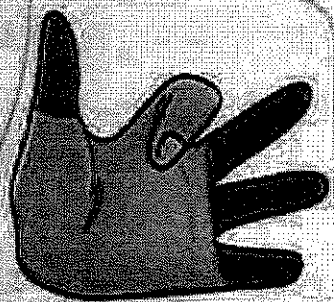
ظا ٣٠° = $\frac{\sqrt{١}}{\sqrt{٣}}$



جتا ٤٥° = $\frac{\sqrt{٢}}{٢}$

جا ٤٥° = $\frac{\sqrt{٢}}{٢}$

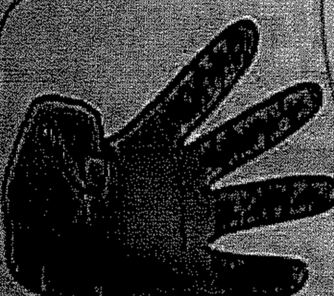
ظا ٤٥° = $\frac{\sqrt{٢}}{\sqrt{٢}}$



جتا ٦٠° = $\frac{\sqrt{١}}{٢}$

جا ٦٠° = $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$

ظا ٦٠° = $\frac{\sqrt{٣}}{\sqrt{١}}$

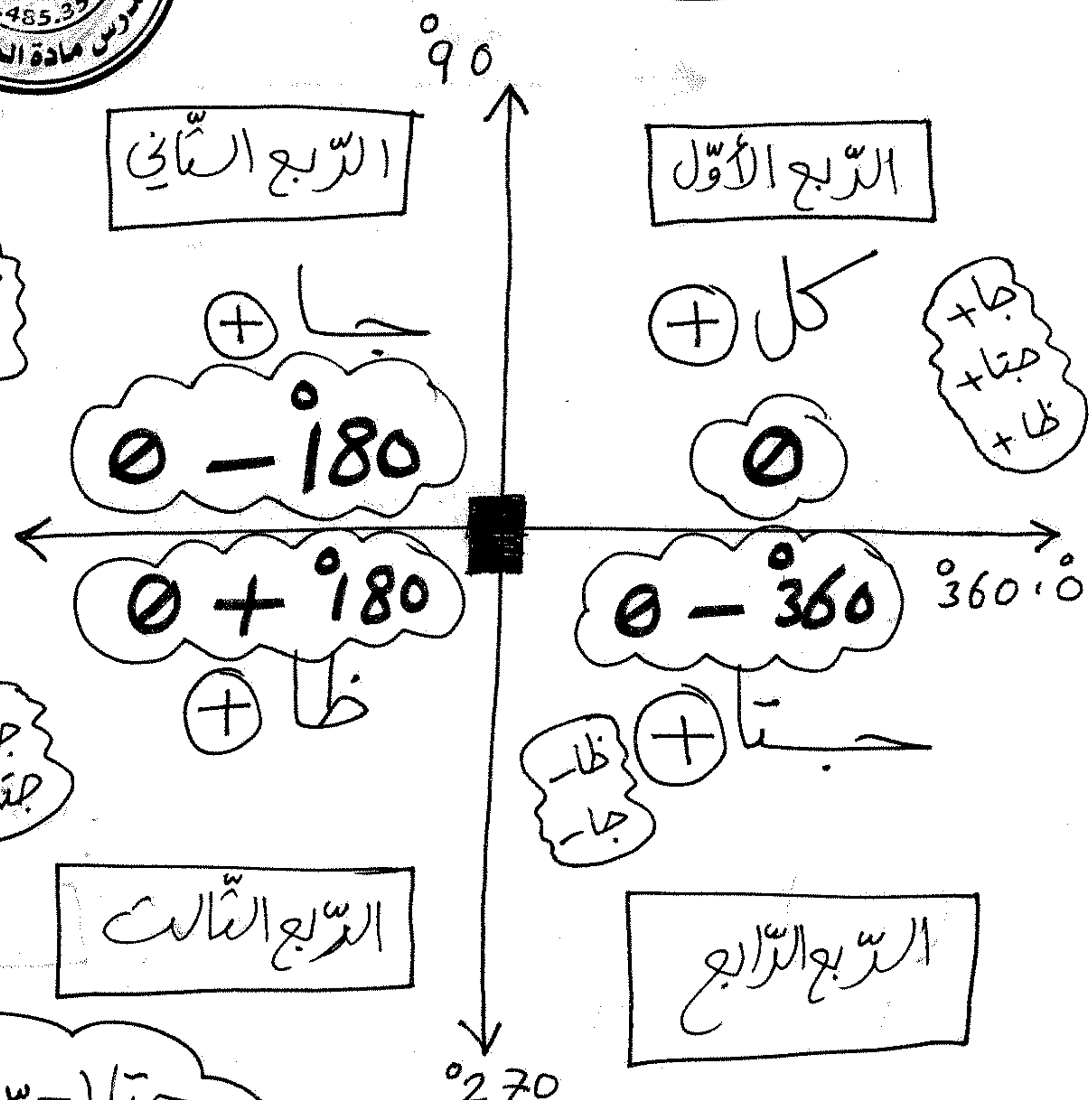


جتا ٩٠° = $\frac{\sqrt{٠}}{٢}$

جا ٩٠° = $\frac{\sqrt{٤}}{٢}$

ظا ٩٠° = $\frac{\sqrt{٤}}{\sqrt{٠}}$

* إشارة النسب المثلثية حسب الأرباع الأربعة ، ومعها الزاوية الأساسية :



جتا (−س) = جتاس

جا (−س) = − جاس

ظا (−س) = − ظاس

"مستفادة" ← [اللي فيها "التاء" تاكل السالب]

* العلاقة بين التقدير الستيني (D) والتقدير الدائري أو الراديان (R)

$$\text{التقدير الستيني} \xrightarrow{\times \frac{\pi}{180^\circ}} \text{التقدير الدائري}$$

$$\text{التقدير الدائري} \xrightarrow{\times \frac{180^\circ}{\pi}} \text{التقدير الستيني}$$

مثل: حوّل 30° إلى الراديان؟ ← $\frac{\pi}{180} \times 30^\circ = \boxed{\frac{\pi}{6}}$

حوّل $\frac{\pi}{3}$ إلى الستيني؟ ← $\frac{180^\circ}{\pi} \times \frac{\pi}{3} = \boxed{60^\circ}$

* ملاحظة:

* العدد $\boxed{\pi}$ بالقياس الستيني يحسب (180°)

وبالقياس الدائري يحسب (3.14) أو $\left(\frac{22}{7}\right)$

* في حالة الزوايا مثل: جا (π) إذا كانت على (D)

اكتب: جا (180°)

* ملاحظات:

* مرافق العدد:

$\frac{1}{\sqrt{\text{أ}}}$ مرافقه $\sqrt{\text{أ}}$ "مرافق المقام" $\leftarrow \frac{1}{\sqrt{\text{أ}}} \times \frac{\sqrt{\text{أ}}}{\sqrt{\text{أ}}} = \frac{\sqrt{\text{أ}}}{\text{أ}}$

تعكس الإشارة

* المقدار: $\text{أ} + \sqrt{\text{ب}}$ مرافقه: $\text{أ} - \sqrt{\text{ب}}$

عكس الإشارة

* المقدار: $\text{أ} - \sqrt{\text{ب}}$ مرافقه $\text{أ} + \sqrt{\text{ب}}$

* المقدار: $\text{أ} - \text{ب}$ مرافقه $\text{أ} + \text{ب}$

$$\boxed{\text{المقدار} \times \text{مرافقه} = \text{مربع الأول} - \text{مربع الثاني}}$$

مثل:

$$(\text{أ} + \sqrt{\text{ب}})(\text{أ} - \sqrt{\text{ب}}) = (\text{أ})^2 - (\sqrt{\text{ب}})^2$$

$$= \text{أ}^2 - \text{ب}$$

* الجذور:

* $\sqrt{\text{س}} \times \sqrt{\text{س}} = \sqrt{\text{س}^2} = \boxed{\text{س}}$

* $\sqrt{\text{أ}} \times \sqrt{\text{ب}} = \sqrt{\text{أب}}$

* $\sqrt{\text{أ}} + \sqrt{\text{أ}} = 2\sqrt{\text{أ}}$

* $\sqrt{\text{أ}} \pm \sqrt{\text{ب}}$ "لا تجمع ولا تُطرح (جذور مختلفة)"

* $\text{س} \times \sqrt{\text{ص}} = \text{س}\sqrt{\text{ص}}$

* $\sqrt{\text{أ}^2 + \text{ب}^2} \neq \text{أ} + \text{ب}$

* $\text{ع}\sqrt{\text{أ}} + \text{ص}\sqrt{\text{أ}} = (\text{ص} + \text{ع})\sqrt{\text{أ}}$

"الباب الثّاني"

"المتطابقات المثلّثيّة"

* الزّوايا المُركّبة :

* الزاوية المركبة أو صيغة الجمع :

نفس الإشارة

$$* \ \text{جا}(\text{م} \pm \text{ب}) = \text{جام جتاب} \pm \text{جاب جتام} \ *$$

عكس الإشارة

$$* \ \text{جتا}(\text{م} \pm \text{ب}) = \text{جتام جتاب} \mp \text{جام جاب} \ *$$

نفس الإشارة

$$* \ \text{ظا}(\text{م} \pm \text{ب}) = \frac{\text{ظام} \pm \text{ظاب}}{1 \mp \text{ظام ظاب}} \ *$$

عكس الإشارة

* تُسمّى هذه الصّيغ متطابقات مثلّثية وهي صحيحة لجميع قياسات الزوايا الحادّة ، وهي أيضاً صحيحة لقياسات جميع الزوا

تذكّر أنّ:

90°

جا +	كل +
+ جا $(180^\circ -$ س$)$	+ جاس
− جتا $(180^\circ -$ س$)$	+ جتاس
− ظا $(180^\circ -$ س$)$	+ ظاس

180° ــــ $0^\circ , 360^\circ$

ظا +	جتا +
− جا $(180^\circ +$ س$)$	− جا $(360^\circ -$ س$)$
− جتا $(180^\circ +$ س$)$	+ جتا $(360^\circ -$ س$)$
− ظا $(180^\circ +$ س$)$	− ظا $(360^\circ -$ س$)$

270°

* حيث س : هي الزاوية الأساسية *

---

* مثال: (بدون استخدام الآلة الحاسبة) أوجد قيمة كل مما يأتي:

① جا 120°

* 120° في الربع الثاني

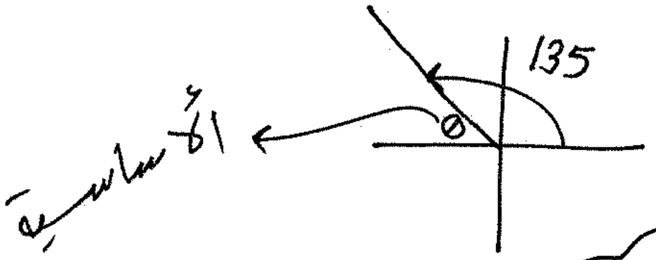
* $180 - 120^\circ = 60^\circ$

الباقي من 180° وهي 60° تعتبر الزاوية الأساسية

∴ جا $(180^\circ - 60^\circ)$

$=$ + جا 60° $= \boxed{\frac{\sqrt{3}}{2}}$

لاحظ في هذا السؤال لم يطلب باستخدام صيغة الزاوية المركبة، فيمكننا حلها بها، أو بطريقة أخرى حسب الأرباع كما هو موضح في أعلى الصفحة

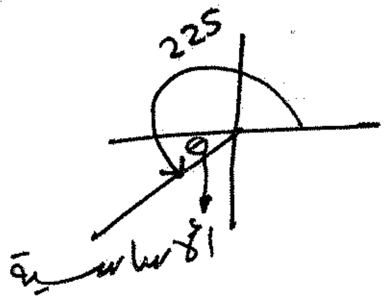


② ظا 135°

* 135° في الرّبع الثاني

* الأساسية ← $180^\circ - 135^\circ = 45^\circ$

∴ ظا (135°) = ظا $(180^\circ - 45^\circ)$ = − ظا 45° = $\boxed{-1}$



③ جتا 225°

* 225° في الرّبع الثالث

* الأساسية ← $225^\circ - 180^\circ = 45^\circ$

جتا(225) = جتا $(180^\circ + 45^\circ)$

= − جتا (45°) = $\boxed{\frac{-1}{\sqrt{2}}}$ = $\boxed{\frac{-\sqrt{2}}{2}$}

المرافق

$\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} \times \frac{1}{\sqrt{2}}$

$= \frac{\sqrt{2}}{2}$

* هذه الطريقة تتلخص خطواتها فيما يلي:

١- نوجد الزاوية الأساسية

٢- نضع إشارة النسبة حسب الرّبع وكذلك الزاوية

θ

$180 - \theta$

$180 + \theta$

$360 - \theta$

④ جا$(-30^\circ) = -$ جا$30^\circ = \boxed{-\frac{1}{2}}$

جتا "تلغي السالب" "اللي فيها تاء"

⑤ جتا$(-30^\circ) =$ جتا$30^\circ = \boxed{\frac{\sqrt{3}}{2}}$

* "اللي فيها "تاء" تاكل السالب ،

⑥ ظا$(-30^\circ) = -$ظا$30^\circ = \boxed{-\frac{\sqrt{3}}{3}}$

⑦ جتا(420°)

* 420 أكبر من 360°

$420^\circ - 360^\circ = 60^\circ$

جتا(420) = جتا $(60) = \boxed{\frac{1}{2}}$

* "حيث في هذه الطريقة لم تُستخدم صيغة الزاوية المركبة ، بل اعتمدت على الزاوية الأساسية وإشارة النسبة حسب الربع ، وهذه الطريقة تم دراستها سابقاً في ثانية ثانوي"

* مثال:

استخدم صيغة الزاوية المركبة لإيجاد الآتي بدلالة قياسات زوايا حادة

المطلوب باستخدام قوانين الزوايا المركبة

أي يكون الناتج فيه زاوية حادة سواءً كانت معلومة أو مجهولة

$90° > \theta > 0°$

ⓟ جا $210°$

نحولها إلى حاصل (جمع) أو (طرح)

أي زاويتين خاصتين

"طريقة سهلة للاسترشاد بها: 210 في الربع الثالث

أساسية: $\theta = 210 - 180° = 30°$

$\therefore 210° = 180 + 30°$

= جا $(180° + 30°)$

نطبق صيغة الزاوية المركبة:

= جا $180°$ جتا $30°$ + جا $30°$ جتا $180°$

من النسب المثلثية للزوايا الخاصة:

= (0 × جتا $30°$) + (جا 30 × -1)

= 0 − جا 30 = $\boxed{-\text{جا } 30°}$

* بدلالة زاوية "وليس جذور" * حزاوية حادة

② جتا 420°

$= \text{جتا}\,(60^\circ + 360^\circ)$

$360^\circ - 420 = \theta$

$= 60^\circ$

$\therefore 60^\circ + 360^\circ = 420$

$=$ جتا 360° جتا 60° — جا 360° جا 60°

$= 1 \times$ جتا 60° — $0 \times$ جا 60

$= \boxed{\text{جتا } 60^\circ}$ ← بدلالة $\boxed{\text{زاوية}}$ ✓ و $\boxed{\text{حادة}}$ ✓

---

③ ظا $(180 + \text{م})^\circ$ بفرض أن $0^\circ < \text{م} < 90^\circ$

← أي أن: م زاوية حادة بين "0°" و "90°"

الحل:

ظا $(180 + \text{م})$ $= \dfrac{\text{ظا } 180^\circ + \text{ظا م}^\circ}{1 - \text{ظا } 180^\circ \text{ ظا م}^\circ}$

$= \dfrac{0 + \text{ظا م}^\circ}{1 - 0}$

$= \dfrac{\text{ظا م}^\circ}{1} = \boxed{\text{ظا م}^\circ}$ ← بدلالة زاوية حادة

(٤) جتا (−س)° بفرض أن $0° < س < 90°$

* طريقة سريعة

جتا (−س)° = جتاس° "جتا" تلغي في السالب

* طريقة الصيغة المركبة :

جتا (−س°) = جتا (٠ − س)°

= جتا ٠° جتاس° + جا ٠° جاس°

= 1 × جتاس° + (٠ × جاس°)

= $\boxed{\text{جتاس°}}$ $0° < س < 90°$

زاوية حادة

تمرين (2-أ) من الكتاب المدرسي رقم (1 - أ - هـ)

* أوجد قيم الآتي بدلالة الجذور الصماء باستخدام صيغة الزاوية المركبة :

أي: أن يكون الناتج بدلالة جذور

تذكر أن :

$\sqrt{أ} \times \sqrt{ب} = \sqrt{أب}$

(أ) جا $(30 + 45)^\circ$

الحل:

= جا 30° جتا 45° + جا 45° جتا 30°

$$= \left(\frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2}\right) + \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{4} + \frac{\sqrt{6}}{4}$$

$$= \boxed{\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}}$$

9

تمرين (2-م) رقم (1)
ب - ج - د - و
يترك للطالب

هـ) ظا 15°

$$\text{ظا}(45-30)^\circ = \frac{\text{ظا}45^\circ - \text{ظا}30^\circ}{1+\text{ظا}45^\circ\,\text{ظا}30^\circ} = \frac{1-\frac{\sqrt3}{3}}{1+1\times\frac{\sqrt3}{3}} = \frac{\frac{3-\sqrt3}{3}}{1+\frac{\sqrt3}{3}} = \frac{\frac{3-\sqrt3}{\cancel{3}}}{\frac{3+\sqrt3}{\cancel{3}}}$$

مرافق المقام

$$= \frac{3-\sqrt3}{3+\sqrt3}\times\frac{3-\sqrt3}{3-\sqrt3} = \frac{(3-\sqrt3)^2}{9-3} = \frac{1}{6}(3-\sqrt3)^2 = \frac{9-6\sqrt3+3}{6} = \frac{12-6\sqrt3}{6} = \frac{12}{6}-\frac{6\sqrt3}{6} = \boxed{2-\sqrt3}$$

أو

$$\text{ظا}(60-45)^\circ = \frac{\text{ظا}60^\circ - \text{ظا}45^\circ}{1+\text{ظا}60^\circ\,\text{ظا}45^\circ} = \frac{\sqrt3-1}{1+(\sqrt3\times1)}$$

$$= \frac{\sqrt3-1}{1+\sqrt3}\times\boxed{\frac{(1-\sqrt3)}{1-\sqrt3}}$$

مرافق المقام

$$= \frac{\sqrt3-3-1+\sqrt3}{1-3} = \frac{-4+2\sqrt3}{-2} = \frac{-4}{-2}+\frac{2\sqrt3}{-2} = \boxed{2-\sqrt3}$$

تمرين (2-م) رقم (2) (م) :

عبّر عن التالي بصورة نسبة مثلثية فريدة :

أي : أجعل المقدار التالي في صورة نسبة مثلثية (واحدة) [اختصرها لنسبة واحدة]

(م) جا 15° جتا 24° + جتا 15° جا 24°

هذه صيغة الزاوية المركبة الخاصة بالـ(جا) لأن أول حد "جا جتا"

= جا $(24 + 15)^\circ$

= $\boxed{\text{جا } (39)^\circ}$

= $\boxed{0.63 \approx}$

ويمكن تحويلها لـ(جتا)

باستخدام جا (θ) = جتا ($90 - \theta$)

جتا $(90 - 39)^\circ$ = $\boxed{\text{جتا } (51)^\circ}$

تمرين (2-م) رقم (2) [ب — ج]

"تترك للطالب"

تمرين (2-أ) رقم (3 - ب)

أوجد بدون استخدام الجداول الرياضية أو الآلة الحاسبة قيمة كل من :

ب) جتا 75° جتا 45° − جا 75° جا 45°

بدون استخدام الآلة الحاسبة

الحل :

باستخدام قانون "الصيغة المركبة" الخاصة بالـ(جتا)

"عكسي"

= جتا $(75 + 45)^\circ$

= جتا 120° = $\boxed{-\frac{1}{2}}$

جتا $(180^\circ - 60^\circ)$

= جتا 180° جتا 60° + جا 180° جا 60°

= $\left(-1 \times \frac{1}{2}\right) + \left(0 \times \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

= $\boxed{-\frac{1}{2}}$

تمرين (2 - أ) رقم (3 - أ - جـ) يترك للطالب

* تمرين (4 - أ - ج) من تمارين (2-أ)

عبّر بصورة نسب مثلثية فريدة :

(أ) $\frac{1}{2}$ جتاهـ + $\frac{\sqrt{3}}{2}$ جاهـ

الحل : لكي نستخدم صيغة الزاوية المركبة لابد من وجود "نسبتين مثلثيتين في كل حد"

وهنا توجد نسبة مثلثية واحدة في كل حد

لاحظ : $\boxed{\frac{1}{2}}$ جتاهـ

مكان جاهـ أو جتاهـ ← "كلاهما صحيح"

إن استخدمناها فستصبح الصيغة المركبة لـ(جا)

إن استخدمناها فستصبح الصيغة المركبة لـ(جتا)

$\boxed{\frac{1}{2}}$ جتا θ + $\frac{\sqrt{3}}{2}$ جا θ

باستخدام الـ (جتا$^{-1}$)

جتا $\theta = \frac{1}{2}$ ⟵ $\theta =$ جتا$^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)$

$\theta = 60°$

أي: $\boxed{\frac{1}{2} = \text{جتا } 60°}$

وكذلك $\boxed{\frac{\sqrt{3}}{2}}$ جا θ

جا $\theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$ ⟵ $\theta =$ جا$^{-1}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

$\theta = 60°$

أي: $\boxed{\frac{\sqrt{3}}{2} = \text{جا } 60°}$

$\frac{1}{2}$ جتا θ + $\frac{\sqrt{3}}{2}$ جا θ

∴ جتا $60°$ جتا θ + جا $60°$ جا θ

$= \boxed{\text{جتا}\,(60 - \theta)°}$

أو :

$\frac{1}{2}$ جتا θ + $\frac{\sqrt{3}}{2}$ جا θ

جا θ

$\theta =$ جتا$^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)$

$\theta = 30^\circ$

جتا θ

$\theta =$ جتا$^{-1}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

$\theta = 30^\circ$

= جا 30° جتا θ + جتا 30° جا θ

= $\boxed{\text{جا } (30^\circ + \theta)}$

لاحظ :

في الحل الأول ، جتا $(\boxed{60^\circ - \theta})$ ✓

في الحل الثاني : جا $(\boxed{30^\circ + \theta})$ ✓

متممات

28

$\boxed{(\theta + 30^\circ)} + \boxed{60^\circ - \theta}$

$\cancel{\theta} + 30^\circ + \cancel{\theta} - 60^\circ$

$30^\circ + 60^\circ = \boxed{90^\circ}$ متممات

كلاهما صحيح

ج)

$$\frac{\frac{1}{\sqrt{3}} + \text{ظا}\,\theta}{1 - \frac{\text{ظا}\,\theta}{\sqrt{3}}}$$

$\boxed{\frac{1}{\sqrt{3}}} \times \text{ظا}\,\theta$

$\text{ظا}\,30^\circ$

$\text{ظا}\,\theta = \frac{1}{\sqrt{3}} \longrightarrow \theta = \text{ظا}^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = 30^\circ$

نفس

$$= \frac{\text{ظا}\,30^\circ + \text{ظا}\,\theta}{1 - \text{ظا}\,30^\circ\,\text{ظا}\,\theta} = \boxed{\text{ظا}\,(30^\circ + \theta)}$$

تمرين (2-م) [4 - ب] يترك للطالب

تمرين:

$$\frac{1 + \text{ظا}\,20^\circ}{1 - \text{ظا}\,20^\circ}$$

عبّر عنه في صورة نسبة مثلثية وحيدة؟

يترك للطالب:

الجواب: $\boxed{\text{ظا}\,65^\circ}$

* ضع المقدار التالي في صورة نسبة مثلثية وحيدة :

$$\text{جا}\underbrace{(\text{م}+50)^\circ}_{\text{م}}\ \text{جتا}\underbrace{(\text{م}-10)^\circ}_{\text{ب}} + \text{جتا}\underbrace{(\text{م}+50)^\circ}_{\text{م}}\ \text{جا}\underbrace{(\text{م}-10)^\circ}_{\text{ب}}$$

الحل : على صورة جام جتاب + جتام جاب = جا(م+ب)

$$\therefore = \text{جا}\left(\text{م}+50 + (\text{م}-10)\right)$$

$$\text{جا}\left(\cancel{\text{م}-}\ 10 + \cancel{\text{م}} + 50\right)$$

$$\boxed{\text{جا}\ 60^\circ}$$

تمرين (2-أ) رقم (6)

إذا كان ; $\frac{ظا أ + ظا ب}{1 - ظا أ ظا ب} = \frac{3}{\sqrt{3}}$

فأوجد من دون استخدام الجداول أو الآلة الحاسبة قيمة أ + ب حيث أ ، ب زاويتان حادتان؟

الحل:

$$\frac{3}{\sqrt{3}} = \frac{ظا أ + ظا ب}{1 - ظا أ ظا ب}$$

$$\frac{3}{\sqrt{3}} = ظا(أ + ب)$$

؟

$$أ + ب = ظا^{-1}\left(\frac{3}{\sqrt{3}}\right)$$

$$\boxed{أ + ب = 60°}$$

∵ أ ، ب حادتان أي أنهما في الربع الأول ∴ في الربع الأول ⊖ تبقى كما هي

الذي يربط المعطيات بالمجهول هو الصيغ المركبة لـ (ظا)

* إذا كانت: $\text{ظا}(م + ب) = 3$

$\text{ظا}(م) = \frac{1}{3}$

أوجد ظا ب ؟

الحل:

$\because \ \text{ظا}(م + ب) = \dfrac{\text{ظا}م + \text{ظا}ب}{1 - \text{ظا}م\,\text{ظا}ب}$

$$\frac{\frac{1}{3} + \text{ظا}ب}{1 - \left(\frac{1}{3} \times \text{ظا}ب\right)} = \frac{3}{1}$$

$$\frac{1}{3} + \text{ظا}ب = 3 \times \left(1 - \frac{1}{3}\,\text{ظا}ب\right)$$

$$\frac{1}{3} + \text{ظا}ب = 3 - \cancel{\tfrac{1}{3}}\cancel{\times 3}\,\text{ظا}ب$$

$$\boxed{\frac{1}{3}} + \text{ظا}ب = 3 - \text{ظا}ب$$

$$\text{ظا}ب + \text{ظا}ب = \frac{3 \times 3}{1 \times 3} - \frac{1}{3}$$

مقام البسط
مقام

$$2\,\text{ظا}ب = \frac{8}{3} \quad \text{بالقسمة على } (2) \quad \text{ظا}ب = \frac{\frac{8}{3}}{2} = \frac{8}{2 \times 3} = \frac{\cancel{8}\,④}{\cancel{6}\,③} = \boxed{\frac{4}{3}}$$

* إذا كان: جتاس جتاص $= \frac{1}{3}$

جاس جاص $= \frac{1}{4}$

أوجد جتا (س + ص) ؟

الحل:

جتا(س + ص) = $\boxed{\text{جتاس جتاص}}$ − $\boxed{\text{جاس جاص}}$

$= \frac{1}{3} - \frac{1}{4}$

$\frac{3\times1}{3\times4} - \frac{1\times4}{3\times4}$

$\frac{1}{12} = \frac{3-4}{12}$

جتا(س + ص) $= \boxed{\frac{1}{12}}$

وإن طلب (س + ص)

بحيث س، ص زاويتان حادتان

س + ص = جتا$^{-1}\left(\frac{1}{12}\right)$

$\boxed{\text{س + ص} \approx 85.22}$ (أقرب رقم عشري واحد)

*وإن طلب: ② جتا (س + ص)

$\boxed{\frac{1}{6}} = \frac{1}{12} \times 2$

* بدون استخدام الآلة الحاسبة، أوجد قيم الآتي بدلالة الجذور الصمّاء:

① جتا $\left(\frac{7\pi}{12}\right)$

الحل: $\pi = 180^\circ$ في النظام (D)

$\therefore \frac{180 \times 7}{12} = \boxed{105^\circ}$

* $180 - 105$
$= 75^\circ$

$\therefore 180 - 75^\circ$

أو:

$60 + 45^\circ$
$= 105$

جتا $\left(\frac{7\pi}{12}\right)$ = جتا (105°)

= جتا $(60^\circ + 45^\circ)$

= جتا 60° جتا 45° − جا 60° جا 45°

$= \left(\frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2}\right) - \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

$= \frac{\sqrt{2}}{4} - \frac{\sqrt{6}}{4} = \boxed{\frac{\sqrt{2} - \sqrt{6}}{4}}$

نثر للطالب

② $\dfrac{\text{ظا}\left(\frac{7\pi}{18}\right) - \text{ظا}\left(\frac{\pi}{18}\right)}{1 + \text{ظا}\left(\frac{7\pi}{18}\right)\text{ظا}\left(\frac{\pi}{18}\right)}$

الجواب ← ظا(60) $= \boxed{\sqrt{3}}$

* (2016/1)

$\text{جا}\left(\frac{\pi}{4} + \text{س}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[\text{جتا س} - \text{جا س}\right]$

(أ) صح ● $\boxed{\text{خطأ}}$

$\frac{\pi}{4} = \frac{180^\circ}{4} = \boxed{45^\circ}$

$\text{جا}(45^\circ + \text{س}) = \text{جا}45^\circ\ \text{جتا س} + \text{جا س}\ \text{جتا}45^\circ$

$= \frac{\sqrt{2}}{2}\ \text{جتا س} + \frac{\sqrt{2}}{2}\ \text{جا س}$

$\frac{\sqrt{2}}{2}$ P.٣.٤

$= \frac{\sqrt{2}}{2}\left[\text{جتا س} + \text{جا س}\right]$

$= \frac{1}{\sqrt{2}}\left[\text{جتا س} + \text{جا س}\right]$

$\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{2}}{2}$

$= \frac{2}{2\sqrt{2}}$

$= \frac{1}{\sqrt{2}}$

22

* إذا كان : $\dfrac{\text{جا}(\text{م}-\text{ب})}{\text{جا}(\text{م}+\text{ب})} = \dfrac{5}{7}$

، ظام = ك ظاب

فأوجد قيمة ك ؟

الحل :

$$\dfrac{\text{جام جتاب} - \text{جاب جتام}}{\text{جام جتاب} + \text{جاب جتام}} = \dfrac{5}{7}$$

$$7\,(\text{جام جتاب} - \text{جاب جتام}) = 5\,(\text{جام جتاب} + \text{جاب جتام})$$

$$\boxed{7\,\text{جام جتاب}} - 7\,\text{جاب جتام} = \boxed{5\,\text{جام جتاب}} + 5\,\text{جاب جتام}$$

$$7\,\text{جام جتاب} - 5\,\text{جام جتاب} = 5\,\text{جاب جتام} + 7\,\text{جاب جتام}$$

$$2\,\text{جام جتاب} = 12\,\text{جاب جتام}$$

$$\text{ظام} = \dfrac{\text{جام}}{\text{جتام}} \qquad \text{ظاب} = \dfrac{\text{جاب}}{\text{جتاب}}$$

يتبع ←

$$\frac{2\,\text{جا}\,\text{م}\,\text{جتا}\,\text{ب}}{\text{جتا}\,\text{م}} = \frac{12\,\text{جا}\,\text{ب}\,\cancel{\text{جتا}\,\text{م}}}{\cancel{\text{جتا}\,\text{م}}}$$

$$\frac{2\,\text{ظا}\,\text{م}\,\cancel{\text{جتا}\,\text{ب}}}{\cancel{\text{جتا}\,\text{ب}}} = \frac{12\,\text{جا}\,\text{ب}}{\text{جتا}\,\text{ب}}$$

$$\frac{\cancel{2}\,\text{ظا}\,\text{م}}{\cancel{2}} = \frac{12\,\text{ظا}\,\text{ب}}{2}$$

$$\text{ظا}\,\text{م} = \boxed{6}\,\text{ظا}\,\text{ب}$$

$$\therefore \quad \text{ظا}\,\text{م} = \boxed{\text{ك}}\,\text{ظا}\,\text{ب}$$

$$\therefore \quad \boxed{\text{ك} = 6}$$

تمارين تُترك للطالب؛

① إذا كان $\frac{\text{جتا}(أ - ب)}{\text{جتا}(أ + ب)} = \frac{7}{3}$

، ظا أ = ك ظا ب فأوجد قيمة ك ؟

② إذا كان: $\frac{\text{جتا}(أ + ب)}{\text{جتا}(أ - ب)} = \frac{3}{4}$ فإن ظا أ ظا ب = ... ؟

③ إذا كان $\frac{\text{جا}(أ + ب)}{\text{جا}(أ - ب)} = \frac{5}{3}$ ، ظا أ = ك ظا ب ، ك = ...؟

④ إذا كان $\frac{\text{جا}(أ + ب)}{\text{جا}(أ - ب)} = \frac{5}{6}$ ، ظا أ = ك ظا ب
فإن 11 ك = ...؟

⑤ إذا كان: $\frac{\text{جا}(أ - ب)}{\text{جا}(أ + ب)} = \frac{3}{7}$ فإن 2 ظا أ ظتا ب = ...؟

الإجابات:

① $\frac{2}{5}$ ② $\frac{1}{7}$ ③ 4 ④ 1

⑤ 5

* تمارين من نوع آخر:

إذا كان: جا أ $= \frac{5}{13}$ ، جا ب $= \frac{4}{5}$

فأوجد قيمة كل من:

① جا(أ + ب) ، ② جتا(أ − ب) ③ ظا(أ + ب)

عندما تكون:

(i) أ ، ب زاويتان حادتان

(ii) أ زاوية حادة ، ب زاوية منفرجة

(iii) أ ، ب زاويتان منفرجتان ؟

الحل: (i) أ ، ب زاويتان حادتان

① جا(أ + ب) = جاأ جتاب + جاب جتاأ

لاحظ أننا نحتاج لـ ( ) و ( )

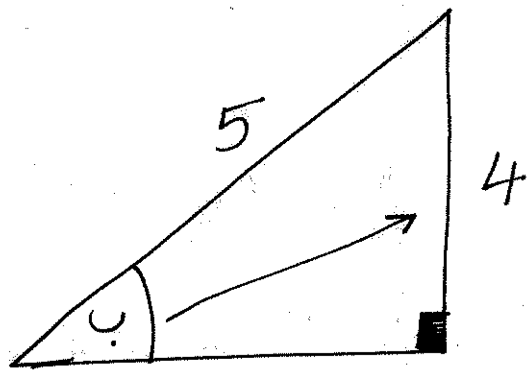
نرسم △ قائم خاص بـ(أ) عن طريق جاأ $= \frac{5}{13}$ (معطى)

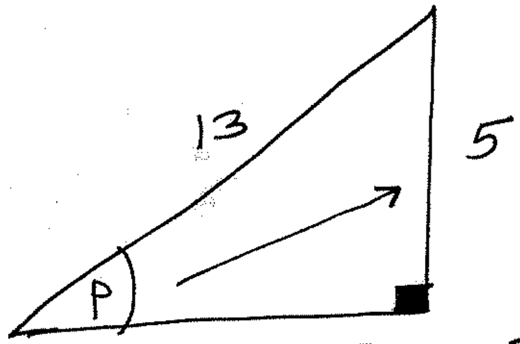
ونرسم △ آخر قائم خاص بـ(ب) عن طريق جاب $= \frac{4}{5}$ (معطى)

يتبع

جا ب = $\frac{4}{5}$ $\frac{\text{مقابل}}{\text{وتر}}$

جا م = $\frac{5}{13}$ $\frac{\text{مقابل}}{\text{وتر}}$





$\boxed{3} = \sqrt{(5)^2 - (4)^2}$ ← فيثاغورس

$\boxed{12} = \sqrt{(13)^2 - (5)^2}$ ← نظرية فيثاغورس

∴ جا (م + ب) = جام جتاب + جاب جتام

م ، ب حادتان أي : في الربع الأول

وفي الربع الأول كل النسب موجبة

جا+ جتا+ ظا+

جا (م + ب) = $\left(\frac{5+}{13}\right) \times \left(\frac{3+}{5}\right) + \left(\frac{4+}{5}\right) \times \left(\frac{12+}{13}\right)$

جا (م + ب) = $\frac{15}{65} + \frac{48}{65}$

جا (م + ب) = $\boxed{\frac{63}{65}}$

٧٥

② ، ③ للطالب ....

(ii) أ حادة ، ب منفرجة

↓ الربع الأول

جا أ (+)

جتا أ (+)

ظا أ (+)

↓ الربع الثاني

جا ب (+)

جتا ب (−)

ظا ب (−)

(1) جا (أ + ب) = جا أ جتا ب + جا ب جتا أ

$$= \left(\frac{12}{13}+\right) \times \left(\frac{4}{5}+\right) + \left(\frac{3}{5}-\right) \times \left(\frac{5}{13}+\right)$$

$$= \frac{48}{65} + \frac{-15}{65}$$

$$= \boxed{\frac{33}{65}}$$

(2) ، (3) للطالب ....

41

(iii) (1) (2) (3) للطالب ....

* إذا كان : $ظاس = \frac{15}{8}$ ، $جتاص = \frac{-3}{5}$

س ، ص في نفس الربع

فأوجد قيمة جا(س + ص) ؟

الحل :

س ، ص في نفس الربع

ظا(+)
جتا(−)

* أي أن
س ، ص تقعان
في الربع الثالث

$\boxed{3}$ ظا+
جتا−

الجواب : $\frac{77}{85}$

يترك للطالب...

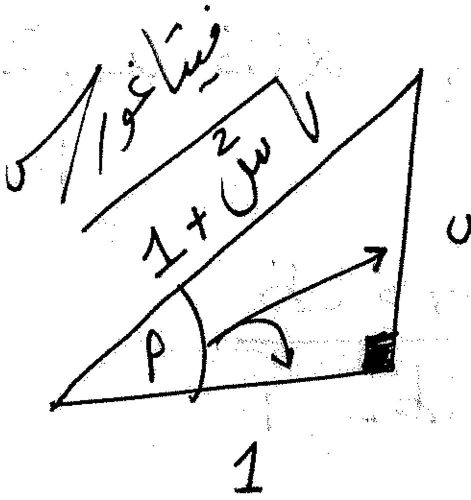
تمرين (P-2) رقم (5)
يترك للطالب

* إذا كان: ظام = س ، م زاوية حادة

فأوجد: ① جام ② جتام

③ جام + جتام

الحل:



$$ظام = \frac{س}{1} = \frac{مقابل}{مجاور}$$

① $$جام = \boxed{\frac{س}{\sqrt{س^2+1}}}$$

② $$جتام = \boxed{\frac{1}{\sqrt{س^2+1}}}$$

③ $$جام + جتام = \frac{س}{\sqrt{س^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{س^2+1}}$$

$$= \boxed{\frac{س+1}{\sqrt{س^2+1}}}$$

(2018/2) *

إذا كان : $\text{ظا}\left(\alpha + 45^\circ\right) = \text{ص}$

فأوجد $\text{ظا}\,\alpha$ ؟

الحل :

$$\frac{\text{ظا}\,45^\circ + \text{ظا}\,\alpha}{1 - \text{ظا}\,45^\circ\,\text{ظا}\,\alpha} = \frac{\text{ص}}{1}$$

$$\text{ص}\left(1 - \text{ظا}\,45^\circ\,\text{ظا}\,\alpha\right) = \text{ظا}\,45^\circ + \text{ظا}\,\alpha$$

$$\boxed{\text{ص} - \text{ص}\,\text{ظا}\,45^\circ\,\text{ظا}\,\alpha} = \text{ظا}\,45^\circ + \text{ظا}\,\alpha$$

$$\text{ص} - \text{ظا}\,45^\circ = \text{ص}\,\text{ظا}\,45^\circ\,\text{ظا}\,\alpha + \text{ظا}\,\alpha$$

$$\text{ص} - 1 = \text{ص} \times 1 \times \text{ظا}\,\alpha + \text{ظا}\,\alpha$$

$$\text{ص} - 1 = \text{ص}\,\text{ظا}\,\alpha + \text{ظا}\,\alpha$$

$$\text{ص} - 1 = \text{ظا}\,\alpha\left(\text{ص} + 1\right)$$

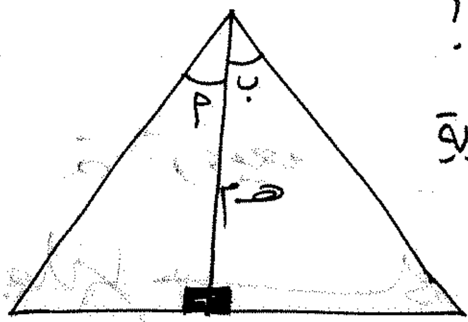
$$\therefore\ \text{ظا}\,\alpha = \frac{\text{ص} - 1}{\text{ص} + 1}$$ #

* (1/2018) (1/2022)

مثلث ارتفاعه هـ متراً ، الزاويتان م + ب = $45°$

فأوجد قيمة هـ ؟

لأنها تربط بين (هـ) و الزاوية (م ، ب)



م2 م3

الحل :

$$ظا\,م = \frac{2}{هـ} \quad ، \quad ظا\,ب = \frac{3}{هـ}$$

يمكن استخدام جا ، جتا ولكن الوتر يصبح $\sqrt{هـ^2+3^2}$ يكون الحل طويلاً نوعاً ما ويحتاج لخطوات أكثر (ربما)

$$\therefore ظا(م+ب) = \frac{ظا\,م + ظا\,ب}{1 - ظا\,م\ ظا\,ب}$$

$$\Leftarrow ظا(45) = \frac{\frac{2}{هـ} + \frac{3}{هـ}}{1 - \frac{2}{هـ} \times \frac{3}{هـ}}$$

$$1 = \frac{\frac{5}{هـ}}{1 - \frac{6}{هـ^2}}$$

$$1 = \frac{\frac{5}{\cancel{هـ}}}{\frac{هـ^2-6}{\cancel{هـ}^2}} \leftarrow 1 = \frac{5}{\frac{هـ^2-6}{هـ}}$$

مقام المقام بسط

يتبع ← --

$$\frac{5\text{هـ}}{\text{هـ}^2 - 6} = \frac{1}{1}$$

$$\text{هـ}^2 - 6 = 5\text{هـ}$$

"معادلة تربيعية من الدرجة الثانية"

"نجعلها على الصورة الصفرية"

$$\text{هـ}^2 - 5\text{هـ} - 6 = 0$$

$$(\text{هـ} + 1)(\text{هـ} - 6) = 0$$

إما : $\text{هـ} + 1 = 0 \leftarrow \boxed{\text{هـ} = -1}$ ✗ مرفوض لأن (هـ) عبارة عن طول والطول لا يكون بالسالب

أو : $\text{هـ} - 6 = 0 \leftarrow \boxed{\text{هـ} = 6}$

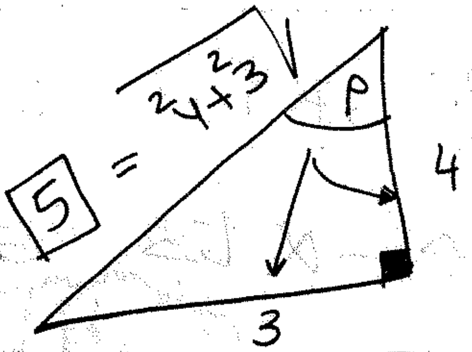
$\therefore \boxed{\text{هـ} = 6}$ فقط

(2018/1) :

إذا كان : ظا م = $\frac{-3}{4}$ ، م منفرجة

فإن جتا م = ؟

الحل :



∴ جتا م = $\boxed{\frac{-4}{5}}$

م منفرجة
الربع الثاني
جا (+)
جتا (−)
ظا (−)

2017/2 : أوجد قيمة

جتا(س − ص) . جتا(س + ص)

إذا كان :

جتاس جتاص = 4 ، جاس جاص = 3 ؟

" تُترك للطالب "

$\boxed{\text{الجواب} = 7}$

تُترك للطالب

(2018/2) : زاويتان حادتان α ، β حيث

ظا $\alpha = \frac{4}{3}$ ، ظا $(\alpha + \beta) = -1$

فإن ظا β = ؟ الجواب $\boxed{=7}$

(2016/2) إذا كانت $\alpha + \beta = \frac{\pi}{2}$

فأوجد قيمة جتا α − جا β ؟

الجواب = 0

تُترك للطالب

(2016/2) :

(١ − جا^{2}س) (١ + ظا^{2}س) =

∵ جا^{2}س + جتا^{2}س = 1 ← جتا^{2}س = 1 − جا^{2}س

∵ قا^{2}س − ظا^{2}س = 1 ← قا^{2}س = ظا^{2}س + 1

(جتا^{2}س) (قا^{2}س)

= $\cancel{(\text{جتا}^2\text{س})} \times \left(\frac{1}{\cancel{\text{جتا}^2\text{س}}}\right) = \boxed{1}$

تمرين 2-1

(1) أوجد قيم الآتي بدلالة الجذور الصماء باستخدام صيغة الزاوية المركبة

مذكرة (أ) جا $(45 + 30)°$ (ب) جا $(45 - 30)°$

للطالب (جـ) ظا $(45 + 30)°$ (د) جا $105°$ — للطالب

مذكرة (هـ) ظا $15°$ (و) جتا $(- 45)°$

(2) عبر بصورة نسب مثلثيه فريدة:

مذكرة (أ) جا $15°$ جتا $24°$ + جتا $15°$ جا $24°$

للطالب (ب) جتا $50°$ جتا $20°$ + جا $50°$ جا $20°$

(جـ) $\frac{1 + \text{ظا } 20°}{1 - \text{ظا } 20°}$

(3) أوجد، بدون استخدام الجداول الرياضية أو الآلة الحاسبة، قيمة كل من :

للطالب (أ) جتا $7°$ جا $23°$ + جا $7°$ جتا $23°$

مذكرة (ب) جتا $75°$ جتا $45°$ - جا $75°$ جا $45°$

للطالب (جـ) $\frac{\text{ظا } 13° + \text{ظا } 32°}{1 - \text{ظا } 13° \text{ ظا } 32°}$

(4) عبر بصورة نسب مثلثيه فريدة:

مذكرة (أ) $\frac{1}{2}$ جتا $\theta + \frac{\sqrt{3}}{2}$ جا θ

للطالب (ب) $\frac{-1}{\sqrt{2}}$ جتا $\theta + \frac{1}{\sqrt{2}}$ جا θ

مذكرة (جـ) $\frac{\frac{1}{\sqrt{3}} + \text{ظا } \theta}{1 - \frac{\text{ظا } \theta}{\sqrt{3}}}$

للطالب (5) إذا كان جتا أ = $-\frac{4}{5}$ ، جتا ب = $\frac{12}{13}$ ، أ زاوية منفرجة ، ب زاوية حادة، فأوجد، من دون استخدام الجداول الرياضية أو الآلة الحاسبة، قيمة كل من:

(أ) جا (أ + ب)   (ب) جا (أ - ب)   (جـ) ظا (أ + ب)

مذكرة (6) إذا كان $\frac{\text{ظا أ + ظا ب}}{1 - \text{ظا أ ظا ب}} = \frac{3}{\sqrt{3}}$، فأوجد، من دون استخدام الجداول أو الآلة الحاسبة قيمة أ + ب حيث أ ، ب زاويتان حادتان .

79

[illegible]

ضعف ومضاعفات الزوايا

* صيغة الزاوية المركبة يمكن أن تمتد لإيجاد قيم ضعف ومضاعفات الزوايا
مثل: جا2م ، جتا2م ، ظا2م ، ... إلخ.

* بالتعويض عن ب بـ(م) في (م + ب)

الإثبات والبرهان

جا(م + م) = جا2م

جا2م = جام جتام + جام جتام

نتيجة: **جا2م = 2 جام جتام**

* بالمثل: جتا(2م) = جتا(م + م)

= جتام جتام − جام جام

الإثبات

نتيجة: **جتا2م = جتا²م − جا²م**

$$\text{جتا}\,2\text{م} = \text{جتا}^2\text{م} - \text{جا}^2\text{م} \quad (2)$$

هذه النتيجة لها بديلات مهمّان

$$\text{جا}^2\text{م} + \text{جتا}^2\text{م} = 1 \quad ::$$

$$\boxed{\text{جا}^2\text{م} = 1 - \text{جتا}^2\text{م}}$$

بالتعويض في (2):

$$= \text{جتا}^2\text{م} - (1 - \text{جتا}^2\text{م})$$

$$= \text{جتا}^2\text{م} - 1 + \text{جتا}^2\text{م}$$

$$\boxed{2\,\text{جتا}^2\text{م} - 1} \quad (3)$$

$$\boxed{\text{جتا}^2\text{م} = 1 - \text{جا}^2\text{م}}$$

بالتعويض في (2):

$$\Leftarrow (1 - \text{جا}^2\text{م}) - \text{جا}^2\text{م}$$

$$= 1 - \text{جا}^2\text{م} - \text{جا}^2\text{م}$$

$$\boxed{1 - 2\,\text{جا}^2\text{م}} \quad (4)$$

* وبالمثل:

$$\text{ظا}(\text{م} + \text{م}) = \frac{\text{ظام} + \text{ظام}}{1 - \text{ظام}\,\text{ظام}} \quad \text{البرهان}$$

نتيجة

$$\boxed{\text{ظا}(2\text{م}) = \frac{2\,\text{ظام}}{1 - \text{ظا}^2\text{م}}}$$

* تُسمّى هذه الصيغ بـ (صيغ ضعف الزاوية) وتتلخص في التالي:

$$\text{جا}\,2\text{م} = 2\,\text{جام}\;\text{جتام}$$

$$\text{جتا}\,2\text{م} = \begin{cases} \text{جتا}^2\text{م} - \text{جا}^2\text{م} \\ 2\,\text{جتا}^2\text{م} - 1 \\ 1 - 2\,\text{جا}^2\text{م} \end{cases}$$

$$\text{ظا}\,2\text{م} = \frac{2\,\text{ظام}}{1 - \text{ظا}^2\text{م}}$$

* النسب المثلثية الأخرى لمضاعفات أخرى للزاوية م يمكن إيجادها بهذه الطريقة بالتعبير عن الزاوية المضاعفة بدلالة زوايا أصغر مثلاً :

جتا 4م = جتا (2م + 2م) التي يمكن فكها إلى الزاوية الفريدة

*جا(3م) = جا (2م + م)

= جا م جتا 2م + جا2م جتا م

= جا م (جتا^{2}م − جا^{2}م) + جتا م (2جا م جتا م)

= جا م جتا^{2}م − جا^{3}م + 2 جا م جتا^{2}م

= 3جا م جتا^{2}م − جا^{3}م

∵ جا^{2}م + جتا^{2}م = 1 ⟵ جتا^{2}م = 1 − جا^{2}م

= 3 جا م (1 − جا^{2}م) − جا^{3}م ⟵ حتى تكون كل النسب متشابهة

= 3جا م − 3جا^{3}م − جا^{3}م

جا3م = 3جا م − 4جا^{3}م

أمثلة:

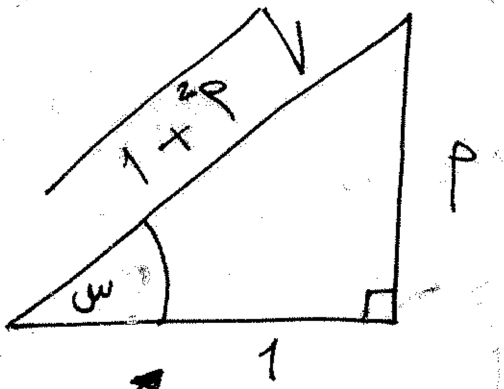
* إذا كان ظاس = م ، س حادة

فأوجد بدلالة (م) :

① ظا2س ② جا2س ③ جتا$^2\left(\frac{س}{2}\right)$

الحل:

$$ظاس = \frac{م}{1}\ \frac{مقابل}{مجاور}$$



① $ظا2س = \frac{2ظاس}{1 - ظا^2س}$

$$ظا2س = \frac{2 \times م}{1 - م^2} = \boxed{\frac{2م}{1 - م^2}}$$

من Δ : $جاس = \frac{م}{\sqrt{1+م^2}}$

$جتاس = \frac{1}{\sqrt{1+م^2}}$

② جا2س = 2 جاس جتاس

$$= 2 \times \frac{م}{\sqrt{1+م^2}} \times \frac{1}{\sqrt{1+م^2}}$$

$$جا2س = \boxed{\frac{2م}{1+م^2}}$$

③ $\text{جتا}^2 \frac{\text{س}}{2}$

$\because$ $\text{جتا } 2\text{س} = 2\,\text{جتا}^2\text{س} - 1$

ضعف

أي أن: $\text{جتا } 2\Delta = 2\,\text{جتا}^2 \Delta - 1$

$2\,\text{جتا}^2 \frac{\Delta}{2} - 1$ سيكون $\text{جتا } \cancel{2} \times \left(\frac{\Delta}{\cancel{2}}\right)$

من القانون — الزاوية

$2\,\text{جتا}^2 \frac{\Delta}{2} - 1 = \text{جتا } \Delta$

$$\therefore \boxed{\text{جتا س} = 2\,\text{جتا}^2 \frac{\text{س}}{2} - 1}$$

يسمى بقانون ضعف الزاوية

مثال:

$$\frac{1}{\sqrt{م^2 + 1}} = 2 \times \text{جتا}^2 \left(\frac{\text{س}}{2}\right) - 1$$

يتبع ← ---

لاحظ أن: $2\,\text{جتا}^2\,\frac{\text{س}}{2}$ لا تختصر مع الزاوية

$$2\,\text{جتا}^2\left(\frac{\text{س}}{2}\right) = 1 + \frac{1}{\sqrt{\text{م}^2+1}}$$

توحيد مقامات:

$$2\,\text{جتا}^2\left(\frac{\text{س}}{2}\right) = \frac{\sqrt{\text{م}^2+1}+1}{\sqrt{\text{م}^2+1}}$$

بالقسمة على 2

$$\frac{\cancel{2}\,\text{جتا}^2\left(\frac{\text{س}}{2}\right)}{\cancel{2}} = \left(\frac{\sqrt{\text{م}^2+1}+1}{\sqrt{\text{م}^2+1}}\right) \div 2$$

$$\text{جتا}^2\left(\frac{\text{س}}{2}\right) = \frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{\text{م}^2+1}+1}{\sqrt{\text{م}^2+1}}$$

لم نستفد من توحيد المقامات إذن نرجعه كما كان

$$\text{جتا}^2\left(\frac{\text{س}}{2}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{\sqrt{\text{م}^2+1}+1}{\sqrt{\text{م}^2+1}}\right)$$

ونكتب:

$$\text{جتا}^2\left(\frac{\text{س}}{2}\right) = \frac{1}{2}\left(\cancel{\frac{\sqrt{\text{م}^2+1}}{\sqrt{\text{م}^2+1}}} + \frac{1}{\sqrt{\text{م}^2+1}}\right)$$

$$\text{جتا}^2\left(\frac{\text{س}}{2}\right) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2\sqrt{\text{م}^2+1}}$$

تمارين (2-ب):

① اختصر:

أ) $\text{جتا}^2\, 18^\circ - \text{جا}^2\, 18^\circ$

الحل:

$$\text{جتا}^2\,\text{س} - \text{جا}^2\,\text{س} = \text{جتا}\,2\text{س}$$

$$= \text{جتا}(2 \times 18) = \boxed{\text{جتا}(36^\circ)}$$

ب) $\dfrac{1 - \text{ظا}^2\, 10^\circ}{2\,\text{ظا}\, 10^\circ}$

$$\because\ \text{ظا}\,2\text{أ} = \frac{2\,\text{ظا}\,\text{أ}}{1 - \text{ظا}^2\,\text{أ}}$$

$$\therefore\ \text{ظتا}\,2\text{أ} = \frac{1 - \text{ظا}^2\,\text{أ}}{2\,\text{ظا}\,\text{أ}}$$

$$\leftarrow \text{ظتا}(2 \times 10)$$

$$= \boxed{\text{ظتا}\, 20^\circ}$$

ج) $2\,\text{جا}\,\dfrac{\text{س}}{2}\,\text{جتا}\,\dfrac{\text{س}}{2}$

الحل:

زاوية

$$2\,\text{جا}\frac{\text{س}}{2}\,\text{جتا}\frac{\text{س}}{2} = \text{جا}\,2\,(\text{الزاوية})$$

$$= \text{جا}\left(2 \times \frac{\text{س}}{2}\right) \leftarrow \boxed{\text{جاس}}$$

د) $2\,\text{جتا}^2\,2\text{س} - 1$

الحل :

$2\,\text{جتا}^2\,(2\text{س}) - 1 = \text{جتا}\,2\,(\text{الزاوية})$

الزاوية

$= \text{جتا}\,2\,(2\text{س})$

$= \boxed{\text{جتا}\,(4\text{س})}$

هـ) جاس جتاس

الحل : لاحظ أن الصيغة

$\text{جا}\,2\text{س} = 2\,\text{جاس جتاس}$

لا توجد في المعطى

∴ نجعل المتطابقة مثل المعطى بالقسمة على (2)

$\dfrac{\text{جا}\,2\text{س}}{2} = \dfrac{\cancel{2}\,\text{جاس جتاس}}{\cancel{2}}$

لا يصح أن تختصر (2) مع الزاوية (2س)

$\dfrac{\text{جا}\,2\text{س}}{2} = \text{جاس جتاس}$

$= \boxed{\tfrac{1}{2}\,\text{جا}\,2\text{س}}$

تمارين (2 - ب)
رقم (2)
(أ - ب - ج)
تترك للطالب

* لاحظ أنه من صيغ قوانين ضعف الزاوية
يمكن استنتاج قوانين أنصاف الزاوية
بوضع (أ) بدلاً من (2أ)
و $\left(\frac{\text{أ}}{2}\right)$ بدلاً من (أ)
نحصل على:

* $\text{جا أ} = 2\,\text{جا}\left(\frac{\text{أ}}{2}\right)\text{جتا}\left(\frac{\text{أ}}{2}\right)$

* $\text{جتا أ} = \text{جتا}^2\left(\frac{\text{أ}}{2}\right) - \text{جا}^2\left(\frac{\text{أ}}{2}\right)$
$= 2\,\text{جتا}^2\left(\frac{\text{أ}}{2}\right) - 1$
$= 1 - 2\,\text{جا}^2\left(\frac{\text{أ}}{2}\right)$

* $\text{ظا أ} = \dfrac{2\,\text{ظا}\left(\frac{\text{أ}}{2}\right)}{1 - \text{ظا}^2\left(\frac{\text{أ}}{2}\right)}$

للطالب

تمارين (2-ب) [3 - أ - ب - ج]
تمرين (2-ج) (3) [4]

في كيفية استخدام قوانين ضعف الزاوية:

مثل: 2 جا 25 جتا 25 = جا $2(25)$ = جا 50°

أي أن:

جا 2 (الزاوية) = 2 جا (الزاوية) $\times$ جتا (الزاوية)

وعليه:

زاوية

2 جا $\left(\frac{س}{2}\right)$ جتا $\left(\frac{س}{2}\right)$ = جا 2 (الزاوية)

= جا $2\left(\frac{س}{2}\right)$

= **جا س**

وهكذا ...

* أمثلـــة متنوّعة :

2015/1

أ) $(\text{جتا}\,م + \text{جا}\,م)^2 - \text{جا}\,2م = ٥$

صح

خطأ

الحل :

مربع الأول + إشارة القوس × الأول × الثاني × 2 + مربع الثاني

$= \text{جتا}^2 م + \boxed{2\,\text{جا}\,م\,\text{جتا}\,م} + \text{جا}^2 م - \text{جا}\,2م$

متطابقة

$= \text{جتا}^2 م + \cancel{\text{جا}\,2م} + \text{جا}^2 م - \cancel{\text{جا}\,2م}$

$= \text{جتا}^2 م + \text{جا}^2 م$

$\text{جا}^2 م + \text{جتا}^2 م = 1$

$= \boxed{1}$

1/2015 :

(جاس − جتاس)² = 1 + جا2س

○ صح

● $\boxed{\text{خطأ}}$

الحل:

جا²س − 2 جاس جتاس + جتا²س

(جا²س + جتا²س = 1)

2 جاس جتاس = جا2س متطابقة

= 1 − جا2س

(1/2015)

$$\frac{\text{ظام}}{1-\text{ظا}^2\text{م}} = \frac{1}{2}\,\text{ظا2م}$$

○ صح

● $\boxed{\text{خطأ}}$

الحل:

$$\text{ظا2م} = \frac{2\,\text{ظام}}{1-\text{ظا}^2\text{م}} \qquad \boxed{\div 2}$$

$$\frac{\text{ظا2م}}{2} = \frac{\text{ظام}}{1-\text{ظا}^2\text{م}} \longrightarrow \frac{1}{2}\,\text{ظا2م} = \frac{\text{ظام}}{1-\text{ظا}^2\text{م}}$$

(2015/2)

$4\,\text{جتا}^3\theta - 3\,\text{جتا}\,\theta = $ ؟

(أ) $\text{جا}\,3\theta$

(ب) $\text{جا}\,2\theta$

(ج) $\text{جتا}\,2\theta$

(د) $\boxed{\text{جتا}\,3\theta}$

الحل:

$\text{جا}\,2\theta = 2\,\text{جا}\,\theta\,\text{جتا}\,\theta$ ← الاختيار (ب) غير صحيح

$\text{جتا}\,2\theta = \text{جتا}^2\theta - \text{جا}^2\theta$ ← الاختيار (ج) غير صحيح

$= 2\,\text{جتا}^2\theta - 1$

$= 1 - 2\,\text{جا}^2\theta$

من الصفحة (4) من هذه المذكرة أثبتنا أن:

$\text{جا}\,3\theta = 3\,\text{جا}\,\theta - 4\,\text{جا}^3\theta$ ← الاختيار (أ) غير صحيح

الآن نستنتج $\boxed{\text{جتا}\,3\theta}$

$\text{جتا}\,3\theta = \text{جتا}\,(2\theta + \theta) = \text{جتا}\,2\theta\,\text{جتا}\,\theta - \text{جا}\,2\theta\,\text{جا}\,\theta$

$= (2\,\text{جتا}^2\theta - 1)\,\text{جتا}\,\theta - (2\,\text{جا}\,\theta\,\text{جتا}\,\theta)\,\text{جا}\,\theta$

$= 2\,\text{جتا}^3\theta - \text{جتا}\,\theta - 2\,\text{جا}^2\theta\,\text{جتا}\,\theta$

$= 2\,\text{جتا}^3\theta - \text{جتا}\,\theta - 2\,(1 - \text{جتا}^2\theta)\,\text{جتا}\,\theta$

$= 2\,\text{جتا}^3\theta - \text{جتا}\,\theta - 2\,\text{جتا}\,\theta + 2\,\text{جتا}^3\theta$

$\text{جتا}\,3\theta = 4\,\text{جتا}^3\theta - 3\,\text{جتا}\,\theta$ ← الاختيار (د)

$$\text{جا}3\text{أ} = 3\,\text{جاأ} - 4\,\text{جا}^3\text{أ}$$

$$\text{جتا}3\text{أ} = 4\,\text{جتا}^3\text{أ} - 3\,\text{جتاأ}$$

عكس حفظ مباشرة "الإثبات" ص (4) ، (14) من هذه المذكرة

(2017/1) : إذا كان : جتاأ = س

فإن $\text{جا}^2\left(\frac{\text{أ}}{2}\right) = \frac{1-\text{س}}{2}$ ○ صح ○ خطأ

الجواب صح

$\text{جتاأ} = 1 - 2\,\text{جا}^2\frac{\text{أ}}{2}$

مشترك للطلب

(2018/1) : إذا كان : $\text{ظا}2\text{ع} = \frac{8}{\text{ظاع}}$ فإن ظاع = ؟

الحل :

$$\text{ظا}2\text{ع} = \frac{2\,\text{ظاع}}{1-\text{ظا}^2\text{ع}}$$

$$\frac{2\,\text{ظاع}}{1-\text{ظا}^2\text{ع}} = \frac{8}{\text{ظاع}}$$

$$8 - 8\,\text{ظا}^2\text{ع} = 2\,\text{ظا}^2\text{ع} \leftarrow 8 = 2\,\text{ظا}^2\text{ع} + 8\,\text{ظا}^2\text{ع}$$

$$\leftarrow 8 = 10\,\text{ظا}^2\text{ع} \leftarrow \frac{8}{10} = \text{ظا}^2\text{ع}$$

$$\leftarrow \text{ظاع} = \pm\sqrt{\frac{8}{10}} \leftarrow \text{ظاع} = \pm\sqrt{0.8} \text{ أو } \pm\sqrt{\frac{4}{5}}$$

$$\leftarrow \text{أو } \sqrt{\frac{2}{\ldots}}$$

:(2018/1)

$\boxed{4\ \text{جا}\ 120^\circ\ \text{جتا}\ 120^\circ} = ----$ ؟

∵ جا2س = 2جاس جتاس

$= 2\ (2\ \text{جا}\ 120^\circ\ \text{جتا}\ 120^\circ)$

$= 2\ (\text{جا}\ (2 \times 120))$

$= 2\ (\text{جا}\ [240^\circ])$

$= \boxed{2\ \text{جا}\ 240^\circ}$

$= \cancel{2} \times \frac{\sqrt{3}-}{\cancel{2}}$

$= \boxed{\sqrt{3}-}$

بدون آلة:

جا(240)

$=$ جا$(180^\circ + 60^\circ)$

$= \frac{\sqrt{3}}{2} -$

"كلا الإجابتين صحيحتين قد يذكر أحدهما في الاختيارات"

* اختصر:

$$\text{جتا}^2\left(45-\frac{\theta}{2}\right)-\text{جا}^2\left(45-\frac{\theta}{2}\right)$$

زاوية

$$= \text{جتا}\,2\left(45-\frac{\theta}{2}\right)$$

$$= \boxed{\text{جتا}\,(90-\theta)}$$

ويمكن اختصارها أخرى باستخدام صيغة الزاوية المركبة

أو باستخدام المتممة $= \boxed{\text{جا}\,\theta}$ ⟵ لتصبح $\boxed{\text{جا}\,\theta}$

* $2\,\text{جا}\,2P\,\text{جتا}\,2P = \;؟$

$\because\ \text{جا}\,2P = 2\,\text{جا}\,P\,\text{جتا}\,P$

ضعف

$\therefore\ 2\,\text{جا}\,2P\,\text{جتا}\,2P = \text{جا}\,2\,(2P)$

$= \boxed{\text{جا}\,4P}$

تمارين : (تُترك للطالب)

① اختصر: (جا $\frac{س}{2}$ − جتا $\frac{س}{2}$)^2

② اختصر: $\dfrac{1 - \text{ظا}^2 \frac{\theta}{6}}{\text{ظا} \frac{\theta}{6}}$

③ ضع التالي في أبسط صورة: $\frac{1}{2}$ جا $\frac{م}{2}$ جتا $\frac{م}{2}$

④ المقدار: جا$^2\theta$ + جتا$^2\theta$ − قتا$^2\theta$ في أبسط صورة = ؟

⑤ إذا كان: 2 جا م جتا م = $\frac{1}{5}$ ، فأوجد قيمة (جا م − جتا م)^2

⑥ إذا كانت: م زاوية في الربع الثاني
حيث: جا م = $\frac{1}{\sqrt{5}}$ فأوجد قيمة Ⓐ جتا 2م
Ⓑ جا 4م

الإجابات :

① 1 − جاس ② 2 ظتا $\frac{\theta}{3}$ ③ $\frac{1}{4}$ جا م

④ − ظتا$^2\theta$ ⑤ $\frac{4}{5}$ ⑥ أ ← $\frac{3}{5}$

ب ← $-\frac{24}{25}$

* إذا كان: قاس − ظاس = 4

أوجد قيمة: قاس + ظاس ؟

الحل:

قاس − ظاس ، قاس + ظاس

الرابط هو مفكوك [الفرق بين مربعين] الخاص ب

∴ (قاس − ظاس)(قاس + ظاس) = قا²س − ظا²س

متطابقة

4 × (قاس + ظاس) = 1

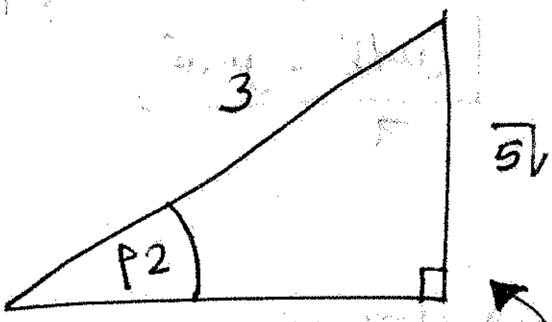
∴ قاس + ظاس = $\boxed{\frac{1}{4}}$

* (ملحوظة)

* إذا عُلم أنَّ: 2م زاوية حادة

وأن: جا2م $= \frac{\sqrt{5}}{3}$ فأوجد قيمة ظام ؟

الحل: جا2م $= \frac{\sqrt{5}}{3}$ ← المقابل ($\sqrt{5}$) ، الوتر (3)



$\sqrt{3^2 - (\sqrt{5})^2} = \sqrt{9-5} = \sqrt{4} = \boxed{2}$

المطلوب: ظام

بدلالة الزاوية الواحدة "النصف" والمعطى جا(2م) الضعف ∴ نبحث عن طريقة لإيجاد النصف

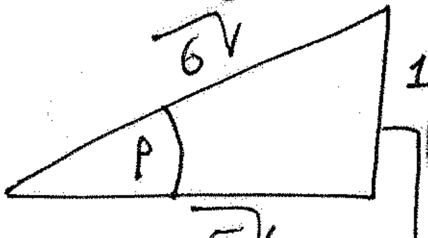
* من صيغة $\boxed{\text{جتا}(2م)} = 2\text{جتا}^2 م - 1$

$\frac{2}{3} = 2\text{جتا}^2 م - 1$

$2\text{جتا}^2 م = 1 + \frac{2}{3} \leftarrow 2\text{جتا}^2 م = \frac{5}{3}$

$\text{جتا}^2 م = \frac{5}{3} \times \frac{1}{2} \leftarrow \text{جتا}^2 م = \frac{5}{6}$

∴ جتام $= \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{6}}$



$\sqrt{(\sqrt{6})^2 - (\sqrt{5})^2} = \sqrt{6-5} = \boxed{1}$

∴ ظام $= \boxed{\frac{1}{\sqrt{5}}}$

أو: $\frac{1}{\sqrt{5}} \times \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}} = \boxed{\frac{\sqrt{5}}{5}}$

* اختصر: $\frac{5 \text{ ظا } 9س}{1 - \text{ظا}^2 9س}$

الحل:

$5 \left(\frac{\text{ظا } 9س}{1 - \text{ظا}^2 9س} \right)$

$\text{ظا } 2س = \frac{2 \text{ظاس}}{1 - \text{ظا}^2 س}$

ومنها:

$\frac{1}{2} \text{ ظا } 2س = \frac{\text{ظاس}}{1 - \text{ظا}^2 س}$

$= 5 \times \frac{1}{2} \text{ ظا } 2(9س)$

$= \boxed{\frac{5}{2} \text{ ظا } 18س}$

---

* $\text{جا}^2 \frac{س}{2}$

الحل:

$\text{جتا } 2س = 1 - 2\text{جا}^2 س$

$\text{جتا } \frac{2س}{2} = 1 - 2\text{جا}^2 \frac{س}{2}$

$\text{جتاس} = 1 - 2\text{جا}^2 \frac{س}{2}$

$\therefore \text{جتاس} = 1 - 2\text{جا}^2 \frac{س}{2}$

للحصول على المطلوب:

بالضرب في $\left(\frac{1}{2}\right)$ في طرفي المعادلة:

الجواب

$\frac{1}{2} \text{جتاس} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \times 2\text{جا}^2 \frac{س}{2} \leftarrow \boxed{\frac{1}{2} \text{جتاس}} = \frac{1}{2} - \text{جا}^2 س$

ملاحظة جتا (تأكل في السالب)

(يترك للطالب)

تمرين :

إذا كان : جا م = $\frac{4}{5}$ ، جتا ب = $\frac{-5}{13}$

حيث : $90 < م < 180$ ، $180 < ب < 270$

فأوجد ① جا (م − ب) ② جا 2 ب

③ جتا (−2 م)

الإجابات :

① $\frac{-56}{65}$

② $\frac{120}{169}$

③ $\frac{-7}{25}$

("يترك للطالب")

* إذا كان :

قا م = س

① جتا 2 م ② ظا 2 م

الجواب :

① $\frac{2 - س^2}{س^2}$

② $\frac{2\sqrt{س^2 - 1}}{2 - س^2}$

---

* اهتم بحل التمارين التي كتب عليها "تترك للطالب" فإنها مهمة جداً *

* إذا كان: $\text{ظا}\,2\text{أ} = \frac{24}{7}$ ، أ زاوية حادة ، فإن جا أ $= \frac{4}{5}$

- صح ●
- خطأ ○

الحل:

$$\text{ظا}\,2\text{أ} = \frac{24}{7}$$

$$\because \text{ظا}\,2\text{أ} = \frac{2\,\text{ظا أ}}{1 - \text{ظا}^2\text{أ}}$$

$$\frac{2\,\text{ظا أ}}{1 - \text{ظا}^2\text{أ}} = \frac{24}{7} \longrightarrow 2 \times 7\,\text{ظا أ} = 24 - 24\,\text{ظا}^2\text{أ}$$

$$24\,\text{ظا}^2\text{أ} + 14\,\text{ظا أ} - 24 = 0$$

باستخدام قانون المميز: $\longleftarrow \dfrac{-\text{ب} \pm \sqrt{\text{ب}^2 - 4\,\text{أ}\,\text{ج}}}{2\,\text{أ}}$

$\boxed{\text{أ} = 24}$ $\boxed{\text{ب} = 14}$ $\boxed{\text{ج} = -24}$

$$= \frac{-14 \pm \sqrt{(14)^2 - 4 \times 24 \times -24}}{2 \times 24} = \frac{-14 \pm 50}{48}$$

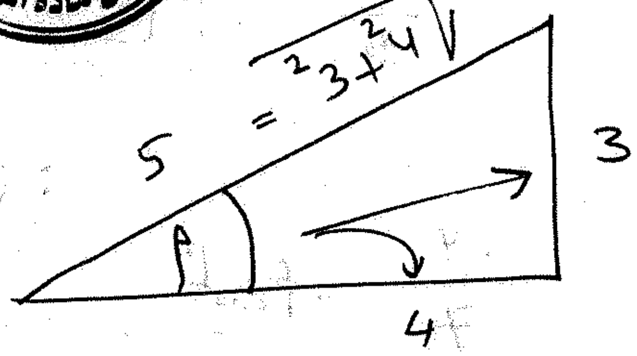
إما: $\dfrac{-14 + 50}{48} = \boxed{\dfrac{3}{4}}$

أو: $\dfrac{-14 - 50}{48} = \boxed{\dfrac{-4}{3}}$

يتبع...

لاحظ أن القيمة $-\frac{4}{3}$ مرفوضة

وذلك لأن الزاوية (أ) حادة



∵ ظا أ = $\frac{3}{4}$

∴ جتا أ = $\boxed{\frac{4}{5}}$

∴ الجواب صح ✓

---

* إذا كان: ظا θ = س ، جتا 2θ = ص

θ زاوية حادة

فأوجد ص بدلالة س ؟

"يُترك للطالب"

الجواب: ص = $\frac{1-س^2}{1+س^2}$

سؤال فيه فكرة بسيطة "جداً" حاول فيها بنفسك عزيزي الطالب

تمرين 2-ب

(1) اختصر:

مذكرة ← (أ) جتا^2 18° - جا^2 18° ← مذكرة (ب) $\frac{1-\text{ظا}^2 10^{\circ}}{2\,\text{ظا}\,10^{\circ}}$ (ج) 2 جا $\frac{س}{2}$ جتا $\frac{س}{2}$ ← مذكرة

مذكرة ← (د) 2 جتا^2 2س - 1 مذكرة ← (هـ) جا س جتا س

(2) أوجد من دون استخدام الجداول الرياضية أو الآلة الحاسبة، قيمة الأتي :

للطالب ← (أ) 2 جتا 75° جتا 75° للطالب (ب) جتا^2 $22\frac{1}{2}^{\circ}$ - جا^2 $22\frac{1}{2}^{\circ}$ للطالب (ج) $\frac{\text{ظا}\,112.5^{\circ}}{1-\text{ظا}\,112.5^{\circ}}$

للطالب ← (3) إذا كان، جا أ = $\frac{4}{5}$ ، أ زاوية حادة، فأوجد، من دون استخدام الجداول أو الآلة الحاسبة قيمة كل من:

(أ) جا 2 أ (ب) جتا 2 أ (ج) ظا 2 أ

(4) اثبت المتطابقات الآتية باستخدام قواعد الزاوية المركبة:

(أ) جتا (90° + أ) = - جا أ

(ب) $\frac{1 - \text{جتا}\,2\theta}{1 + \text{جتا}\,2\theta}$ = ظا^2 θ

(جـ) $\frac{\text{جا}\,\theta}{1 + \text{جتا}\,\theta}$ = ظا $\frac{1}{2}\theta$

(د) (جتا أ - جا أ)^2 - جا أ = - جا 2 أ... (جتا أ - جا أ)^2 - جا أ= - جا 1

(هـ) ظتا أ + ظا أ = 2 قتا 2 أ

(و) جا 2 أ = $\frac{2\,\text{ظا}\,أ}{1+\text{ظا}^2 أ}$

(5) أوجد، قياسات قيم س، حيث 0° ≥ س ≥ 360°، والتي تحقق المعادلات الآتية:

(أ) $\frac{1}{2}$ جا س = جا 2 س (ب) 7جا س + 3 جتا 2 س = 0 (هـ) ظا 2 س = 3 ظا س

(6) أوجد القيم العظمى والصغرى لكل من الدوال الآتية مع ذكر قيم θ من 0° إلى 360° :

(أ) 3 جا θ + 4 جتا θ (ب) 3 جتا θ - 4 جا θ (جـ) م جا θ - ن جتا θ

تمرين 2-جـ

(1) أوجد جميع قيم س بين 0°، 360° التي تحقق المعادلة: 5 جا س + 2 قتا س = 11

(2) إذا عُلم أن: ظا θ = س، جتا 2 θ = ص، وأن θ زاوية حادة، فأوجد ص بدلالة س.

للطالب ← (3) إذا كان ظا س = $\frac{15}{8}$ ، جتا ص = $\frac{3}{5}$، أن س، ص في نفس الربع، فاحسب من دون استخدام الجداول أو الآلة الحاسبة قيمة: جا (س + ص)

للطالب ← (4) إذا عُلم 2أ زاوية حادة، أن جا 2 أ = $\frac{\sqrt{5}}{3}$ ، فاحسب ، من دون استخدام الجداول أو الآلة الحاسبة قيم :

(أ) جتا 2 أ (ب) ظا أ

(5) اثبت المتطابقات الآتية:

(أ) جتا 2 أ = $\frac{1 - \text{ظا}^2 أ}{1 + \text{ظا}^2 أ}$ (ب) $\frac{\text{جا}\,س}{\text{جتا}\,س - \text{جا}\,س} + \frac{\text{جتا}\,س}{\text{جتا}\,س + \text{جا}\,س}$ = قا 2 س

(جـ) ظتا 2 θ + قتا 2 θ = ظتا θ

(6) حل المعادلات الآتية في θ حيث 0° ≥ θ ≥ 360°

(أ) 3 جتا θ + 4 جا θ = 5 (ب) 4 جا θ - 3 جتا θ = 2 (جـ) $\sqrt{3}$ جا θ + جتا θ = ...

تمرين 2-ب

(1) اختصر:

(أ) جتا^2 18° - جا^2 18° (ب) $\frac{\text{1-ظا}^2\, 10^\circ}{\text{2ظا}\, 10^\circ}$ (ج) 2 جا $\frac{\text{س}}{2}$ جتا $\frac{\text{س}}{2}$

(د) 2 جتا^2 2س - 1 (هـ) جا س جتا س

(2) أوجد من دون استخدام الجداول الرياضية أو الآلة الحاسبة، قيمة الآتي:

(أ) 2 جتا 75° جتا 75° (ب) جتا^2 22$\frac{1}{2}$$^\circ$ - جا^2 22$\frac{1}{2}$$^\circ$ (ج) $\frac{\text{ظا}\, 112.5^\circ}{\text{1-ظا}\, 112.5^\circ}$

(3) إذا كان، جا أ = $\frac{4}{5}$ ، أ زاوية حادة، فأوجد، من دون استخدام الجداول أو الآلة الحاسبة قيمة كل من:

(أ) جا 2أ (ب) جتا 2أ (ج) ظا 2أ

(4) أثبت المتطابقات الآتية باستخدام قواعد الزاوية المركبة:

(أ) جتا (90° + أ) = - جا أ (ب) $\frac{\text{1 - جتا}\, 2\theta}{\text{1 + جتا}\, 2\theta}$ = ظا^2 θ

(ج) $\frac{\text{جا}\, \theta}{\text{1 + جتا}\, \theta}$ = ظا $\frac{1}{2}\theta$ (د) (جتا أ - جا أ)^2 - جا أ = - جا 1

(هـ) ظتا أ + ظا أ = 2 قتا 2أ (و) جا 2أ = $\frac{\text{2ظا أ}}{\text{1+ظا}^2\text{أ}}$

(5) أوجد، قياسات قيم س، حيث 0° $\leq$ س $\leq$ 360°، والتي تحقق المعادلات الآتية:

(أ) $\frac{1}{2}$ جا س = جا 2 س (ب) 7جا س + 3 جتا 2 س = 0 (هـ) ظا 2 س = 3 ظا س

(6) أوجد القيم العظمى والصغرى لكل من الدوال الآتية مع ذكر قيم θ من 0° إلى 360° :

(أ) 3 جا θ + 4 جتا θ (ب) 3 جتا θ - 4 جا θ (ج) م جا θ - ن جتا θ

تمرين 2-ج

(1) أوجد جميع قيم س بين 0°، 360° التي تحقق المعادلة: 5 جا س + 2 قتا س = 11

(2) إذا عُلم أن: ظا θ = س، جتا 2 θ = ص، وأن θ زاوية حادة، فأوجد ص بدلالة س.

(3) إذا كان ظا س = $\frac{15}{8}$ ، جتا ص = $\frac{3}{5}$، أن س، ص في نفس الربع، فاحسب من دون استخدام الجداول أو الآلة الحاسبة قيمة: جا (س + ص)

(4) إذا عُلم 2أ زاوية حادة، أن جا 2أ = $\frac{\sqrt{5}}{3}$ ، فاحسب ، من دون استخدام الجداول أو الآلة الحاسبة قيم:

(أ) جتا 2أ (ب) ظا أ

(5) أثبت المتطابقات الآتية:

(أ) جتا 2أ = $\frac{\text{1 - ظا}^2\text{أ}}{\text{1 + ظا}^2\text{أ}}$ (ب) $\frac{\text{جا س}}{\text{جتا س} - \text{جا س}}$ + $\frac{\text{جتا س}}{\text{جتا س} + \text{جا س}}$ = قا 2 س

(ج) ظتا 2 θ + قتا 2 θ = ظتا θ

(6) حل المعادلات الآتية في θ حيث 0° $\leq$ θ $\leq$ 360°

(أ) 3 جتا θ + 4 جا θ = 5 (ب) 4 جا θ - 3 جتا θ = 2 (ج) $\sqrt{3}$ جا θ + جتا θ = 1

75